

RELAÇÃO ENTRE DIÂMETRO E ALTURA E ESTIMATIVA DOS ERROS CA
SUAS EM VOLUME PARA UM POVOAMENTO DE *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze.*

Relationship between diameter and height and evaluation of
the random errors in volume of *Araucaria angustifolia*
(Bert.) O. Ktze. stand.

José Alves da Silva**

RESUMO

Neste trabalho são discutidos sete diferentes modelos de equações para o cálculo das regressões entre os diâmetros e as alturas das árvores. Foram medidas 64 árvores de pinheiro brasileiro (*Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze.) de um povoamento de 17 anos de idade. A equação calculada em função do logaritmo dos diâmetros e alturas apresentou o melhor ajustamento e o menor erro sistemático. Os modelos discutidos são apresentados na Tabela 2 e os resultados na Tabela 3. É apresentada, também, uma análise sobre os erros causais cometidos nas estimativas volumétricas de diferentes números de árvores, baseada na lei da propagação dos erros. Para a estimativa dos volumes individuais foram estabelecidas relações entre o fator forma artificial, o verdadeiro fator forma e o quociente forma segundo o procedimento de Hohenadl.

SUMMARY

In this work are discussed different models of equations to calculate the regressions between the diameters and heights of trees. Sixty-four trees of Parana Pine (*Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze.) from a 17-year old stand were measured. A double logarithmic equation of diameters and heights showed the best results and the minimum systematic error. All discussed models are showed in Table 2 and the results in Table 3. Following and analysis is made, according to the law of error propagation, to investigate the random errors in volume, resulting from the estimations of different numbers of trees. The interrelationships between the form factors and the form ratio according to Hohendl's method were established for determination of individual volumes.

* Realizado sob os auspícios da FAPERGS de acordo com os projetos nº 2074 e 2623.

** Professor do Departamento de Engenharia Agrícola e Florestal - Centro de Ciências Rurais - UFSM.

INTRODUÇÃO

A correlação entre os diâmetros e alturas das árvores, em geral, são relações empregadas para o estudo da estrutura dos povoamentos ou simplesmente como um subsídio para o cálculo do seu volume.

Segundo SCHMIDT (5), a decisão sobre a função a ser usada nos trabalhos práticos florestais sempre constituiu um problema, pois as espécies, a idade e a estrutura do povoamento exercem grande influência na definição das equações. Por outro lado, quando o volume do povoamento precisa ser estimado através das medições de todos os diâmetros e as alturas apenas medidas em uma fração dos indivíduos, então torna-se necessário conhecer a relação entre os diâmetros e as alturas.

O presente trabalho tem por objetivo estabelecer uma equação para a estimativa das alturas das árvores em função dos diâmetros, bem como estimar os erros casuais cometidos na avaliação do volume, usando-se a lei de propagação dos erros.

MATERIAL E MÉTODOS

As árvores utilizadas nesta pesquisa originaram-se de um povoamento equiano de *Araucaria angustifolia* de 17 anos de idade, situado em Passo Fundo-RS. Os dados foram coletados em 4 amostras casuais retangulares de 0,05 ha. A escolha de cada árvore, para a medição da altura, foi realizada ao acaso. Neste sentido, foram inicialmente enumeradas todas as árvores dentro de cada amostra e, posteriormente, selecionadas. Entretanto, tomou-se a precaução para que fossem escolhidas um máximo de 25% do total das árvores de cada parcela, sendo assim selecionadas (entre 264 árvores) um total de 64 (Tabela 1), cujas alturas foram medidas com o Blume-Leiss.

O povoamento, contudo, encontrava-se em condições ecológicas excelentes, com solos típicos para a espécie (Latossol vermelho profundo), apresentando rigoroso desenvolvimento.

O estoque de crescimento não foi possível ser estimado, uma vez que não existiam tabelas de rendimento para a espécie. O povoamento apresentava para sua idade um anormal grau de abertura causado pelos desbastes anteriores.

Segundo SCHMIDT (5), são necessárias cerca de 30-50 alturas abrangendo toda a amplitude dos diâmetros, a fim de se conseguir uma boa representação gráfica ou funcional entre estas variáveis e alcançar uma suficiente precisão nas estimativas. A medição das alturas em um número considerável de árvores nas maiores classes de diâmetro constitui, também, um importante requisito, a fim de se

evitar extrapolações. Para o material em pauta obteve-se a seguinte distribuição de frequência, classificada segundo os diâmetros e alturas (Tabela 1).

Tabela 1. Distribuição de frequência em função dos diâmetros e alturas das árvores.

ALTURA EM M	DIÂMETRO EM CM												TOTAL
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	32	
10	1	1	2	1									5
12		1	3	5	9	1	2						21
14				1	3	7	7	6	3	1			28
16								2	3	2	1	2	10
TOTAL	1	2	5	7	12	8	9	8	6	3	1	2	64

A distribuição de frequências das árvores segundo os diâmetros comportou-se como a distribuição normal, porém apresentando uma ligeira influência dos cortes anteriormente executados.

Segundo GINRICH (2), não só a espécie, como também a intensidade de crescimento e os tratos culturais, constituem os fatores que exercem influência sobre a distribuição de frequências das árvores. Atualmente, para uma rápida análise destes tipos de distribuições, utiliza-se a denominada distribuição Beta; ZÖHRER (9) e empregada por KENNEL (3) na construção de tabelas de rendimento.

Escolha das funções estudadas - Inúmeros são os modelos matemáticos propostos por vários pesquisadores como PRODAN (4), CURTIS (1) e SCHMIDT (5), com o objetivo de descrever as relações funcionais entre os diâmetros e as alturas das árvores.

HONENALD (citado por PRODAN (4)) verificou que a dispersão das alturas sobre os diâmetros, em povoamentos equianos, quase sempre se comportava como uma parábola do segundo grau. Apesar deste fato, procurou-se, neste trabalho, investigar outros modelos como, por exemplo, as equações logarítmicas e funções exponenciais que pudessem também ajustar os dados, conforme indica a Tabela 2.

Estimativa dos volumes - Para a estimativa dos volumes individuais do pinheiro brasileiro, inicialmente, calculou-se todos os valores formas artificiais ($f_{1,3}$) em função da média aritmética dos verdadeiros fatores ($\lambda_{0,9}$) e dos quocientes de HOHENADL (gH). A razão fundamental para tais estimativas reside no fato da cubagem dos troncos ter sido executada em apenas 10 árvores. O cálculo dos diâmetros relativos, segundo o procedimento de HOHENADL, assim como os fatores de formas reais, foram estimados para estas 10 árvores,

Tabela 2. Modelos matemáticos usados para definir a relação entre h e d.

MODELO Nº	EQUAÇÕES
1	$h = a + b \cdot d$
2	$h = a + b \cdot d + c \cdot d^2$
3	$h = a + b \cdot \ln d$
4	$h = a' \cdot e^{bd}$ ou $\ln h = a + b \cdot d$
5	$h = a' \cdot e^{b/d}$ ou $\ln h = a + b/d$
6	$h = a' \cdot e^{(b \cdot \ln d)}$ ou $\ln h = a + b \cdot \ln d$
7	$h = a' \cdot e^{b/d + 1,3}$ ou $\ln(h-1,3) = a + b/d$

d = Diâmetro à altura do peito em centímetros

h = Altura total em metro

usando-se um programa FORTRAN especial. Para o cálculo dos volumes individuais e estimativas do volume total do povoamento foram estabelecidas as seguintes relações:

$$d_{0,9} = a_0 + a_1 (d)^2 \dots\dots\dots 8$$

d = Diâmetro à altura do peito (cm)

Onde: $d_{0,9}$ = Diâmetro à 0,9 h a contar do ápice (cm)

a_0, a_1 = Coeficientes de regressão

Com base nesta relação calculou-se os fatores de formas artificiais usando-se a seguinte expressão:

$$f_{1,3} = \bar{\lambda}_{0,9} / (gH)^2 \dots\dots\dots 9$$

Onde: $gH = d/d_{0,9}$

Os volumes individuais foram estimados pela seguinte expressão:

$$v = \pi / 4 \cdot DAP^2 \cdot \hat{h} \cdot f_{1,3} \dots\dots\dots 10$$

\hat{h} = Altura estimada pela equação 6

Onde: $f_{1,3}$ = Fator forma artificial ou simplesmente f

A estimativa do erro médio casual cometido nos cálculos volumê

tricos foi efetuada segundo as investigações de TISCHENDORF (8), baseadas na "Lei de propagação dos erros". Estes mesmos princípios foram, posteriormente, empregados por STERBA (6 e 7) para deduzir o erro médio casual, oriundo da aplicação de uma equação para a estimativa das alturas das árvores dominantes do povoamento.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Precisão das estimativas das alturas - Para a análise comparativa dos resultados contidos na Tabela 3 foi necessário preparar um programa especial para o cálculo correto do desvio padrão de regressão das equações 3-7. Com base nestes resultados verificou-se que as equações 2, 3 e 6 forneceram os menores erros de estimativas. O mais elevado coeficiente de determinação foi, entretanto, alcançado pela equação 6. Esta equação corresponde à função de KORSUN sem o membro quadrado.

A parábola (eq. 2) forneceu o menor desvio padrão de regressão porém uma coeficiente de determinação ligeiramente menor que a equação 6.

Igualmente, o modelo 3 apresentou um coeficiente de determinação ligeiramente maior (1 cm) que a parábola.

Os maiores erros sistemáticos foram verificados pelas equações 4 e 7, estimados em aproximadamente 3 cm.

Esta estimativa correspondeu a uma subestimação das alturas. A equação 6, por outro lado, subestimou as alturas em 2 cm. Este erro sistemático de apenas - 0,02 m, cometido nas estimativas das alturas, foi realmente pequeno, sendo satisfatório para os objetivos deste trabalho. A equação parabólica forneceu um DAP máximo aproximadamente igual a 43 cm, isto é, atingiu o máximo valor na parte exterior da amplitude dos dados, podendo, portanto, ser ainda utilizada.

Análise dos erros casuais cometidos nas estimativas volumétricas Para estimativa dos erros casuais foram utilizadas as equações 6, 8, 9 e 10, anteriormente referidas. Segundo a fórmula 10, verificou-se que os erros que atuavam sobre a determinação dos volumes individuais eram causados pelas estimativas das alturas (h), dos diâmetros ($d_{0,9}$) e pelo fator de forma médio ($\bar{\lambda}_{0,9}$). Para a equação 8 estimou-se os coeficientes $a_0 = 0,4055$ e $a_1 = 0,9777$ com um erro padrão de regressão ($sd_{0,9}$) aproximadamente igual a 0,20 cm.

O erro padrão de regressão relativo ao fator de forma real (s_{λ}) foi aproximadamente igual a 0,026 e o fator médio ($\bar{\lambda}$) igual a 0,5719.

A equação 6 (Tabela 3) apresentou um erro (s_h) de 0,78 m. A derivação parcial das funções para investigar a magnitude dos erros

Tabela 3. Estimativas das equações para definir a relação entre h e d, referente ao povoamento de Pinheiro Brasileiro - Passo Fundo - RS.

MODELO Nº	COEFICIENTES DE REGRESSÃO	COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO	ERRO PADRÃO DE ESTIMATIVA	SIGNIFICÂNCIA
1	8,2000 0,28078	0,757	0,80	***
2	6,1076 0,51112 -0,0059054	0,773	0,77	***
3	-1,2237 5,0745	0,767	0,78	***
4	2,1954 0,021156	0,746	0,83	***
5	2,9432 -6,1183	0,746	0,81	***
6	1,4732 0,38657	0,776	0,78	***
7	2,8801 -6,8111	0,750	0,81	***

*** Significância a nível de 0,1%

casuais, de acordo com a lei de propagação dos erros, forneceu as seguintes expressões gerais:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2 \cdot \frac{s^2 \lambda}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial d_{0,9}}\right)^2 \cdot s^2 d_{0,9}} \dots\dots\dots 11$$

$$s_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)^2 \cdot s^2 h + \left(\frac{\partial v}{\partial f}\right)^2 \cdot s^2 f} \dots\dots\dots 12$$

Onde: s_f = Erro padrão dos fatores formas artificiais
 s_v = Erro padrão dos volumes individuais
 n = Número de árvores cubadas

Substituindo-se a expressão 11 e as derivadas parciais das funções 9 e 10 na expressão 12, obteve-se a seguinte fórmula:

$$s_v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\hat{f} \cdot s^2 h + \hat{h} \left[(d_{0,9}/d)^2 \cdot \frac{s^2 \lambda}{n} + \frac{2 \cdot \lambda \cdot d_{0,9}}{d^2} \cdot s^2 d_{0,9} \right]} \dots 13$$

As derivações parciais da fórmula 9 em função de λ e $d_{0,9}$, assim como as derivações parciais da fórmula 10 em função de h e f , foram substituídas na expressão geral da lei da propagação dos erros, a fim de se obter o erro cometido nas estimativas dos volumes individuais, causado pela cubagem de diferentes números de árvores. O erro causal médio foi calculado através do somatório das variâncias individuais de cada árvore.

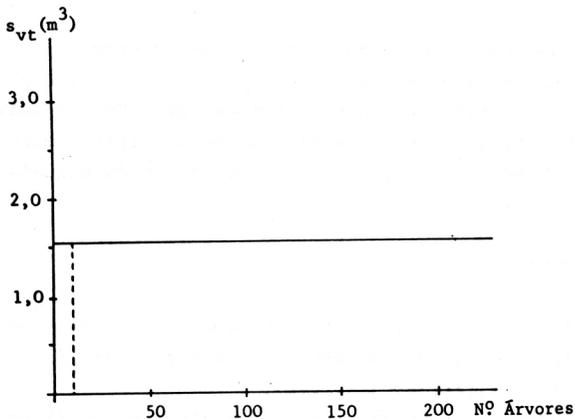


Figura 1. Erro casual médio em volume

Baseado neste resultado determinou-se um erro médio de $\pm 7,665$ m^3/ha , correspondente a um volume total em pé de $264,3035 m^3/ha$ sobre casca. Em outras palavras, o volume deste povoamento, ficou compreendido entre os limites de $264,3035 \pm 15,0234 m^3/ha$ para um nível de 95% de probabilidade. O erro cometido correspondeu, portanto a $\pm 5,8\%$ do volume total do povoamento. Verificou-se também, que o aumento do número de árvores (>10) para a determinação dos valores de $d_{0,9}$ e $\lambda_{0,9}$, referentes a este povoamento, não ofereceu substancialmente nenhuma vantagem prática, pois a precisão estatística nos cálculos volumétricos foi praticamente constante (Figura 1).

CONCLUSÕES

1. A equação de regressão calculada em função do logarítmo das alturas e dos diâmetros apresentou melhores resultados.
2. Esta função apresentou um erro sistemático de $-0,02$ m, subestimado as alturas.
3. O volume total, em pé, sobre casca foi estimado em $264,3035 m^3/ha$ para um povoamento com 17 anos de idade.
4. O erro médio casual em volume, estimado em função da lei de propagação dos erros, foi de $7,665 m^3/ha$, correspondendo a $5,8\%$ do volume total do povoamento.
5. A cubagem de um número de árvore > 10 para a determinação dos valores de $d_{0,9}$ e $\lambda_{0,9}$ não apresentou nenhum significado prático.
6. Constatou-se a falta de tabelas de rendimento para a definição do estoque de crescimento e estimativa dos incrementos.

AGRADECIMENTOS

Para o desenvolvimento dos cálculos estatísticos deste trabalho ficam registrados os nossos agradecimentos ao "Dozent Dipl. Ing. Dr. HUBERT STERBA, Institut f. fortl. Ertragslehre, Universität f. Bodenkultur" em Viena, pelo seu assentimento em permitir o manuseio dos programas FORTRAN IBM-1130, durante a nossa estada naquela Instituto.

LITERATURA CITADA

1. CURTIS, R. O. - Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-Firs. *For. Sci.*, Portland Oreg., 13(4):365-375, 1967.
2. GINRICH, S. F. - Measuring and evaluating stocking and stand density in upland hardwoods forests in the Central States.

-
- For. Sci.*, Columbus, Ohio, 13(1):38-45, 1967.
3. KENNEL, R. - Die Konstruktion von Ertragstafeln mit Hilfe von Durchmesserverteilung und Einheitshöhenkurven. *Forstw. Cbl.* München, 90(2):117-128, 1971.
 4. PRODAN, M. - *Holzmesslehre*. Frankfurt a. Main, Sauerländer's Verlag. 1965, 644 p.
 5. SCHMIDT, A. - Der rechnerische Ausgleich von Bestandeshöhenkurven. *Institut f. Ertragskunde d. Forstliche Forschungsanstalt.* München, 370-381, 1967.
 6. STERBA, H. - Einige Bemerkungen zu den Fehlern bei Verwendung der Einheitshöhenkurven. *Institut f. Forstl. Ertragslehre d. Hochschule f. Boku.* Wien, 3 p. 1974.
 7. STERBA, H. - Fehlerstudie zur "Stammkubierung mit dem Telere-laskop". *Cbl. f. d. Gesamte Forstwesen.* Wien, 93(1):39-61, 1976.
 8. TISCHENDORF, W. - Die Genauigkeit von Messungsmethoden und Messungsergebnissen bei Holzmassenermittlungen. *Forstw. Cbl.*, Wien, 317-333, 1925.
 9. ZÖHRER, F. - Ausgleich von Häufigkeitsverteilungen mit Hilfe der Beta-Funktion, *Forstarchiv*, Hannover, 40(3):37-42, 1969.