ANÁLISE, RESOLUÇÃO E APLICAÇÃO DA CURVA LOGÍSTICA NA DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS DE CRESCIMENTO.

Logistic curve analysis, resolution and application on Description of Growth process.

José Otero* e Felix Beltramino**

RESUMO

Realiza-se uma análise da Curva Logística e propõe-se a sua resolução mediante um programa de computação em linguagem Fortran IV.

O Programa baseia-se na linearização do algoritmo logístico mediante regressão linear simples. Desta maneira estimam-se dois dos três parâmetros necessários. O terceiro parâmetro é estimado utilizando-se um método interativo de cálculo.

Apresenta-se um exemplo resolvido aplicado ao crescimento de uma pastagem.

SUMMARY

Logistic Curve Analysis is performed and its resolution with a computer program in Fortran IV lenguaje proposed.

The program is based on linearization of logistic algorithm of linear regression. Thus, two out of three needed parameters are estimated. The third parameter is estimated through the utilization of a interative method of calculation.

A resolved problem applied to a pasture growth is presented.

INTRODUÇÃO

Considerando-se o aspecto biológico do crescimento de uma pastagem ou de um animal e tratando-se de quantificá-lo, deparamo-nos com o problema de encontrar uma equação que expresse o crescimento do ser vivo ao longo de um determinado espaço de tempo. MORLEY (3) e FERNANDEZ (2), analizaram o comportamento de distintos tipos de equações, testando modelos de tipo linear, exponencial, logístico e de Mitscherlich.

A equação linear simples que corresponde ao modelo

$$W_{(t)} = W_o + K\,T,$$

Onde $W_{(t)}$ = Variável dependente

* M.S. Professor Assistente do Deptº de Zootecnia da UFSM.
** M.S. Pesquisador do I.N.T.A. - Rafaela, Argentina.

t = Variável independente

W_o = Ordenada na origem

K = Coeficiente de regressão

pressupõe um crescimento constánte por unidade de tempo.

A equação exponencial do tipo

$$W_{(t)} = W_o + e^{K\,t}$$

onde e = base dos logaritmos Neperianos,

leva em consideração, que a taxa de crescimento varia em função do tempo.

Analizando-se estes dois tipos de equações conclui-se que as mesmas são ajustadas ao desenvolvimento dos fenômenos vitais apenas em certos períodos da vida, pois, não pressupõem que o crescimento atinja um nível máximo após o qual torna-se constante.

A situação de crescimento constante é solucionada aplicando-se a equação de Mitscherlich, cuja função tem a seguinte expressão:

$$W_{(t)} = W_{max} (1 - B\,e^{-Kt})$$

A taxa de crescimento tende a zero quando a função aproxima-se do valor máximo (W_{max}).

A equação de Mitscherlich é adequada aos últimos estádios da Curva de crescimento biológico, porém, sua característica de crescimento constantemente decrescente não serve para representar os primeiros estádios de uma função de crescimento animal ou vegetal.

Assim sendo, devemos levar em consideração a curva logística, também denominada sigmoide, cujo modelo é:

$$W_{(t)} = \frac{W_{max}}{1 + B\,C^{-Kt}}$$

A primeira etapa da curva representada por esta função é de tipo exponencial crescente até que o crescimento relativo se faz máximo; a partir daí, a taxa de crescimento diminui e faz com que o crescimento tornando-se cada vez mais lento, faz com que a taxa tenda a zero e a curva estabilize-se nas proximidades do valor máximo (W_{max}).

O comportamento desta função é semelhante ao crescimento de uma pastagem anual desde a germinação até a maturação da semente, ou de um animal desde a concepção ao estado adulto.

O objetivo deste trabalho é a utilização de um programa de computação realizado em linguagem Fortran IV, o qual permite a partir dos valores das variáveis independente (x) e dependente (y), esti mar os valores de W_{max}, B y K a serem utilizados na equação logística.

Análise da Curva Logística - A equação da curva logística de crescimento pode derivar-se da seguinte maneira:

$$\frac{dW}{dt} = (K - C\,W)\,W$$

onde K = constante que representa a taxa total de crescimento
C = constante que restringe o crescimento a medida que W aumenta

Se o fator C W restringe o crescimento, tem que existir um valor de W no qual a taxa de crescimento é zero. Assim,

$$\frac{d\,W}{d\,t} = 0$$

e $$K - C\,W_{max} = 0$$

Onde $$W_{max} = W \text{ máximo}$$

Isto determina que C possa ser expresso em termos de K e W_{max}:

$$C = \frac{K}{W_{max}}$$

A equação diferencial fica então transformada em:

$$\frac{d\,W}{d\,t} = K\,W\,(1 - \frac{W}{W_{max}})$$

e $$dt = \frac{W_{max}}{K} \times \frac{d\,W}{W\,(W_{max} - W)}$$

Integrando a equação tem-se que:

$$t = \frac{1}{K} \ln W - \ln (W_{max} - W) + e$$

Onde e = base dos logaritmos neperianos
ln = logaritmo neperiano

A constante K pode ser avaliada pela condição

$$t = 0$$

$$W = W_{inicial}$$

e assim expressar a equação na sua forma exponencial

$$e^{-Kt} = \frac{W_o (W_{max} - W)}{W (W_{max} - W_o)}$$

onde $W_o = W_{inicial}$

de onde, substituindo-se W, tem-se

$$W = \frac{W_{max}}{1 + B e^{-Kt}}$$

onde

$$B = \frac{W_{max} - W_o}{W_o}$$

Para maiores detalhes sobre a derivação da curva logística consulte-se NELDER (4).

Observando-se o desenho da curva logística e o tipo de crescimento que descreve, (Figura 1) podemos classificar este crescimento em três partes:

A primeira parte representa o crescimento do tipo exponencial, o qual aumenta com o tempo até atingir a um máximo. No segundo estádio, a taxa de crescimento decresce à medida que W tende ao valor máximo (W_{max}); e, finalmente, no último estádio o crescimento tende a ser constante.

Fazendo-se coincidir a taxa de crescimento relativo com a curva de crescimento, o momento em que a taxa de crescimento é máxima corresponde ao ponto de inflexão da curva logística.

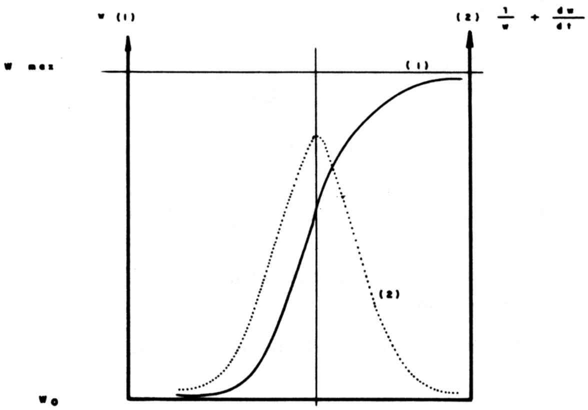

FIGURA 1 · CURVA LOGISTICA (1), E SUA TAXA DE CRESCIMENTO RELATIVA (2)..

Método para a resolução da Curva Logística - Para estimar-se os valores de K, B e W_{max}, utilizam-se os algoritmos de regressão linear simples, para ajustar a curva logística. Estes algoritmos são aplicáveis somente a funções que mediante transformações adequadas podem ser linearizadas.

No caso da Curva Logística, isto é obtido pela transformação:

$$W = \frac{W_{max}}{1 + B e^{-Kt}}$$

em que:

$$W = \frac{1}{A + B e^{-Kt}}$$

tal que:

$$W' = \frac{1}{W} = A + B e^{-Kt}$$

Obtemos assim uma equação com três incógnitas (A, B, e K).

O seguinte passo é transformar:

$$X' = e^{-Kt}$$

Onde, atribuindo-se um valor inicial $K = K_o$ obtemos um modelo linear com dois parâmetros a estimar, sendo então o modelo:

$$W' = A + B X'$$

o qual corresponde a equações do tipo

$$Y = B_o + B_1 X$$

Desde que X' é função de uma outra incógnita (K), utiliza-se o método interativo de cálculo, descrito por FERNANDEZ (2), para distintos valores de K.

O método consiste em dar um valor inicial a K, estimado, mediante regressão linear, A e B, e mediante correlação, o coeficiente de determinação R^2.

Logo incrementa-se K em uma quantidade definida tal que:

$$K_i = K_{i-1} + K$$

Com o novo valor de K_i obtem-se os valores de A, B e R^2, e assim procede-se sucessivamente.

Em cada interação compara-se o valor obtido de R^2 com o anterior. Resultando iguais dentro de uma predição dada, o processo in terrompe-se; caso contrário, continua.

Com base neste esquema desenvolve-se um programa de computação introduz-se no programa um artifício matemático que permite uma primeira aproximação do valor $K_{inicial}$ (Cahuepe, Miguel*). Este artifício consiste em:

- determinar o valor correspondente a 90% de $W_{max} = W_i$
- encontrar o valor mais próximo da variável independente (t) que corresponda a W_i
- o valor $K_{inicial}$ se faz igual a :

$$K_o = \frac{M}{t_i}$$

Onde $K_o = K_{inicial}$

M = fator de transformação dos logaritmos naturais em decimais.

A taxa de incrementos (ΔK), pode ser fixada arbitrariamente em cada modelo, mas isto implica em trocar este valor cada vez que são modificados os dados. Por tal motivo o valor de ΔK **é fixado** em função do valor K_o calculado pelo programa, como um percentual do mesmo.

Uma das condições do método interativo é que o algoritmo seja convergente. Levando-se em conta que entre R^2 e K existe uma relação de tipo:

$$R^2 = a_1 K - a_2 K^2,$$

encontraremos uma zona de valores de K nos quais esteja compreendido o valor de R^2 máximo. Esta zona dependerá da diferença entre dois R^2 sucessivos, determinados por sua vez pelos valores de ΔK, e da sensibilidade do modelo.

Pode acontecer que a diferença entre dois R^2 consecutivos seja positiva, o que nos indica que o algoritmo não é convergente. Em tal situação o modelo transforma ΔK em $- \Delta K$, tornando o algoritmo novamente convergente.

Solucionado o fato da convergência, pode acontecer que o modelo não apresente solução se formos muito exigentes quanto a sensibilidade. Isto é solucionado fazendo-se com que os valores de ΔK sejam percentualmente muitos pequenos, entretanto, esta situação prolongaria o tempo de computação. Por outro lado, pode-se dividir o valor de ΔK por dois ao passar ΔK de positivo para negativo, ou vice-versa, operação esta que pode ser expressa por:

* Comunicação Pessoal.

$$- \Delta K_1 = \frac{\Delta K_i - 1}{2}$$

desta maneira é possível atender a sensibilidade de qualquer modelo sempre que não seja esgotada a capacidade de sensibilidade do computador.

Diagrama de Fluxo e Especificações do Programa - (Figura 2).

a. O primeiro cartão de dados deve conter a variável N, a qual especifica a quantidade de pares de observações X e Y a serem introduzidos. O formato de leitura e I 4.

b. Os seguintes cartões de dados correspondem às variáveis X e Y perfuradas uma X e uma Y por cartão, nesta ordem, e com formato F 6.0.

c. A equação logística é:

$$Y = \frac{M}{1 + B e^{-Kx}}$$

a qual transformamos em:

$$Y = \frac{1}{A + B e^{-Kx}}$$

e resolvemos como:

$$Y' = \frac{1}{Y} = A + B x'$$

onde:

$$x' = e^{-Kx}$$

Os valores de saída são:

BO = A

B1 = B

K = K

d. A dimensão do programa está determinada pelo valor de N. O programa está dimensionado para $N \leqslant 100$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o objetivo de exemplificar o funcionamento do programa determinaremos uma equação que descreva o crescimento de uma pastagem em função do tempo.

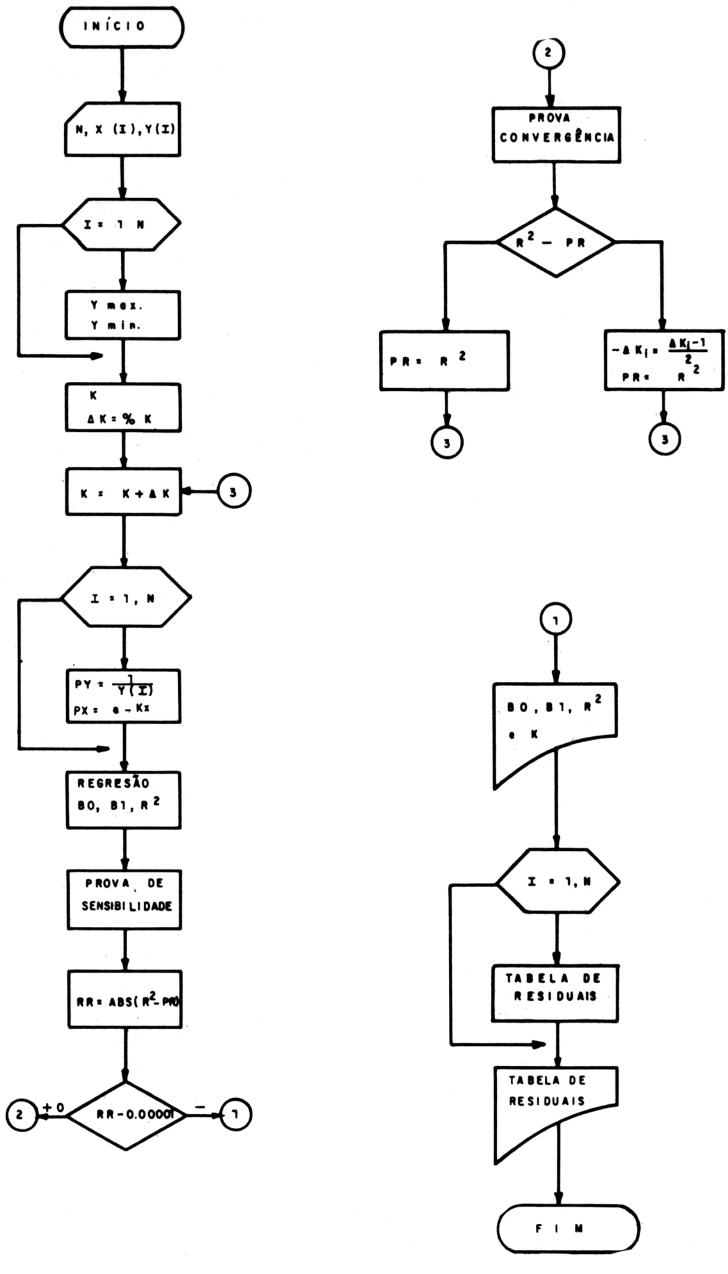

FIGURA 2 DIAGRAMA DE FLUXO DO PROGRAMA DA CURVA LOGÍSTICA

A informação foi tomada de um trabalho desenvolvido por BROU GHAM (1) sobre uma pastagem de azevem (*Lolium multiflorum*), onde é expresso o rendimento da pastagem em Kilogramas de matéria seca por hectare, em função de semanas de crescimento. Ditos dados encontram-se na Tabela 1.

A justificativa de tentar-se ajustar estes dados a uma Curva Logística não é explicada somente por um objetivo matemático como também biologicamente e baseada na teoria do crescimento de organismos multicelulares (WAREING e PHILLIPS, 5).

Os resultados encontrados no modelo proposto foram os seguintes:

$$K = 0.614$$

$$BO = 0.00052$$

$$B1 = 0.01752$$

De onde a equação passará a ser:

$$Y = \frac{1}{0.00052 + 0.01752\ e^{-0.614\ X}}$$

onde Y = rendimento em Kg de matéria seca por ha.

X = tempo em semanas

Na Figura número 3 pode-se visualizar os dados observados e os calculados.

Podemos observar na **Figura** 1 que, muito embora o ajuste não é perfeito, fica caracterizada uma boa aproximação. Apresenta-se, por outro lado, a vantagem de permitir estimar-se distintas etapas do crescimento de uma pastagem com somente uma equação.

Tabela 1. Crescimento da pastagem. (Adaptado de BROUGHAM, 1).

SEMANAS DE CRESCIMENTO	MATÊRIA SECA EM Kg por Ha.
1	100
3	300
6	1200
9	1680
12	1780
15	1800
18	1810

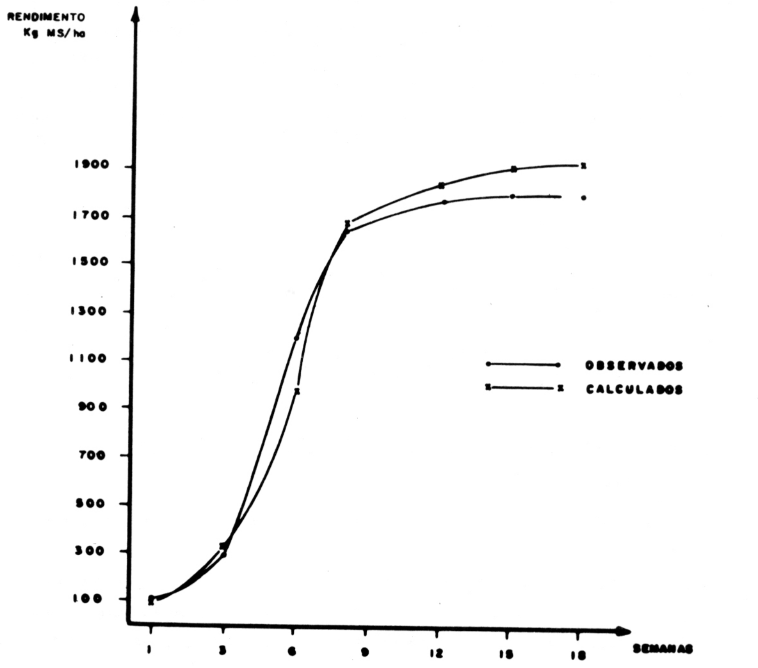

FIGURA 3 - CRESCIMENTO DA PASTAGEM - DADOS OBSERVADOS (•——•) e CALCULADOS (x——x)

CONCLUSÕES

A linearização da curva logística e sua resolução mediante regressão linear, utilizando-se o método interativo para estimar o coeficiente K, permite calcular satisfatoriamente os parâmetros da equação logística.

AGRADECIMENTOS

Os autores desejam manifestar o seu agradecimento à Engª Agrº Cristina Miquel e ao Engº Agrº José Henrique Souza da Silva pela correção dos manuscritos.

LITERATURA CITADA

1. BROUGHAM, R. W. - Factors Limiting Pasture Production. *Proceeding of the New Zealand Society of Animal Production*. 21: 33-46, 1961.
2. FERNANDEZ, H. - Modelos Analíticos . *Escuela para Graduados en Ciencias Agropecuarias*. Balcarce, 1975, 15 p. (mimeografado).
3. MORLEY, F. - Growth Equations. *Escuela para Graduados en Ciencias Agropecuarias*. Balcarce, 1973, 9 p. (mimeografado).
4. NELDER, J. A. - The fitting of a generalization of the logistic curve. *Biometrics*. 17:88-89, 1961.
5. WAREING, P. F. e PHILLIPS, I. D. J. - *The control of growth, and differentiation in plants*. Ed. G. F. Asprey e A. G. Lyon. Pergamon Press. 1973, 303 p.