

Raciocínio proporcional: análise de uma coleção de livros didáticos de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental

Proportional reasoning: analysis of a collection of mathematics textbooks for the final years of Elementary School

Razonamiento proporcional: análisis de una colección de libros de texto de matemática para los últimos años de la Enseñanza Primaria

Michelle Adriane de Oliveira Laudares 
Instituto Federal Minas Gerais, Minas Gerais – MG, Brasil.
michelle.adriane@ifmg.edu.br

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner 
Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil.
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.
profvaniasantoswagner@gmail.com

Recebido em 06 de junho de 2023
Aprovado em 27 de agosto de 2025
Publicado em 01 de setembro de 2025

RESUMO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento orientador que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos desenvolverão durante a Educação Básica, garantindo a mesma oportunidade a todos os alunos brasileiros. Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC (Brasil, 2018) estabelece a importância dos alunos saberem lidar com os conjuntos dos números racionais, tema presente em outros conhecimentos matemáticos e outras disciplinas. O livro didático é um dos recursos que o professor tem a seu dispor para utilizar no processo de ensino-aprendizagem. Este artigo apresenta um estudo que explorou a análise de uma coleção de livros didáticos de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental para avaliar seu potencial em auxiliar no processo de ensino e aprendizagem do raciocínio proporcional. Foi usado um método de análise qualitativa documental elaborado por pesquisadores australianos (Shield; Dole, 2013). Essa metodologia permitiu alcançar o objetivo de investigar as possibilidades que livros didáticos oferecem para favorecer o ensino de raciocínio proporcional. Assim, trazemos a pergunta da pesquisa: *Quais dos cinco objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) encontramos em uma coleção de livros didáticos de Matemática adotada pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (Brasil, 2019) destinados aos anos finais do ensino fundamental?* Os resultados

apontam que para promover a compreensão de situações proporcionais, os livros didáticos precisam destacar o raciocínio proporcional. Embora possa servir de apoio para os professores, neste caso a análise mostra que o livro didático pode não apoiar a compreensão dos alunos.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional; Livro didático; Compreensão.

ABSTRACT

The National Common Curricular Base (BNCC) (Brasil, 2018) is a guiding document that defines a set of essential learning that students must develop during Basic Education, assuring the same opportunity to all Brazilian students. For the final years of Elementary School, the BNCC (Brasil, 2018) establishes the importance of students knowing how to deal with the set of rational numbers, a subject that permeates other mathematical knowledge and other disciplines. The textbook is one of the resources that the teacher has at his/her disposal to use in the teaching-learning process. This article presents a study that explored the analysis of a collection of Mathematics textbooks for the final years of Elementary School, in order to assess their potential to help in the process of teaching and learning proportional reasoning. A qualitative document analysis method developed by Australian researchers was used (Shield; Dole, 2013). This methodology allowed us to achieve the objective of investigating the possibilities that textbooks offer to promote the teaching of proportional reasoning. Therefore, we present the research question: *Which of the five learning objectives of the Australian researchers Shield and Dole (2013) did we find in a collection of Mathematics textbooks adopted by public schools and approved in the PNLD 2020 (Brasil, 2019) intended for the years end of elementary school?* The results indicate that to promote understanding of proportional situations, textbooks need to highlight proportional reasoning. Although, it can serve as support for teachers, in this case the analysis shows that the textbook may not support students' understanding.

Keywords: Proportional reasoning; Textbook; Understanding.

RESUMEN

La Base Curricular Común Nacional (BNCC) (Brasil, 2018) es un documento rector que define un conjunto de aprendizajes esenciales que los estudiantes deben desarrollar durante la Educación Básica, garantizando la misma oportunidad a todos los estudiantes brasileños. Para los últimos años de la Enseñanza Fundamental, la BNCC (Brasil, 2018) establece la importancia de que los alumnos saben manejar conjuntos de números racionales, tema que permea otros saberes matemáticos y otras disciplinas. El libro de texto es uno de los recursos que el docente tiene a su disposición para utilizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este artículo presenta un estudio que exploró el análisis de una colección de libros de texto de Matemática para los últimos años de la Enseñanza Fundamental, con el fin de evaluar su potencial para ayudar en el proceso de enseñanza y aprendizaje del razonamiento

proporcional. Se utilizó un método de análisis cualitativo de documentos desarrollado por investigadores australianos (Shield; Dole, 2013). Esta metodología nos permitió alcanzar el objetivo de investigar las posibilidades que ofrecen los libros de texto para promover la enseñanza del razonamiento proporcional. En este sentido, presentamos la pregunta de investigación: Cuál de los cinco objetivos de aprendizaje de los investigadores australianos Shield y Dole (2013) encontramos en una colección de libros de texto de Matemática adoptados por escuelas públicas y aprobados en el PNLD 2020 (Brasil, 2019) destinados a el final de los años de la escuela primaria? Los resultados indican que para promover la comprensión de situaciones proporcionales, los libros de texto deben resaltar el razonamiento proporcional. Aunque puede servir como apoyo para los profesores, en este caso el análisis muestra que el libro de texto puede no apoyar la comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: Razonamiento proporcional; Libro de texto; Comprensión.

Introdução

Um dos objetivos da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) é definir um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos desenvolverão durante a Educação Básica, independente da localização, para garantir que todos os alunos brasileiros tenham a mesma oportunidade de aprender o que é considerado essencial. Assim, a BNCC (Brasil, 2018) visa assegurar algumas aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da educação básica, orientar a elaboração de um currículo específico de cada escola ou rede escolar, pública ou privada, e instruir as matrizes de referência das avaliações internas e dos exames externos. Para tanto, esse documento estabelece um conjunto de conhecimentos básicos que devem ser assegurados, sem interferir na diversidade cultural e regional, e na autonomia dos educadores em cada escola dos diferentes municípios brasileiros.

A matemática é destacada na BNCC (Brasil, 2018) como uma área do conhecimento essencial para os alunos da educação básica e propõe, para os anos finais do Ensino Fundamental, que os alunos saibam lidar com os conjuntos dos números racionais, dentre outros conhecimentos. A BNCC (Brasil, 2018) coloca a área de Matemática diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já construído pelos alunos/alunas, para promover ações que estimulem e provoquem seus

processos de reflexão e de abstração. Para assim sustentar modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos, que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e bem comum. A BNCC (Brasil, 2018, p. 528-529) ainda, acrescenta:

os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Temos o mesmo entendimento do trecho da BNCC (Brasil, 2018) acima, pois consideramos que o ensino e a aprendizagem da Matemática envolve desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas. Ainda, proporcionar ao aluno conhecimentos fundamentais de Matemática, fornecendo ao aluno uma base sólida para sua futura formação acadêmica ou profissional. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) pesquisaram sobre os números racionais e ressaltam que esses conceitos estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante seus anos de estudo. Eles enfatizaram que aprender tais conceitos é um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças. Por sua importância, esse tema tem se constituído como foco de intensa investigação nas últimas décadas por diversos pesquisadores.

Shield e Dole (2002) pesquisaram sobre currículo de Matemática do ensino médio na Austrália e verificaram que muitos tópicos de estudo exigem habilidades de raciocínio proporcional. A pesquisa evoluiu para a interpretação de situações de proporção e a compreensão de métodos para resolver problemas de proporção. Segundo esses pesquisadores, "a complexidade do conceito de proporção parece repousar na extensão do conhecimento prévio necessário para seu desenvolvimento significativo" (Shield; Dole, 2002, p. 608, tradução nossa). Também esteve como foco

deste estudo a extensão em que livros didáticos vinculam tópicos relacionados à proporção.

Ben-Chaim, Illany e Keret (2008) chamam a nossa atenção de que os tópicos relativos à razão e proporção devem ocupar uma parte central tanto no currículo para as escolas quanto no dos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Adicionando à importância destacada ao currículo, temos a preponderância que os livros didáticos exercem na vida escolar, conforme as palavras do pesquisador Powell:

Tanto para professores quanto para alunos, as fontes autorizadas para o conhecimento da matemática escolar, impressas ou digitais, são livros didáticos. Eles são o principal recurso que os professores usam para planejar e ministrar suas aulas e, ao mesmo tempo, os livros didáticos são frequentemente o único recurso que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e operações com eles (Powell, 2018, p. 80).

Este estudo investiga as possibilidades que livros didáticos oferecem para favorecer o ensino de raciocínio proporcional. Neste sentido, trazemos a pergunta norteadora da pesquisa: *Quais dos cinco objetivos de aprendizagem dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013) encontramos em uma coleção de livros didáticos de Matemática adotada pelas escolas públicas e aprovados no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) destinados aos anos finais do ensino fundamental?*

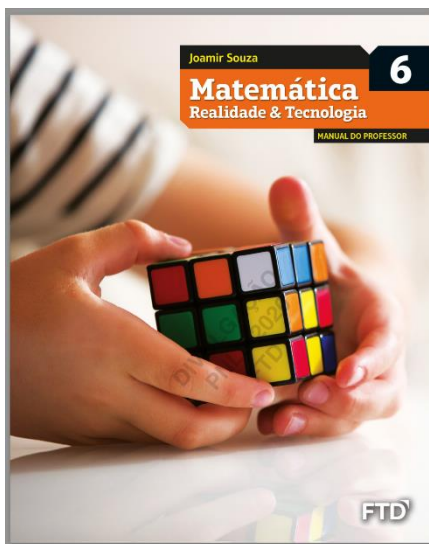
As análises de livros didáticos podem se concentrar em vários aspectos. Escolhemos a estrutura de Shield e Dole (2013) para analisar a representação do raciocínio proporcional nas coleções selecionadas nesta pesquisa. A razão desta escolha se deu por Shield e Dole reconhecerem a Teoria de Vergnaud (1983) de campos conceituais para estruturas multiplicativas, que enfatiza a importância de desenvolver a compreensão dos alunos sobre ligações estruturadas e conexões dentro e entre tópicos. Ainda, há que se ressaltar que, embora o estudo de Shield e Dale (2013) se refira à análise de livros didáticos usados em escolas australianas, ele demonstrou um método que pode ser aplicado à análise do material didático da matemática em muitas partes do mundo.

Este artigo está organizado em três grandes partes, sendo a primeira destinada à Introdução, seguida pela análise de livros do 6º ao 9º ano da coleção selecionada, culminando com as considerações finais da pesquisa.

Análise da Coleção Matemática Realidade & Tecnologia

A partir do Guia Digital PNLD 2020 (Brasil, 2019)- para os anos finais do Ensino Fundamental, selecionamos a coleção Matemática, Realidade & Tecnologia (Souza, 2018), cuja distribuição média entre as escolas públicas do Brasil foi da ordem de: 6º ano - 141.558 unidades; 7º ano - 133.560 unidades; 8º ano - 125.194 unidades; e 9º ano - 120.660 unidades de exemplares para uso no ano de 2020 em todo o Brasil. Esta coleção foi publicada pela Editora FTD no ano de 2018, e é composta por 4 volumes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Figura 01– Capa do livro 6º ano



Fonte: Souza, 2018. Matemática, Realidade & Tecnologia. 6º ano

Em cada volume da coleção estão presentes as orientações gerais, comuns aos quatro livros da coleção, exibindo os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção, bem como reflexões acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática, além de discussões sobre tendências em Educação Matemática. A

Base Nacional Comum Curricular – [BNCC] (Brasil, 2018) é um dos documentos que nortearam as reflexões e a elaboração da obra.

Nas orientações específicas, o manual do professor é organizado em formato de U. Por esse formato, o livro do aluno, com as respostas das atividades, é mostrado em tamanho reduzido. Enquanto nas laterais - à direita e à esquerda - e na parte inferior das páginas há comentários e orientações didáticas correspondentes às atividades propostas e aos conteúdos disponíveis nas páginas do livro do aluno. Nesta coleção, os fundamentos teóricos e metodológicos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem buscam favorecer o trabalho coletivo e colaborativo como uma maneira de estimular a participação, a reflexão e a comunicação entre os alunos. Os conteúdos relacionados à razão, proporção e raciocínio proporcional estão distribuídos nesta coleção, entre os 4 anos finais do ensino fundamental, que vai do 6º ao 9º ano. No próximo tópico, trazemos as análises para cada livro usando os indicadores de Shield e Dole (2013).

Para estruturar a nossa análise, utilizamos o trabalho de Shield e Dole (2013), que extraíram da literatura australiana e internacional em Educação Matemática sobre números racionais e raciocínio proporcional cinco pontos-chave para instrução. Esses pontos são considerados importantes para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e a construção de estruturas multiplicativas para operar com sucesso neste domínio entre os alunos, como segue:

* Chave 1: objetivo de aprendizagem 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa. Indicadores de que o objetivo de aprendizagem da Chave 1 foi atendido é se o material didático: (1.1) oferece oportunidades para aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas; (1.2) explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais (conforme a natureza aditiva das comparações não proporcionais); e (1.3) usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.

* Chave 2: objetivo de aprendizagem 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem foi atendido na Chave 2 é se o material didático: (2.1) define claramente a relação

comparativa multiplicativa de situações de razão; (2.2) destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas; e (2.3) evidencia o uso tanto do pensamento dentro como entre o pensamento (ou seja, evidencia o uso explícito dos indicadores 2.1 e 2.2).

* Chave 3: objetivo de aprendizagem 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem foi atingido na Chave 3 é se o material didático: (3.1) traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção); (3.2) mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas (ou seja, os procedimentos de solução são baseados em representação simbólica consistente para problemas que compartilham a mesma estrutura); e (3.3) adia a introdução da “equação de proporção” formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes em suas mentes.

* Chave 4: objetivo de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem atendeu a Chave 4 é se o material didático: (4.1) exibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (4.2) explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (4.3) sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

* Chave 5: objetivo de aprendizagem 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção. Indicadores de que este objetivo de aprendizagem foi alcançada com a Chave 5 é se o material didático: (5.1) utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas; (5.2) mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem; e (5.3) utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e / ou fazer previsões.

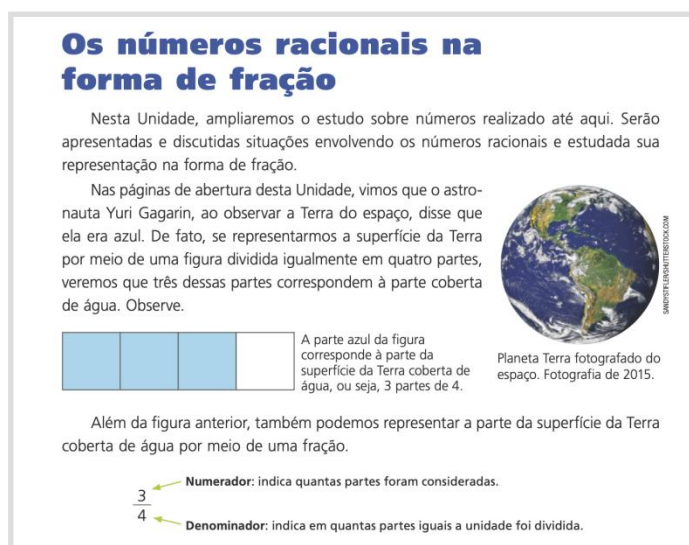
Utilizamos, assim, uma análise qualitativa do que observamos nos livros didáticos investigados a partir dos 15 indicadores distribuídos entre as 5 chaves ou objetivos de aprendizagem. Portanto, a análise focou em livros didáticos adotados

em escolas públicas, com o objetivo de avaliar o uso dos indicadores citados, por meio das 5 Chaves, que verificam exatamente o elo entre os conhecimentos do raciocínio proporcional. Isto porque os conhecimentos de razão e proporção, que se relacionam com fração, fornecem as bases para o desenvolvimento do raciocínio proporcional ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental.

1. Análise do livro do 6º ano

Ao iniciar o capítulo 5, Souza (2018) utiliza a imagem do planeta Terra visto do espaço para introduzir a matéria de números racionais na forma de fração. Uma representação da Terra por meio de uma figura dividida igualmente em quatro partes demonstra que três dessas partes correspondem à parte coberta por água. Ou seja, é representado que a Terra é composta por $\frac{3}{4}$ de água.

Figura 02 – Introdução aos números racionais



Fonte: Souza, 2018, p. 148. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Essa abordagem traz uma associação simbólica do planeta Terra com uma figura retangular, demonstrando que a área do planeta pode ser representada por quatro partes iguais, lembrando a ideia de números fracionários. Essa foi uma conexão explícita da geografia com o conhecimento de fração, ressaltando e distinguindo as relações parte-todo, que ocorre quando se divide em partes iguais um

objeto ou uma figura. Ainda, o autor, além de apresentar partes de uma unidade dividida igualmente, ele introduz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão e exemplifica.

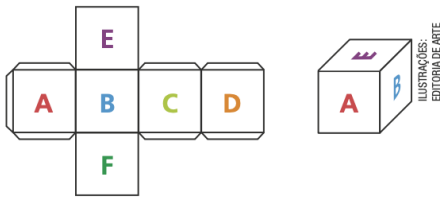
Os conhecimentos prévios de fração, estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, são explorados no livro quando o professor dialoga com alunos de 6º ano ideias sobre esse texto inicial. Isso ocorrerá se docente questionar o que ocorre quando se divide em partes iguais o planeta Terra, e isto atende à Chave 4 de Shield e Dole (2013), já que fica explícita a relação parte-todo do conceito de fração.

Uma característica desta coleção é que o autor valoriza a diversidade de saberes de diferentes áreas do conhecimento, e estabelece relação com as disciplinas de ciências, geografia e história. Inicialmente, ele apresenta atividades com ideias de frações e equivalência, que problematizam várias situações de relação parte-todo. Traz sempre uma diversidade de exemplos e situações contextualizadas, propiciando o resgate do conhecimento de frações já trabalhados em anos anteriores. Assim, durante as primeiras páginas do capítulo, são exploradas as ideias básicas introdutórias sobre fração. O autor parte do pressuposto que se trata de conteúdos já estudados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Então, propõe que o professor investigue o conhecimento prévio dos alunos, dialogando e questionando como eles pensam para responder a esse exemplo. Assim, verificamos que Souza (2018) procura em seu material didático atender ao que citamos na Chave 4 da estrutura de Shield e Dole (2013).

Prosseguindo, o autor traz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão. Além disso, são apresentadas as frações decimais, cujos denominadores são potências de base 10. Em seguida, são propostas atividades que trabalham a leitura e a escrita de uma fração, a compreensão da fração com a ideia de partes de inteiro de formas variadas, seja representado por figuras ou mesmo por pedaços de corda. Serão trabalhadas atividades de fração com a ideia de razão e também com a ideia de quociente de uma divisão, bem como a relação de fração com pontos na reta numérica. Isso é evidenciado nas atividades da Figura 03.

Figura 03 –Atividades envolvendo frações

4. Joaquim recortou o molde de um dado, que representa um cubo, indicou nas faces as seis primeiras letras do nosso alfabeto e montou o dado.



a) Em relação ao total de faces, escreva a fração correspondente à quantidade de faces que contêm:

- vogais. $\frac{2}{6}$
- consoantes. $\frac{4}{6}$

b) Se Joaquim lançar esse dado, é mais provável que a letra obtida na face de cima seja vogal ou consoante? Justifique sua resposta. *Resposta esperada: Consoante, pois há mais faces com consoante do que com vogal.*

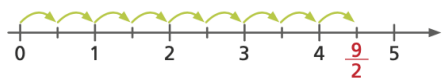
5. Leia cada frase a seguir e escreva no caderno uma fração para representar a parte destacada.

a) 80 em cada 100 resíduos lançados aos mares são plásticos. $\frac{80}{100}$

b) 1 em cada 4 brasileiros é hipertenso. $\frac{1}{4}$

c) No Brasil, 39 em cada 100 consumidores preferiram realizar pagamentos à vista em compras pela internet em 2015. $\frac{39}{100}$

6. Para localizar a fração $\frac{9}{2}$ na reta numérica, Hélio dividiu cada unidade em 2 partes iguais. Depois, contou 9 partes e localizou a fração $\frac{9}{2}$.



Escreva entre quais números naturais consecutivos na reta numérica localizamos as frações a seguir.

a) $\frac{18}{5}$ 3 e 4. **b)** $\frac{7}{3}$ 2 e 3. **c)** $\frac{25}{4}$ 6 e 7.

Fonte: Souza, 2018, p. 151. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Fração de uma quantidade é o próximo tópico, explorado por meio de situações contextualizadas e que apresentam a ideia de que o todo está relacionado a um grupo de objetos ou elementos. Como padrão, o conteúdo é apresentado de forma exemplificada para, em seguida, serem propostas atividades diversificadas e contextualizadas. Assim, são desenvolvidas atividades variadas sobre o cálculo da fração de uma quantidade e trabalha a ideia de divisão em partes desiguais. Ele também tem a preocupação de trabalhar com o raciocínio e a produção de argumentos matemáticos para compreender e atuar em situações cotidianas que envolvem relações éticas e cidadãs. Novamente, neste tópico, percebemos que os conhecimentos prévios de fração são explorados por atividades que enfatizam que o denominador da fração é o que indica em quantas partes iguais o todo deve ser dividido, ao passo que a quantidade de partes a ser considerada é indicada pelo numerador. Observamos essas ideias do autor na Figura 04.

Figura 04 –Atividades envolvendo frações

4. Leia a tirinha e resolva as questões.



CEDRAZ, A. *As 1000 tiras em quadrinhos*. São Paulo: Martin Claret, 2012. p. 22.

a) Converse com o professor e os colegas sobre o que você entendeu dessa tirinha. **Resposta pessoal.**

b) Que fração do valor da entrada as crianças com a carteira de estudante vão pagar para assistir ao filme na casa de Arturzinho? $\frac{1}{2}$.

c) Quantos reais cada criança vai pagar com a carteira de estudante para assistir ao filme, se Arturzinho cobrar R\$ 12,00 pela entrada? E se ele cobrar R\$ 8,00? **R\$ 6,00. R\$ 4,00.**

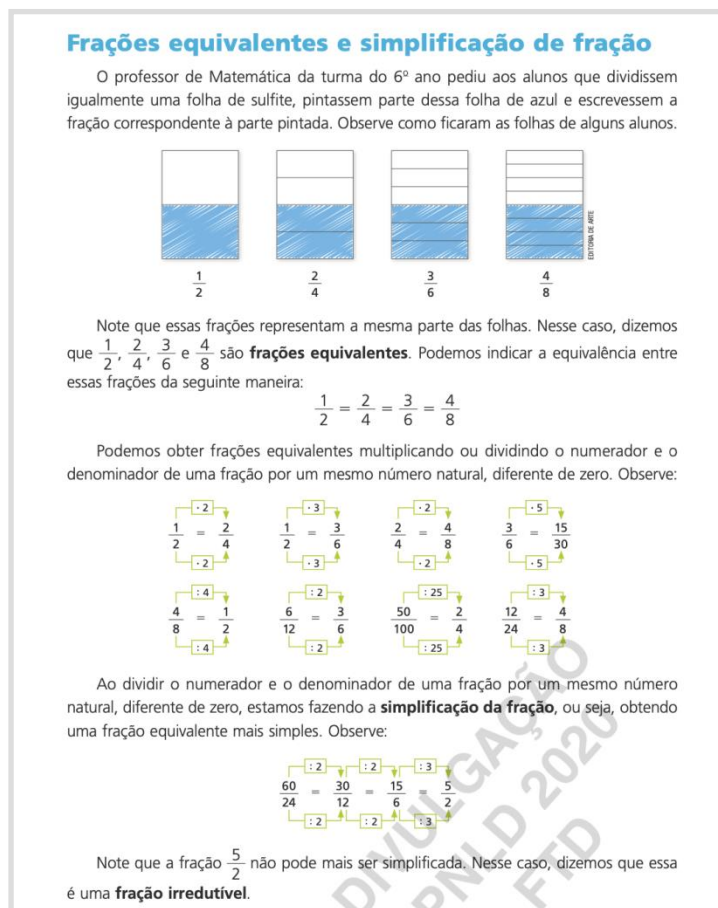
d) Pesquise o valor da entrada de um evento que conceda o direito à meia-entrada, como espetáculos culturais ou eventos esportivos. Depois, com base nessa pesquisa, elabore uma questão que envolva o cálculo de fração de uma quantidade. Troque a questão com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve aquela que ele elaborou. Ao final, confirmem juntos as resoluções. **Resposta pessoal.**

Fonte: Souza, 2018, p. 153. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Para iniciar o conteúdo de frações equivalentes, Figura 05, o autor propõe uma atividade para trabalhar a associação de fração a partes de inteiros, representados por figuras, para em seguida trazer a identificação de frações equivalentes e fração irredutível. Neste tópico, Souza (2018) traz atividades que trabalham a obtenção de frações equivalentes para apresentar a compreensão de noções iniciais de proporção, e informa que tal assunto será estudado em volumes posteriores a este. Neste ponto, depreendemos que no livro do 6º ano são abordados apenas tópicos de frações e razão. As tarefas trabalhadas nesta seção requerem que os alunos visualizem representações diferentes da mesma parte em relação ao todo e percebam as partes correspondentes, o que envolve conhecimentos anteriores.

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 05 –Atividades envolvendo frações equivalentes



Fonte: Souza, 2018, p. 155. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

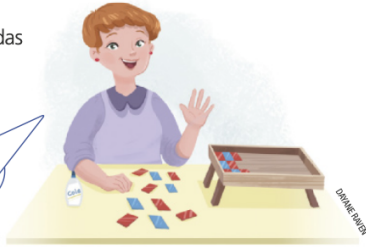
Adiante, encontramos o conteúdo sobre comparação de frações, tanto frações com denominadores iguais ou frações com numeradores iguais, quanto frações com denominadores e numeradores diferentes. Para introduzir esse conhecimento, o autor sugere trabalhar com interdisciplinaridade, juntamente com professores de outras disciplinas, como arte, geografia e história. O livro se vale do artesanato para exemplificar a comparação de frações conforme apresentamos na Figura 06. Ainda, atividades contextualizadas são propostas, além de outras que relacionam frações a reta numerada e ordenação de frações, que são conhecimentos previamente adquiridos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 06 –Atividades sobre comparação de frações

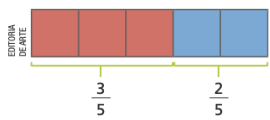
Clarissa é artesã e em suas peças utiliza composições de mosaicos com pastilhas coloridas de cerâmica. Observe o que ela está dizendo.

Nessa bandeja, vou compor um mosaico com pastilhas coloridas: $\frac{3}{5}$ do total de pastilhas serão vermelhas e $\frac{2}{5}$ serão azuis.



No mosaico em que Clarissa está trabalhando, ela utilizará mais pastilhas de qual cor: vermelha ou azul?

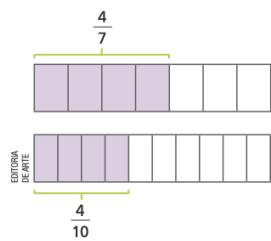
Para responder a essa questão, temos de comparar as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$, que têm denominadores iguais. Observe a figura dividida em 5 partes iguais.



Note que $\frac{3}{5}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, ou seja, $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$.

Assim, no mosaico haverá mais pastilhas vermelhas.

Agora, vamos comparar as frações $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{10}$, que têm numeradores iguais. Observe as figuras, que representam a unidade, divididas de maneiras distintas em partes iguais.



Note que $\frac{4}{7}$ é maior do que $\frac{4}{10}$, ou seja, $\frac{4}{7} > \frac{4}{10}$.

Ao comparar frações com denominadores iguais, a maior delas é aquela de maior numerador. Já ao comparar frações com numeradores iguais, a maior delas é aquela cujo denominador é menor.

Fonte: Souza, 2018, p. 157. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

O último conteúdo explorado no capítulo é sobre adição e subtração de frações, com denominadores iguais e também com denominadores diferentes. Assim, a sugestão do autor é trabalhar em conjunto com o professor de ciência, trazendo um debate sobre o porquê de água e óleo não se misturarem, e a razão de outros líquidos se misturarem. Neste tópico, conhecimentos prévios são explorados quando são propostas atividades sobre cálculo de uma expressão numérica com frações. Portanto, é necessário lembrar aos alunos que, em uma expressão numérica apenas com adição e subtração, os cálculos podem ser feitos na ordem em que essas operações veem, ou quando é explorado que metade corresponde a um meio ou $\frac{1}{2}$.

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 07 –Atividades sobre adição e subtração de frações

Adição e subtração de frações

Adição e subtração de frações com denominadores iguais

Você já tentou misturar água e óleo? Provavelmente, você deve ter conseguido identificar esses líquidos no recipiente utilizado, pois o óleo e a água não se misturam. Na aula de Ciências, a professora de Karen fez este experimento com os alunos. Observe as etapas.

1ª

Reservou os materiais:

- Recipiente.
- Óleo de soja.
- Água com corante vermelho.

2ª

Despejou água, ocupando $\frac{5}{12}$ do recipiente.

3ª

Despejou óleo, ocupando $\frac{3}{12}$ do recipiente.

Para determinar a fração do recipiente ocupada com líquido ao final desse experimento, podemos calcular o resultado de $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$. Observe.

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$$

Assim, ao final do experimento, $\frac{8}{12}$ do recipiente ficaram com líquido.

Agora, vamos determinar a fração do recipiente que ficou sem líquido. Para isso, podemos calcular o resultado de $\frac{12}{12} - \frac{8}{12}$. Observe.

$$\frac{12}{12} - \frac{8}{12} = \frac{4}{12}$$

! Note que o recipiente todo corresponde a $1 = \frac{12}{12}$

Em uma adição (ou subtração) de frações com denominadores iguais, adicionamos (ou subtraímos) os numeradores e mantemos os denominadores.

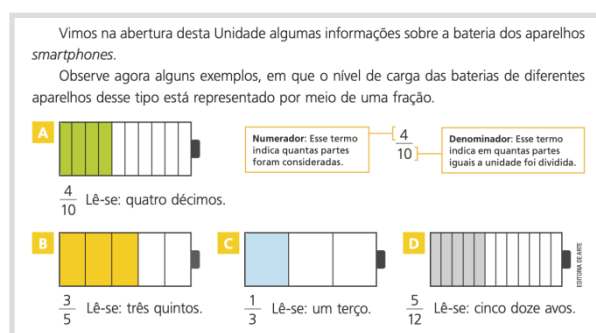
Fonte: Souza, 2018, p. 160. Matemática, Realidade e Tecnologia. 6º ano.

Assim, pelas análises apresentadas temos que o capítulo 5 do livro Matemática, Realidade e Tecnologia (Souza, 2018) apresenta ALTA evidência para cada um dos três indicadores da Chave 4, que se refere a: Meta de aprendizagem 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração. Os Indicadores de ALTA EVIDÊNCIA de que esta meta de aprendizagem atendeu a Chave 4 deu-se pelo fato, de, ao analisarmos o material didático, termos encontrado: (1) conexões explícitas com ideias de frações e equivalência; (2) as relações parte/fração inteira e relação parte/parte-todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e (3) sinalização clara do significado da notação de fração em uso (por exemplo, parte-todo, razão e quociente).

2. Análise do livro do 7º ano

Souza (2018) inicia o capítulo sobre frações com as ideias de partes de um inteiro, explicando aos alunos que isso ocorre quando se divide em partes iguais um objeto ou uma figura. Para exemplificar, ele traz imagens de bateria de aparelho *smartphone*, com diversificados níveis de carga, representados por meio de figuras divididas em partes iguais de maneiras distintas, que é a ideia de fração como medida. Essa introdução revela uma conexão explícita com o conhecimento da fração, pois ao explorar as relações parte de um todo, há o destaque explícito de distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração; e por sinalizar o significado da notação de fração em uso (parte-todo), destacando alta evidência da Chave 4.

Figura 08 –Frações como parte de um inteiro

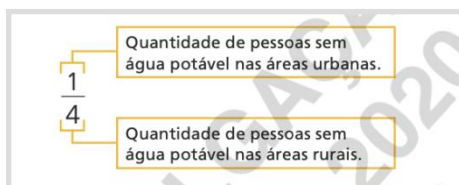


Fonte: Souza, 2018, p. 102. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

O autor aproveita para trazer a ideia de razão contextualizando com outros conhecimentos de ciências, ao discutir sobre água potável e saneamento básico. Souza (2018, p.102) traz que "para cada pessoa sem água potável que vive nas áreas urbanas, há 4 pessoas sem água potável nas áreas rurais. Essa razão pode ser representada pela seguinte fração":

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 09 – Frações como razão



Fonte: Souza, 2018, p. 102. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Outra ilustração da ideia de razão através de uma situação autêntica é a atividade apresentada pela Figura 10. Ela trabalha a associação entre razão e fração para resolver problemas. A escrita da razão deve levar em consideração a ordem do que é solicitado: razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e a de copos de água. No caso, o numerador deve conter a quantidade de copos de suco concentrado (3); e o denominador, a quantidade de copos de água (5). Este exemplo sinaliza o significado da notação de fração em uso (razão). Observe:

Figura 10 –Frações como razão

6. Melina comprou uma garrafa de suco natural concentrado de uva. Observe na embalagem as informações sobre o preparo desse suco.

Para preparar esse suco, misture:

Suco concentrado	Água
3 copos	5 copos

a) Escreva uma fração para representar a razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e a quantidade de copos de água necessários para o preparo do suco. $\frac{3}{5}$

b) Caso sejam utilizados 15 copos de água no preparo do suco, quantos copos de suco concentrado devem ser misturados? 9 copos de suco concentrado.

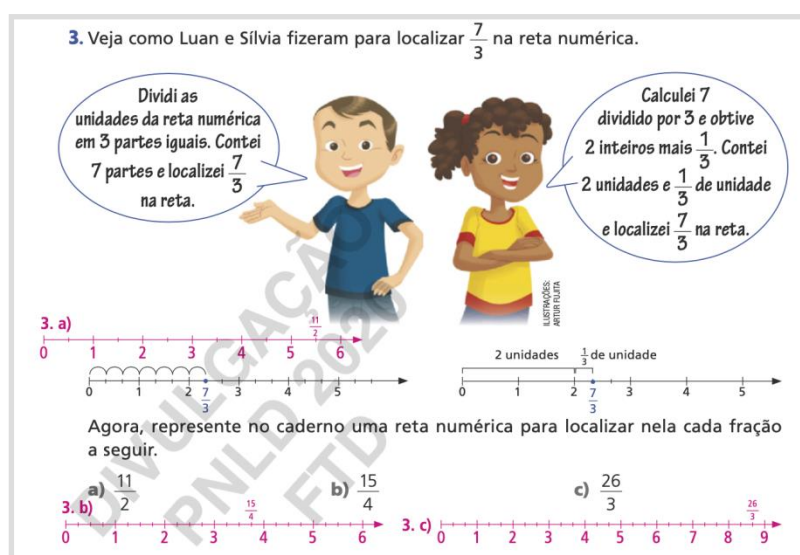
Fonte: Souza, 2018, p. 106. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Prosseguindo, Souza (2018) introduz as ideias de divisão e de fração de uma quantidade. Neste caso, ele ressalta a importância dos alunos entenderem que,

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

nessas situações, o todo está relacionado a um grupo de objetos ou elementos. O denominador da fração é que indica em quantas partes iguais o todo deve ser dividido, e o numerador indica quantas partes serão consideradas. Ainda, encontramos atividade para trabalhar a localização de número racional na forma de fração na reta numérica, usando diferentes algoritmos, referindo-se à ideia de fração como medida.

Figura 11 –Frações na reta numérica



Fonte: Souza, 2018, p. 104. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

A abordagem dos conteúdos sobre frações equivalentes vai focalizar em os alunos compreenderem que o numerador e o denominador de uma fração deve necessariamente ser multiplicado ou dividido pelo mesmo número natural diferente de zero. E que ao se dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, maior do que 1, estamos fazendo a simplificação da fração. No final desta seção, temos tarefas que vão trabalhar a comparação, a ordenação de frações e a associação de números racionais na forma de fração a pontos da reta numérica. Neste tópico, temos altas evidências de uso da Chave 4, por meio do indicador 4.1 que faz exibição de conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 12 – Comparação de frações

5. Os aplicativos e sites de vídeos, de maneira geral, apresentam uma barra na qual é possível acompanhar qual parte do vídeo está sendo reproduzida. Observe.

a) Faça estimativas e identifique qual das frações a seguir corresponde à parte desse vídeo que já foi reproduzida? II

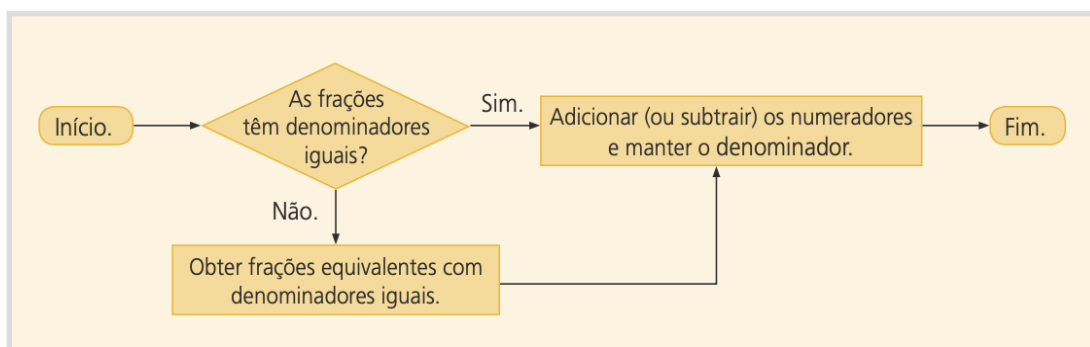
I. $\frac{9}{20}$ II. $\frac{1}{4}$ III. $\frac{7}{8}$

b) Esse vídeo tem 260 s de duração. Com base em sua estimativa anterior, quantos segundos dele já foram reproduzidos? E quantos ainda faltam ser exibidos?
65 s. 195 s.

Fonte: Souza, 2018, p. 109. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Avançando no capítulo 4, Souza (2018) vai trabalhar as operações com frações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Ele propõe alguns problemas para desenvolver o raciocínio dos alunos diante das operações básicas. Em suma, ele traz:

Figura 13 – Adição e subtração de frações



Fonte: Souza, 2018, p. 111. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Para a abordagem da multiplicação de frações, ele utiliza algumas estratégias, como a utilização de figuras. O importante, para o autor, é os alunos compreenderem que são multiplicados os numeradores e são multiplicados os denominadores para se obter o resultado. Souza (2018) também considera o trabalho com números inversos,

que é quando o produto de dois números diferentes de zero é igual a 1, e exemplifica, trazendo que $2/7$ e $7/2$ são números inversos. Já para o conteúdo de divisão de frações, o autor utiliza figuras divididas representando parte de um inteiro; e também traz exemplos sem auxílio de figuras, como uma estratégia válida para casos de divisão de um número natural por uma fração, ou divisão de fração por um número natural. Para finalizar o capítulo 4, temos os tópicos sobre números racionais na forma decimal. São abordados: transformação de um número racional da forma decimal para a forma de fração; transformação de um número racional na forma de fração para a forma decimal; comparação de números decimais; adição e subtração de números decimais; multiplicação e divisão de números decimais. Entendemos que estes tópicos vêm resgatar conhecimentos anteriores dos alunos para introduzir, posteriormente, o raciocínio proporcional.

O capítulo 6 aborda a proporcionalidade e é iniciado com razão, apresentando uma de suas aplicações, a escala, que é a razão entre a medida de um comprimento em um desenho e a medida correspondente ao comprimento real, expressas em uma mesma unidade de medida. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais podem ser interpretados por, pelo menos, estas seis maneiras: uma comparação de parte para todo, um decimal, uma razão, uma divisão indicada (quociente), um operador e uma medida de quantidades contínuas ou discretas. Ao trazer a ideia de operador neste capítulo, Souza (2018) complementa todas essas interpretações de números racionais defendidas pelos pesquisadores americanos. No capítulo 4 deste volume, o autor já havia introduzido cinco das seis formas: parte de um todo, razão, divisão, decimal e medida. Agora, ele introduz operador, ao trazer a escala, uma vez que esta trabalha o conceito de frações como um modificador de situações. Novamente, verificamos o uso da Chave 4, que se refere a uma conexão explícita com o conhecimento da fração.

Figura 14 – Razão: escala

3. Você tem ou já viu alguma miniatura? São diversos os tipos de miniaturas: automóveis, trens, navios, aviões e personagens. Nas miniaturas costuma estar indicada a escala em que foi construída, ou seja, a razão entre a medida na representação e a medida no objeto real.

Observe a escala de cada miniatura a seguir e, com base na medida indicada, calcule a medida real do objeto correspondente.

a) Escala 1 : 24. **84 cm.**



b) Escala 1 : 36. **180 cm ou 1,8 m.**



Fonte: Souza, 2018, p. 167. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Neste tópico, Souza (2018) também destaca número decimal como um dos significados de fração, ao trazer atividades destinadas aos alunos perceberem que a porcentagem está relacionada com a ideia de razão. Veja a Figura 15 a seguir.

Figura 15 – Porcentagem e razão

Porcentagem e razão

O conceito de porcentagem também pode ser compreendido com base na ideia de razão.

Exemplos

a) Leia a informação.

Em uma escola com 320 alunos, 60% são meninas.

Nesse caso, temos que 60 em cada 100 alunos dessa escola são meninas. Essa razão pode ser indicada de diferentes maneiras:

$$60\% = 60 : 100 = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

Observe duas maneiras de calcular a quantidade de meninas dessa escola:

- $\frac{60}{100} \cdot 320 = \frac{60 \cdot 320}{100} = \frac{19200}{100} = 192$
- $0,6 \cdot 320 = 192$

Assim, dos 320 alunos dessa escola, 192 são meninas.

Fonte: Souza, 2018, p. 165. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Figura 16 – Proporção

É importante que eles compreendam a relação entre razão e proporção, isto é, temos uma proporção quando duas razões são iguais. Na formalização do conceito de proporção, explicar a eles que, como $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são razões, consideramos **b** e **d** números diferentes de zero.

PARA PENSAR

Para complementar, com base na resposta apresentada pelos alunos, escrever na lousa as proporções a seguir e propor a eles que determinem o número que está faltando em cada item.

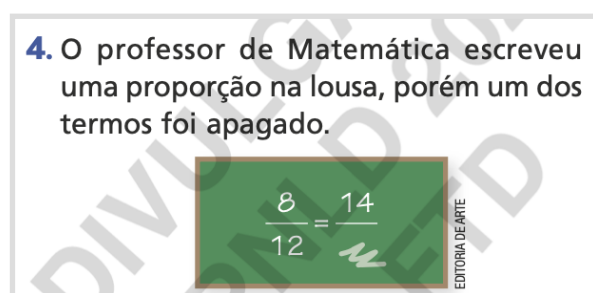
- $\frac{3}{5} = \frac{12}{\quad}$. Resposta: 20.
- $\frac{8}{7} = \frac{\quad}{21}$. Resposta: 24.
- $\frac{\quad}{2} = \frac{4}{8}$. Resposta: 1.
- $\frac{4}{\quad} = \frac{1}{8}$. Resposta: 32.

Fonte: Souza, 2018, p. 169. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

Ao introduzir o conteúdo sobre “Proporção”, já encontramos o que Souza (2018, p. 170) traz como propriedade fundamental das proporções, a saber: “Em uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.” Dito isso, de forma muito direta, temos uma introdução do algoritmo de proporção padrão, que é o contrário do que estabelece a Chave 3, pela qual espera-se um adiamento da introdução da “equação de proporção” formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes. Do mesmo modo, quando Souza (2018, p. 170) diz que “podemos verificar a propriedade fundamental das proporções, multiplicando ambos os termos da proporção pelos denominadores das frações e realizando simplificações”, ele também está fazendo a introdução da “equação de proporção”, ao mostrar pela verificação que a igualdade corresponde a uma proporção. E de uma outra forma, ele reforça o uso dessa equação quando

propõe atividades que trabalham a identificação do termo faltante em uma proporção, de forma que os alunos resolvam por tentativa, utilizando equações ou com outras estratégias. A sugestão do autor para a resolução do exercício da Figura 17 é explorar a calculadora como instrumento de investigação. Veja:

Figura 17 – Proporção



Fonte: Souza, 2018, p. 170. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

A equação de proporção, também conhecida como o instrumento da regra de três simples e direta, é um meio de levar ao aluno o entendimento instrumental, que se assemelha a decorar uma fórmula e saber como e quando aplicá-la. Quando Shield e Dole (2013) recomendam adiar a introdução da equação, eles estimulam desenvolverem nos alunos o entendimento relacional defendido por Skemp (1989), que seria desenvolver a compreensão dos alunos a respeito da base do raciocínio proporcional. Ou seja, a recomendação é adiar a aplicação de fórmulas até que os alunos saibam explicar de diversas formas a questão da proporcionalidade. Wielewski (2008, p. 59) trouxe que “para Skemp (1989), se um aluno sabe resolver um problema ou alguém sabe jogar um jogo qualquer ou um mecânico sabe consertar um motor, não significa necessariamente que ele entende totalmente seu funcionamento.” Caminhando na análise feita por Wielewski (2008), temos que o entendimento relacional:

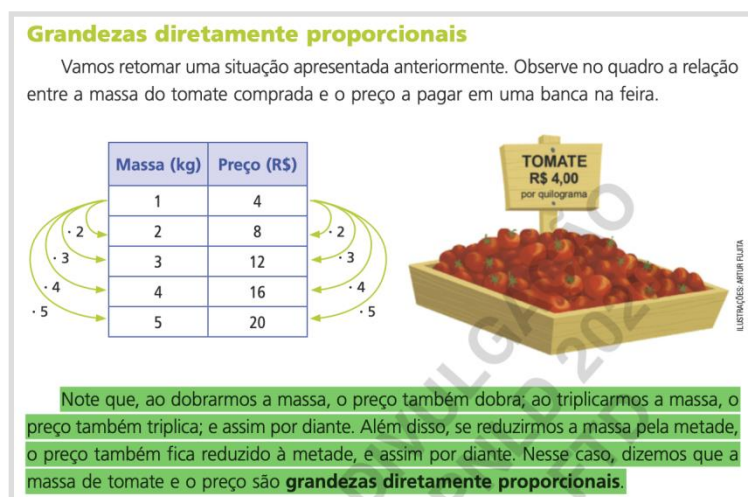
consiste não em memorizar uma coleção de regras, mas no edifício erigido por meio de estruturas de conhecimento, das quais uma grande variedade de planos de ação pode ser derivado, como e quando exigido. Construir esses planos de conhecimentos existentes é uma função da inteligência (Wielewski, 2008, p. 62).

No capítulo 4, o autor desenvolveu o conteúdo de frações equivalentes. Agora, no capítulo 6, não houve retomada deste tema. Percebemos que faltou elaborar o elo

de ligação entre frações equivalentes e proporção. O link dos dois assuntos seria uma forma de ampliar a base de conhecimento dos alunos para ajudá-los a construir um entendimento relacional do conteúdo. Todavia, Souza (2018) partiu direto para a apresentação da equação de proporção, o que foi contrário ao indicado pela Chave 3 de Shiel e Dole (2013) e o que nós percebemos como uma abordagem não muito acertada.

Logo em seguida, Souza (2018) vai introduzir os conceitos de relação entre grandezas, as diretamente proporcionais e as inversamente proporcionais. Neste tópico, o autor traz atividades que vão trabalhar a identificação de situações em que grandezas estão diretamente proporcionais e a identificação de situações de grandezas inversamente proporcionais. Além de atividades de identificar as situações, Souza (2018) também traz proposições de resoluções de situações-problema. Contudo, não houve destaque de nenhuma tarefa. Ainda, identificamos uma média evidência do indicador 5.1, quando no texto houve o destaque da relação multiplicativa por meio de tabelas, mas sem desenvolvimento do conteúdo nas atividades propostas.

Figura 18 – Grandezas diretamente proporcionais



Fonte: Souza, 2018, p. 171. Matemática, Realidade e Tecnologia. 7º ano.

3. Análise do livro do 8º ano

Souza (2018) introduz o capítulo abordando o conteúdo de proporção, lembrando conhecimentos já estudados nos volumes anteriores. Logo no início, o autor já chama a atenção para o indicador (4.1) de Shield e Dole (2013), ao trazer ideias de frações e equivalências, por meio de alta evidência, conforme a Figura 19.

Figura 19 – Frações equivalentes

Note que as razões $\frac{40}{500}$ e $\frac{60}{750}$ são iguais, pois:

$\frac{40}{500} = \frac{2}{25}$

$\frac{60}{750} = \frac{2}{25}$

Relembrar aos alunos que, quando simplificamos duas frações obtendo frações irredutíveis iguais, então essas frações são equivalentes, como é o caso de $\frac{40}{500}$ e $\frac{60}{750}$.

Fonte: Souza, 2018, p. 103. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

A seguir, pela Figura 20, apresentamos uma atividade sobre a determinação de razão entre duas grandezas e a comparação entre razões, em uma situação contextualizada. Souza (2018) sugere que o professor pergunte aos alunos se já passaram por uma situação parecida com a apresentada, na qual um mesmo produto é disponibilizado em diferentes modelos de embalagens. Ainda, recomenda conversarem sobre quais estratégias eles utilizam para determinar qual é o mais vantajoso para a compra, sugerindo a razão entre o preço e a quantidade de produto é menor. Este exemplo remete ao indicador (2.1) - define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão, porém, consideramos como baixa a evidência deste indicador por não terem apresentado claramente esta definição, apesar de a terem ilustrado.

Figura 20 – Comparação de razões

7. João foi ao supermercado comprar sabão líquido. Observe ao lado duas embalagens da marca de que ele mais gosta.

- Para cada produto, escreva a razão entre o preço (R\$) e a quantidade de sabão (L).
- As razões que você escreveu no item **a** formam uma proporção? Justifique.
- João quer comprar o produto mais vantajoso em relação à razão preço por litro. Qual produto ele deve comprar? Explique.

Resposta esperada: Em ambos os produtos, o preço por litro é o mesmo. Assim, em relação à razão preço por litro, nenhum produto é mais vantajoso que o outro.



Fonte: Souza, 2018, p. 105. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

A Chave 2 de Shield e Dole (2013) sugere que o livro didático explore de várias formas situações que cheguem à ideia de razão, e defina quando uma razão for equivalente à uma proporção. Neste capítulo, encontramos exemplos diversificados de razão. Contudo, não encontramos evidência de definição clara sobre a relação multiplicativa de situações de razão. Assim, apesar de termos as definições formais de razão, com estratégias de trabalho dentro do raciocínio proporcional, ou seja, destacando as razões equivalentes, não foi ressaltada a relação multiplicativa envolvida na proporção. Portanto, classificamos por ser uma baixa evidência de uso da Chave 2, por meio do indicador (2.3) - evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa). Veja a Figura 21:

Figura 21 – Identificação de razões equivalentes

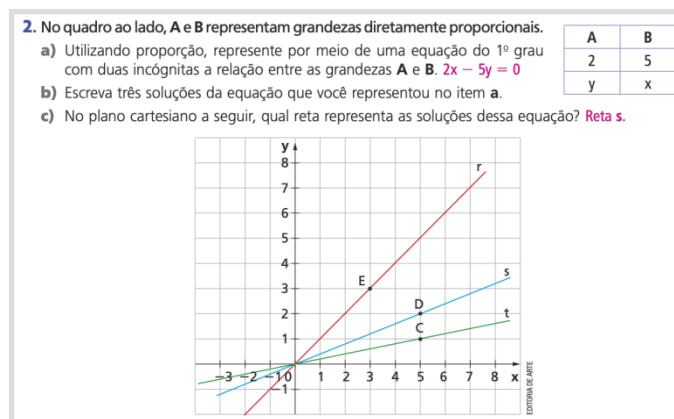
4. Em cada item, indique a razão por meio de uma fração. Depois, se possível, simplifique essa fração até torná-la irredutível.
- a) A razão entre 2 e 9. $\frac{2}{9}$
 - b) A razão entre 8 e 4. $\frac{8}{4}$; $\frac{2}{1}$
 - c) A razão entre 42 e 180. $\frac{42}{180}$; $\frac{7}{30}$
 - d) A razão entre 14 e 60. $\frac{14}{60}$; $\frac{7}{30}$
 - e) A razão entre 16 e 72. $\frac{16}{72}$; $\frac{2}{9}$
- Agora, identifique os pares de razões que formam uma proporção. **A-E; C-D.**

Fonte: Souza, 2018, p. 104. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

Finalizando o capítulo, temos o conteúdo de grandezas proporcionais. Segundo a Chave 5 da estrutura de Shield e Dole (2013), precisa-se de variadas representações para ilustrar que gráficos de situações proporcionais são linhas retas que passam pela origem. Tabelas também podem ser usadas para destacar relações. Assim, encontramos alta evidência dos indicadores (5.1) e (5.2), conforme demonstrado pela Figura 22.

ISSN: 1984-6444 | <http://dx.doi.org/10.5902/1984644484013>

Figura 22 – Representações de situações de proporção

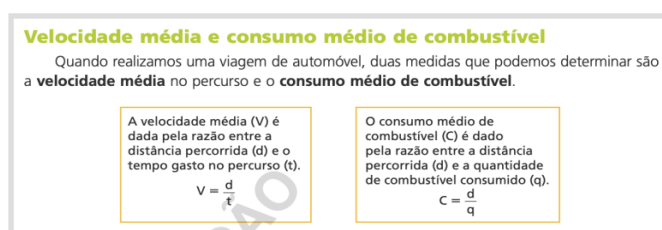


Fonte: Souza, 2018, p. 112. Matemática, Realidade e Tecnologia. 8º ano.

4. Análise do livro do 9º ano

O livro do 9º ano aborda a proporcionalidade com foco em razão, proporção e grandezas proporcionais. A novidade em relação aos volumes anteriores do 7º e 8º ano é uma ênfase em exemplos de razões entre grandezas de diferentes naturezas, como velocidade média, consumo médio de combustível, densidade demográfica. O conteúdo de proporção é explorado com situações de igualdade de razões. Já as grandezas proporcionais apresentam estratégias para economia de energia elétrica, exemplos com escala e respeito às leis de trânsito. Essas abordagens permitem-nos dizer que temos evidência de uso da Chave 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa, pois encontramos tarefas em um contexto cotidiano, familiar para a maioria dos alunos, que oferecem oportunidades para comparar e contrastar situações aditivas e multiplicativas.

Figura 23 – Razão entre grandezas de naturezas diferentes



Fonte: Souza, 2018, p. 110. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

Figura 24 – Uso de situações da vida real

4. Para fazer uma jarra de refresco de fruta, João vai utilizar certo volume de suco concentrado e preparar de acordo com as indicações na embalagem. 4. a) $\frac{200}{800}$.



Modo de preparo

200 mL de suco concentrado 800 mL de água

a) Escreva uma razão entre a quantidade de suco concentrado e a de água, em mililitros, utilizada no preparo desse refresco.

Fonte: Souza, 2018, p. 115. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

Sabemos que as situações proporcionais são aquelas em que duas ou mais grandezas variam de forma diretamente ou inversamente proporcionais. Então, se uma delas aumenta, a outra também aumenta (ou diminui) na mesma proporção. Os exemplos trazidos por Souza (2018) representam situações proporcionais, visto que são ilustradas situações onde a razão entre as grandezas se mantém constante. A Figura 25 remete à relação multiplicativa da proporcionalidade. Todavia, o autor não deixa ressaltada a relação multiplicativa. É uma informação implícita para o aluno, que precisa deduzir essa relação pela observação. Desta forma, apesar do exemplo ser adequado para o contexto, ele remete a uma baixa evidência do indicador (1.2), unicamente por não explicitar, por não deixar claro, que as situações ilustradas se referem a uma relação multiplicativa entre as grandezas.

Figura 25 – Relação multiplicativa em situações proporcionais

2. Observe no quadro as medidas em que as fotografias podem ser impressas em formato retangular por certa loja na internet.

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)
I	15	10
II	30	24
III	25	20
IV	40	30
V	60	40

a) Escreva, para cada modelo, a razão entre o comprimento e a largura da fotografia impressa. I: $\frac{15}{10}$, II: $\frac{30}{24}$, III: $\frac{25}{20}$, IV: $\frac{40}{30}$, V: $\frac{60}{40}$

b) Agora, determine todas as proporções que podem ser formadas com as razões que você escreveu no item **a**. $\frac{15}{10} = \frac{60}{40}$, $\frac{30}{24} = \frac{25}{20}$

3. Copie no caderno apenas as fichas cuja razão forma uma proporção com a razão $\frac{4}{3}$.

$\frac{44}{33}$	$\frac{70}{175}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{120}{300}$	$\frac{100}{75}$	$\frac{18}{36}$
-----------------	------------------	-----------------	-------------------	------------------	-----------------

$\frac{44}{33} = \frac{4}{3}$, $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$, $\frac{120}{300} = \frac{4}{3}$, $\frac{100}{75} = \frac{4}{3}$

Fonte: Souza, 2018, p. 115. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

A Figura 26 ilustra uma situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais, dentro de uma situação cotidiana, autêntica da vida real, que envolve a relação multiplicativa. Porém, essa relação não é explicitada, ela encontra-se implícita no exercício. Novamente, entendemos que, apesar do grande potencial do exemplo, há uma baixa evidência da Chave 1 pelo fato do autor não aprofundar nos conceitos e explicações sobre a proporcionalidade.

Figura 26 –Grandezas proporcionais



Fonte: Souza, 2018, p. 119. Matemática, Realidade e Tecnologia. 9º ano

Outra crítica que podemos tecer é que ao trabalhar com grandezas proporcionais, Souza (2018) não trouxe o tópico de grandezas não proporcionais. Desta forma, não ofereceu oportunidades de se fazer comparação entre situações proporcionais e as não proporcionais. Assim, não foi apresentado ao aluno exemplos para diferenciar entre comparações aditivas (que não precisam estar relacionadas entre si) e multiplicativas (relacionadas entre si).

5. Resultados encontrados

Nesta seção, trazemos as evidências encontradas dos indicadores de Shield e Dole (2013) para a Coleção Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018). O Quadro 01 resalta os resultados, organizados sob as cinco chaves da estrutura definida por Shield e Dole (2013). Para melhor compreensão das análises, uma classificação de alta, média, baixa ou nenhuma evidência foi decidida para cada indicador, dependendo de sua evidência encontrada no material. É importante ressaltar que a proporção é introduzida no 7ºano e a proporcionalidade no 8ºano.

Quadro 01 - Evidências de uso das Chaves de Shield e Dole (2013) na Coleção Matemática Realidade & Tecnologia (Souza, 2018)

Classificação de uso das Chaves de Shield e Dole (2013)	Matemática Realidade & Tecnologia			
	6º Ano	7º Ano	8º Ano	9º Ano
CHAVE 1 - Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.				
1.1 oferece oportunidades p/ aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
1.2 explicita a relação multiplicativa em situações proporcionais.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Baixa
1.3 usa exemplos e exercícios em comparações autênticas, propiciando contextualização.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Alta
CHAVE 2 - Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.				
2.1 define claramente a relação comparativa multiplicativa de situações de razão.	Nenhuma	Nenhuma	Baixa	Nenhuma
2.2 destaca o uso das operações de multiplicação e divisão, ressaltando serem operações inversas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
2.3 evidencia o uso tanto do pensamento dentro (razões equivalentes) como entre o pensamento (relação multiplicativa).	Nenhuma	Nenhuma	Baixa	Nenhuma
CHAVE 3 - Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.				
3.1 traz uma representação na situação de proporção, apoiando a identificação de relacionamentos dentro e entre eles.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.2 mostra e explora de forma explícita as ligações entre a representação simbólica entre os tipos de problemas.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
3.3 adia a introdução da equação de proporção formal até que uma vasta experiência com outras representações tenha sido alcançada pelos estudantes.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma
CHAVE 4 - Conexão explícita com o conhecimento da fração.				
4.1 exhibe conexões explícitas com ideias de frações e equivalência.	Alta	Alta	Alta	Nenhuma
4.2 explora explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.	Alta	Alta	Nenhuma	Nenhuma
4.3 sinaliza claramente o significado da notação de fração em uso.	Alta	Alta	Nenhuma	Nenhuma
CHAVE 5 - Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.				
5.1 utiliza tabelas para destacar as relações multiplicativas.	Nenhuma	Média	Alta	Nenhuma
5.2 mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem.	Nenhuma	Nenhuma	Alta	Nenhuma
5.3 utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma	Nenhuma

Fonte: Dados coletados pela autora no decorrer da pesquisa de doutorado (Laudares, 2023).

(a) Chave 1: Uso de situações autênticas da vida real que contrastam a comparação aditiva e multiplicativa.

- Indicador 1.1) Não são trazidos exemplos de comparações aditivas, nem dadas oportunidades para diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas.
- Indicador 1.2) A relação multiplicativa em situações proporcionais é apresentada, mas não é explicitada, com baixa evidência de uso no livro do 9º ano. Os exemplos trazidos por Souza (2018) representam situações onde a razão entre as grandezas se mantém constante, e remetem à relação multiplicativa da proporcionalidade. Todavia, o autor não deixa evidenciada a relação multiplicativa. É uma informação implícita para o aluno, que precisa deduzir essa relação pela observação.
- Indicador 1.3) Exemplos e exercícios envolveram comparações autênticas, e explicitaram a relação multiplicativa em situações proporcionais com alta evidência no livro do 9º ano, oferecendo oportunidades para o aluno diferenciar entre comparações aditivas e multiplicativas. Esse livro usou tarefas que possuem alto potencial para o professor desenvolver melhor os conteúdos e apresentar aos alunos uma ampliação do entendimento da relação multiplicativa antes de estimular o uso da ferramenta da regra de três. Contudo, adiante veremos que a Chave 3 não foi atendida.

(b) Chave 2: Identificação da estrutura multiplicativa em situações de proporção.

- Indicador 2.1) Com baixa evidência, foi definida a relação comparativa multiplicativa de situações de razão. Exemplo: No livro do 8º ano, o autor apresenta uma atividade sobre a determinação de razão entre duas grandezas e a comparação entre razões, em uma situação contextualizada, na qual um mesmo produto é disponibilizado em diferentes modelos de embalagens, e pede para os alunos determinarem qual é o mais vantajoso para a compra, sugerindo a razão entre o preço e a quantidade de produto é menor. Isso remete a uma baixa evidência deste indicador por não terem apresentado claramente a

relação comparativa multiplicativa de situações de razão, apesar de ilustrá-la.

- Indicador 2.2) Não trouxe que multiplicação e divisão são operações inversas.
- Indicador 2.3) Encontramos baixa evidência do uso de razões equivalentes (dentro) e relações multiplicativas (entre o pensamento), por meio de exemplos diversificados de razão. Consideramos como baixa por não explorar claramente a definição sobre a relação multiplicativa de situações de razão. Então, apesar de termos as definições formais de razão, com estratégias de trabalho dentro do raciocínio proporcional, ou seja, destacando as razões equivalentes, não foi ressaltada a relação multiplicativa envolvida na proporção.

(c) Chave 3: Atraso na introdução do algoritmo de proporção padrão.

- Indicador 3.1) Não houve representação na situação de proporção que apoiasse a identificação de relacionamentos dentro e entre eles (dentro da situação e entre ideia da situação de proporção).
- Indicador 3.2) Não explicitou ligações entre a representação simbólica dentre os tipos de problemas.
- Indicador 3.3) A introdução da “equação de proporção” formal não foi adiada até que uma vasta experiência com outras representações tivessem sido alcançada.

(d) Chave 4: Conexão explícita com o conhecimento de fração.

- Indicador 4.1) Exibiu alta evidência de conexões explícitas com ideias de frações e equivalências. Exemplo: Souza (2018) traz atividades que trabalham a obtenção de frações equivalentes para trazer a compreensão de noções iniciais de proporção, e informa que tal assunto será estudado em volumes posteriores a este livro do 6º ano. No livro do 7º ano, a abordagem dos conteúdos sobre frações equivalentes vai focalizar em os alunos compreenderem que o numerador e o denominador de uma fração deve necessariamente ser multiplicado ou dividido pelo mesmo número natural

diferente de zero. E que ao se dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, maior do que 1, estamos fazendo a simplificação da fração.

- Indicador 4.2) Com alta evidência, explorou explicitamente as relações parte/fração inteira e relação parte/parte/todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração. Exemplo: os conhecimentos prévios de fração, estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, são explorados no livro quando o professor dialoga com alunos de 6º ano ideias de um texto inicial em que o autor questiona o que ocorre quando se divide em partes iguais o planeta Terra, deixando explícito que o livro didático trabalha a relação parte-todo do conceito de fração. Ainda, no volume 7, o autor traz que uma fração também pode representar uma razão ou o quociente de uma divisão, sendo estes outros dois significados de fração. Ainda, para exemplificar, o autor traz imagens com diversificados níveis de carga de aparelho *smartphone* por meio de figuras divididas em partes iguais de maneiras distintas, que é a ideia de fração como medida. Essa introdução revela uma conexão explícita com o conhecimento da fração, ao explorar as relações parte de um todo, destacando explicitamente distinções entre os significados conceituais trabalhados de fração.
- Indicador 4.3) Sinalizou claramente o significado da notação de fração em uso com alta evidência. Exemplo: atividade - escrita da razão deve levar em consideração a ordem do que é solicitado: razão entre a quantidade de copos de suco concentrado e de água. O numerador deve conter a quantidade de copos de suco concentrado (3); e o denominador, a quantidade de copos de água (5). Este exemplo sinaliza o significado da notação de fração em uso (razão).

(e) Chave 5: Uso eficaz de uma variedade de representações de situações de proporção.

- Indicador 5.1) Alta evidência de uso de tabelas para destacar as relações

multiplicativas no livro do 8º ano.

- Indicador 5.2) Mostra que gráficos de situações proporcionais são retas que passam pela origem com alta evidência no livro didático do 8º ano.
- Indicador 5.3) Não utiliza gráficos para extrapolar e interpolar soluções e/ou fazer previsões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A coleção de livros didáticos analisada atende e está em conformidade aos pressupostos da BNCC (Brasil, 2018), todavia, são superficiais em suas abordagens e não promovem uma compreensão profunda do raciocínio proporcional. Sabemos que os professores brasileiros muitas vezes baseiam seu planejamento de aula apenas pelos livros didáticos. Acreditamos que essa prática dos professores possa estar alicerçada em uma confiança nesses materiais, crendo que a representação do conteúdo no livro didático possa ter um forte impacto na aprendizagem dos alunos. Contudo, esta pesquisa ressalta que, para promover a compreensão de situações proporcionais, os livros didáticos precisam destacar o raciocínio proporcional. Reafirmamos, em nossa pesquisa, as ideias dos pesquisadores australianos Shield e Dole (2013), quando vislumbraram que, embora possa servir de apoio para os professores, neste caso a análise mostra que o livro didático pode não apoiar a compreensão dos alunos. Ao contrário, pode dificultá-las.

Referências

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER Edward. Rational number concepts. *In*: R. Lesh & M. Landau (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983, p. 91-125.

BEN-CHAIM, David; ILANY, Bat-Sheva; KERET, Yaffa. Atividades investigativas autênticas para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, vol. 21, núm. 31, 2008, pp. 129-159. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: apresentação – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019.

LAUDARES, Michelle Adriane de Oliveira. **Uma pesquisa documental sobre o raciocínio proporcional em livros didáticos nacionais de matemática do PNLD 2020**. 2023, 267 f. Doutorado em educação matemática: Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória/ES.

POWELL, Arthur Belford. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática. Ano 13, n. 29, set. - dez. 2018, p. 78-92.

SHIELD, Malcon; DOLE, Shelley. Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuck, & O. J. Thomas (Eds.), **Mathematics Education in the south Pacific. Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) 2002**, p. 608-616. Auckland, New Zealand: MERGA.

SHIELD, Malcon; DOLE, Shelley. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. **Educational Studies in Mathematics**, 82, 2013, p. 183–199.

SKEMP, Richard. **Mathematics in the primary school**. London: Routledge, 1989.

SOUZA, Joamir. **Matemática, realidade & tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018. v. 6.

SOUZA, Joamir. **Matemática, realidade & tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018. v. 7.

SOUZA, Joamir. **Matemática, realidade & tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018. v. 8.

SOUZA, Joamir. **Matemática, realidade & tecnologia**. São Paulo: FTD, 2018. v. 9.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, Richard.; LANDAU, Morgan. **Acquisitions of mathematics concepts and processes**. New York, Academic Press, p. 127-174, 1983.

WIELEWSKI, Sergio Antonio. **Pensamento instrumental e pensamento relacional na educação matemática**. 2008, 471 f. Doutorado em educação matemática: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)