

## Nota Técnica

# Sistemas de equações utilizados na construção de diagramas de manejo da densidade de povoamentos de teca

Equation systems used in the construction of density management diagram of teak stocks

João Paulo Sardo Madi<sup>i</sup>  
Samuel de Pádua Chaves e Carvalho<sup>ii</sup>  
Rômulo Môra<sup>iii</sup>  
Natalino Calegario<sup>iii</sup>

<sup>i</sup>Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

<sup>ii</sup>Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, Brasil

<sup>iii</sup>Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brasil

## RESUMO

O estudo teve por objetivo avaliar sistema de equações utilizados na construção de diagramas de manejo de densidade. Os dados foram coletados em plantios clonais de teca na região centro-sul do estado de Mato Grosso. A idade de medição do plantio variou de um a oito anos, sendo que os dados foram coletados em parcelas circulares com área de 359 m<sup>2</sup> a 616 m<sup>2</sup>. Das árvores que compuseram as unidades amostrais foram mensurados o diâmetro a altura do peito e a altura total. O volume foi calculado a partir da cubagem de 827 das árvores pelo método de Smalian. Dois sistemas de equações foram utilizados para a realização do estudo e a avaliação da precisão do ajuste foi realizada através das estatísticas: erro padrão residual (RMSE); erro padrão em escala percentual (RMSE<sub>%</sub>); coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) representado pelo coeficiente de correlação ao quadrado ( $r^2_{xy}$ ); resíduos em escala percentual (Resíduo (%)); e análise gráfica do perfilhamento dos parâmetros. O sistema de equações que obteve melhor resultado foi o proposto por Dean e Baldwin, com valores de 0,9942 a 0,9994, e de 2,88 a 1,84, em relação ao outro sistema que apresentou 0,9558 a 0,9539, e 13,94 a 7,99 para as estatísticas do R<sup>2</sup> e RMSE (%), respectivamente. A distribuição dos resíduos do sistema de Dean e Baldwin foram também superiores, corroborando os resultados das análises estatísticas. Os resultados deste trabalho permitem inferir que o sistema de equações proposto por Dean e Baldwin é mais preciso, e, portanto, o indicado na elaboração de diagramas de manejo da densidade populacional em povoamentos clonais de teca.

**Palavras-chave:** Equações simultâneas; Precisão estatística; Manejo Florestal

## ABSTRACT

---

The aim objective of study was to evaluate the system of equations used at the construction of density management diagrams. The data was collected at clonal stands of teak in the southern-central region of Mato Grosso state, Brazil. The ages of the stand varied between one and eight years, where the measures were taken in circular plots. The plots had areas varying from 359 to 616 m<sup>2</sup>. The diameter at breast height and total height were measured from the trees that composed the plots. The volume was calculated in 827 trees by the Smalian's method. Two systems of equation were used to carry this study out and the evaluation of the fit was made by the statistics: root mean square error (RMSE); percentage of root mean square error (RMSE (%)); coefficient of determination (R<sup>2</sup>) represented by the squared correlation coefficient ( $r^2_{xy}$ ); residuals in the percentage scale (residual (%)); and graphical analysis of the parameter fittings. The system of equation that obtain the best results was the proposed by Dean and Baldwin, with the statistic R<sup>2</sup> between 0,9942 - 0,9994, and RMSE (%) 2,88 - 1,84, regarding the other system that presented 0,9558 - 0,9539 and 13,94 - 7,99 to the statistics R<sup>2</sup> and RMSE (%), respectively. The distribution of residues from the Dean and Baldwin system were also superior, corroborating the results of the statistical analyzes. The results of this work allow us to infer that the system of equations proposed by Dean and Baldwin is more accurate, and, therefore, the one indicated in the development of population density management diagrams in clonal teak stands.

**Keywords:** Simultaneous equations; Statistical precision; Florestal management

## 1 INTRODUÇÃO

A indústria madeireira apresenta uma crescente necessidade de matéria-prima de qualidade para suprir suas demandas (WEBER *et al.*, 2013). Portanto, segundo os mesmos autores, para que isso aconteça há uma necessidade de se realizarem estudos científicos com enfoque nas técnicas de manejo que venham resultar em maior retorno econômico. Desse modo, no manejo florestal de povoamentos equiâneos, se faz necessário o conhecimento das inter-relações entre a densidade do plantio e o desenvolvimento do diâmetro no tempo, para se programarem atividades como o desbaste, para que sua aplicação ocorra em uma intensidade de acordo com a capacidade produtiva do local e o ritmo de crescimento da espécie (SCHNEIDER *et al.*, 2009).

Muitos dos povoamentos florestais foram conduzidos de maneira empírica, o que acarretou na produção de madeiras de baixa qualidade e a perda das mesmas por mortalidade através da competição entre as árvores dos povoamentos (RETSLAFF *et al.*, 2016).

Nas últimas décadas foram aprimoradas ferramentas na área do manejo florestal para obtenção de informações acerca da densidade do plantio, sendo uma dessas ferramentas o diagrama de manejo de densidade (DMD) (MINOCHE *et al.*, 2017). Segundo Cabrera-Pérez *et al.* (2019), por meio dessa ferramenta possibilita-se um eficiente manejo no controle da densidade do povoamento.

O desenvolvimento desses diagramas facilita a tomada de decisão do manejo da densidade de um povoamento, uma vez que este é um processo complexo pela quantidade de opções de tratamentos disponíveis a serem aplicadas (CASTEDO-DORADO *et al.*, 2009). Porém, para a construção dos DMD's, há a necessidade de uma grande quantidade de informações (GYENGE *et al.*, 2019), que contemple as variáveis relacionadas à produção ao longo do tempo, bem como a sua densidade e mortalidade.

Os DMD's representam graficamente a produção, densidade e mortalidade nos vários estágios de desenvolvimento do plantio, por meio da relação entre o número de árvores por hectare (N), altura dominante (hd), volume do povoamento (V) e diâmetro médio quadrático (dg). Concordando com Selle *et al.* (2010), que com emprego dessas relações dendrométricas torna-se possível elaborar importantes ferramentas para a condução do povoamento.

Essas relações dendrométricas podem ser traduzidas em modelos matemáticos, que geralmente são representados por modelos que são ajustados simultaneamente, como o proposto por Dean e Baldwin (1993). Esses modelos relacionam o N, dg, V e hd, podendo estar na forma não linear ou linearizada. A partir do ajuste desses modelos pode-se criar curvas das variáveis contidas nos modelos, representando o comportamento destas ao longo dos estágios de desenvolvimento do povoamento.

Dado o exposto, o estudo teve por objetivo avaliar sistema de equações utilizados na construção de diagramas de manejo de densidade, a partir de dados coletados na região centro-sul do estado de Mato Grosso em um povoamento clonal de *Tectona grandis* L. f.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

### 2.1 Área de estudo

Os dados foram coletados em plantios comerciais clonais de *Tectona grandis*, L. f com área de total 3.078,34 ha, localizadas na região Centro-Sul do estado do estado de Mato Grosso (Figura 1).

Figura 1 – Localização da área de estudo



Fonte: Autores (2020)

A região apresenta altitudes variando entre 100 m a 200 m, temperatura média, máxima e mínima com valores 25,4°C, 32,9°C, 20,9°C, respectivamente, pluviosidade total anual com variação entre 1300 mm -1400 mm (MATO GROSSO, 2011). Segundo Pandey e Brown (2000), as condições ideais para o cultivo de teca são de precipitação variando entre 1250 mm a 3750 mm, com temperaturas mínimas variando entre 13°C a 17°C e máximas entre 39° a 43°C, em locais de solo profundo, permeável, com razoável capacidade de retenção hídrica e fertilidade mediana a fértil.

Segundo a classificação de Köppen, o clima da região é classificado como Aw, verão chuvoso com período de seca no inverno (ALVARES *et al.*, 2013).

## 2.2 Base de dados

Os dados foram originados de plantios clonais de teca com idade de medição variando ente 1 a 8 anos, sendo o plantio mais antigo implantado no ano de 2004. Os espaçamentos dos plantios variaram de 10 x 10 m, 3 x 3 m, 4 x 2,5 m, 4 x 3 m, e 4 x 4 m. Os dados foram coletados em unidades amostrais circulares, em um total de 587 unidades, com área variando de 359 m<sup>2</sup> a 616 m<sup>2</sup>. Das árvores que compuseram as unidades amostrais foram mensurados o diâmetro a altura do peito e a altura total.

Para compor a base de volume, 827 árvores foram cubadas rigorosamente por métodos destrutivos e também em pé com um dendrômetro óptico (Criterion RD 1000), amostradas a partir de uma distribuição diamétrica com intervalos de 2 cm e duas árvores por classe de diâmetro.

## 2.3 Modelos estatísticos

Dois sistemas de equações foram avaliados. O primeiro foi proposto por Dean e Baldwin (1993) (Eq. 1 e 2):

$$dg_{ij} = \beta_0 N_{ij}^{\beta_1} V_{ij}^{\beta_2} + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$V_{ij} = \beta_3 dg_{ij}^{\beta_4} hdom_{ij}^{\beta_5} N_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

em que:  $dg_{ij}$  = diâmetro médio quadrático da  $i$ -ésima unidade amostral (cm) no tempo  $j$ ;  $V_{ij}$  = volume da  $i$ -ésima unidade amostral (m<sup>3</sup>/ha) no tempo  $j$ ;  $N_{ij}$  = número de plantas por ha da  $i$ -ésima unidade amostral no tempo  $j$ ;  $hdom_{ij}$  = altura dominante da  $i$ -ésima parcela no tempo  $j$ ;  $\beta_i$  = coeficiente a ser estimado;  $\varepsilon_{ij}$  = erro aleatório.

O segundo sistema de equações é de autor desconhecido, porém utilizado em muitos trabalhos, observado através das pesquisas de literatura (Eq.3 e 4), sendo que a Eq. 4 teve que ser adaptada:

$$dg_{ij} = \beta_0 N_{ij}^{\beta_1} hdom_{ij}^{\beta_2} + \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

$$V_{ij} = \beta_3 dg_{ij}^{\beta_4} hdom_{ij}^{\beta_5} N_{ij} + \varepsilon_i \text{ (adaptado)} \quad (4)$$

em que:  $dg_{ij}$  = diâmetro médio quadrático da  $i$ -ésima unidade amostral (cm) no tempo  $j$ ;  $V_{ij}$  = volume da  $i$ -ésima unidade amostral (m<sup>3</sup>/ha) no tempo  $j$ ;  $N_{ij}$  = número de plantas por ha da  $i$ -ésima unidade amostral no tempo  $j$ ;  $hdom_{ij}$  = altura dominante da  $i$ -ésima parcela no tempo  $j$ ;  $\beta_i$  = coeficiente a ser estimado;  $\varepsilon_{ij}$  = erro aleatório.

## 2.4 Metodologia de ajuste e análise estatística

O ajuste dos modelos e as estatísticas calculadas foram realizadas no software R (R CORE TEAM, 2017). Os ajustes foram realizados por meio da função *nls*.

Para a avaliação dos modelos, foram utilizadas as seguintes estatísticas: erro padrão da estimativa (RMSE) (Eq.5); erro padrão da estimativa em escala percentual (RMSE<sub>%</sub>) (Eq.6), o coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) representado pelo coeficiente de correlação ao quadrado (r<sup>2</sup><sub>xy</sub>) (Eq. 7), os resíduos em escalas percentuais (Resíduo(%)) (Eq. 8) que foram analisados graficamente, e a análise gráfica do perfilhamento dos parâmetros, na qual utilizou-se o pacote *bbmle* (BOLKER; R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2017). Segundo Bolker (2008), a análise de perfilhamento de parâmetros é indicada em trabalhos com ajustes de modelos não lineares, a fim de demonstrar a convergência dos parâmetros do modelo ajustado.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p-1}} \quad (5)$$

$$\text{RMSE}_{\%} = \frac{\text{RMSE}}{\bar{y}} 100 \quad (6)$$

$$R^2(\%) = \frac{\left[ \sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i - \frac{(\sum_{i=1}^n \hat{y}_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n} \right]^2}{\left[ \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right] \left[ \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \hat{y}_i)^2}{n} \right]} 100 \quad (7)$$

$$\text{Resíduo}(\%) = \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} 100 \quad (8)$$

em que:  $y_i$  = valor observado;  $\hat{y}_i$  = valor estimado;  $\bar{y}$  = valor observado médio;  $n$  = número de observações;  $p$  = número de parâmetros.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Tabela 1 resume as estimativas dos parâmetros bem como as estatísticas de avaliação da precisão dos sistemas de equações propostos. Dentre estes é possível observar a superioridade do sistema proposto por Dean e Baldwin (1993).

Tabela 1 – Coeficientes e estatísticas calculadas dos sistemas de equações testados

Modelo	Coeficientes	RMSE	RMSE (%)	R <sup>2</sup>
Sistema 1				
Eq. 1	$\beta_0 = 40,7293^*$ $\beta_1 = 0,3883^*$ $\beta_2 = -0,4079^*$	0,37 cm	2,88	0,9942
Eq. 2	$\beta_3 = 1,1050 \cdot 10^{-4*}$ $\beta_4 = 2,3830^*$ $\beta_5 = 0,1481^*$	0,4762 m <sup>3</sup> /ha	1,84	0,9994
Sistema 2				
Eq. 3	$\beta_0 = 1,7201^*$ $\beta_1 = -0,0860^*$ $\beta_2 = 1,0279^*$	1,03 cm	7,99	0,9558
Eq. 4	$\beta_3 = 1,3260 \cdot 10^{-4*}$ $\beta_4 = 1,971^*$ $\beta_5 = 0,5127^*$	3,6052 m <sup>3</sup> /ha	13,94	0,9539

Fonte: Autores (2020)

Em que: Eq. 1 = Modelo de predição do dg de Dean e Baldwin (1993); Eq. 2 = Modelo de predição do volume de Dean e Baldwin (1993); Eq. 3 = Modelo de predição do dg; Eq. 4 = Modelo de predição do volume. Obs: \* - Significativo ao teste t ao nível de 5%

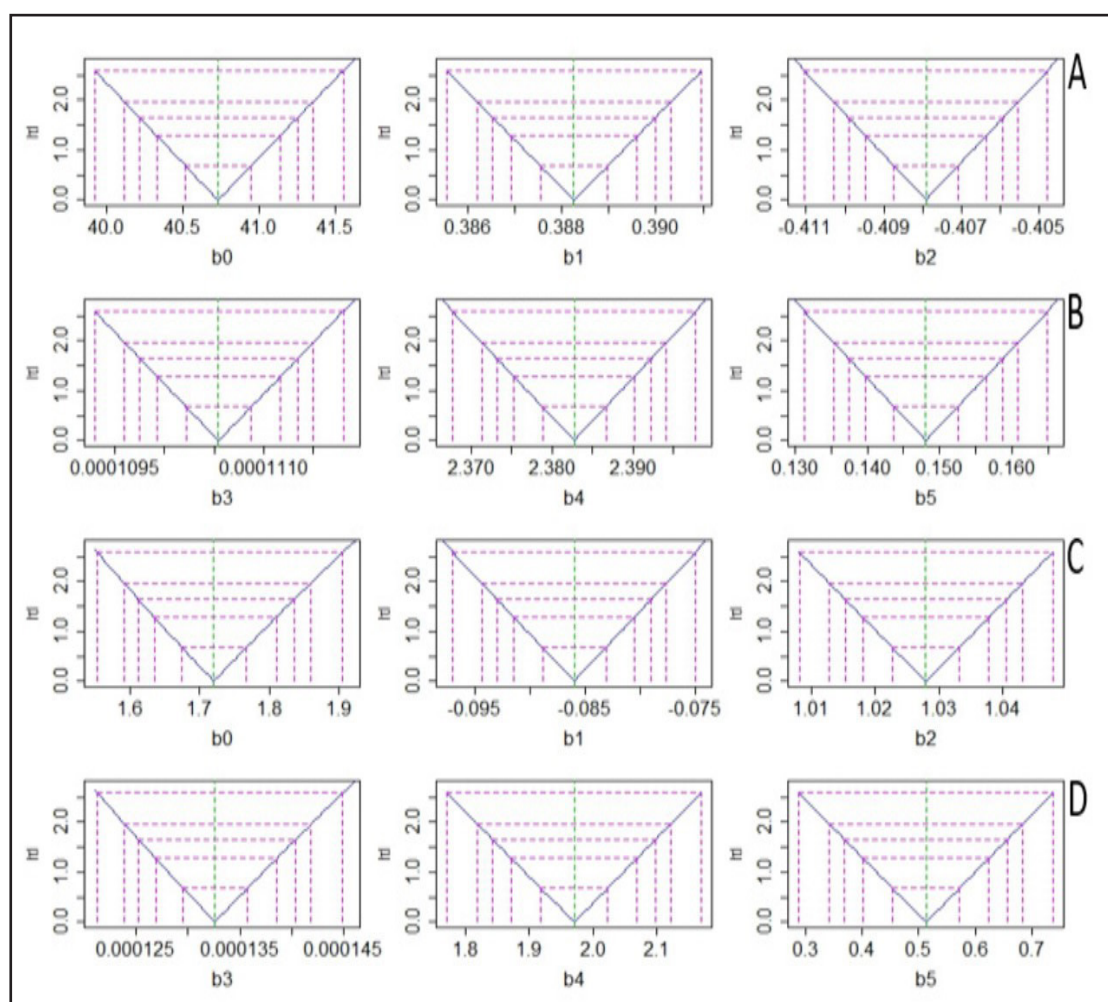
As estatísticas do sistema proposto por Dean e Baldwin (1993) apresentaram melhores resultados quando comparadas a Retslaff *et al.* (2016), com valores de RMSE de 4,90% para a equação de predição do diâmetro quadrático (Eq.1), e de 11,04% para o volume (Eq. 2).

Em relação ao sistema dois, que contempla as Eq. 3 e 4, apesar das estatísticas serem inferiores ao sistema de Dean e Baldwin (1993), apresentando elevados valores nas estatísticas analisadas. Em comparação ao trabalho de Schneider *et al.* (2016) com *Pinus taeda* L., o coeficiente de determinação para a Eq. 3 e Eq. 4 foi de 0,89 e 0,99

respectivamente, sendo, portanto, superior ao apresentado pelo ajuste da Eq. 4 desta pesquisa, tal superioridade pode ser explicada pela presença do coeficiente associado à variável N.

A qualidade dos ajustes corrobora a análise do perfilamento dos coeficientes (Figura 2), em que todos os coeficientes testados dos modelos convergiram para um mesmo ponto, sendo mais um dos indicativos da qualidade dos ajustes dos modelos e conversão do sistema não linear de equações.

Figura 2 – Perfilamento dos coeficientes dos modelos testados



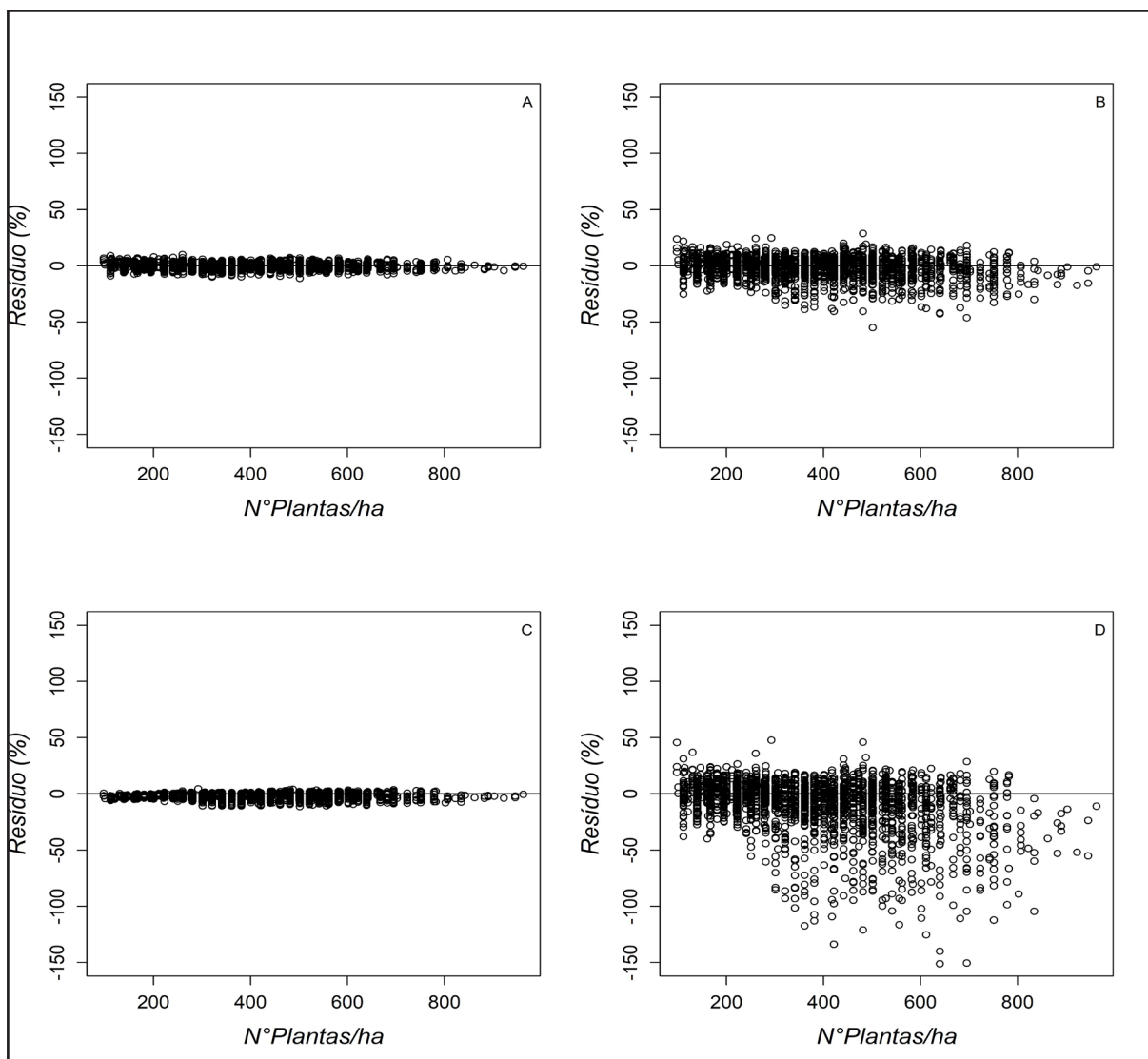
Fonte: Autores (2020)

Em que: A: Perfilamento dos coeficientes da Eq. 1; B: Perfilamento dos coeficientes da Eq. 2; C: Perfilamento dos coeficientes da Eq. 3; D: Perfilamento dos coeficientes da Eq. 4.



Apesar das qualidades dos ajustes os modelos apresentaram tendenciosidade nas estimativas de acordo com a variação da densidade do plantio (Figura 3), os modelos de predição do dg tenderam a superestimar à medida que se aumentou o N, porém a maior tendenciosidade se deu na Eq. 3 que teve uma variação entre -54,96% a +28,73%. Os modelos de volume se comportaram de maneira análoga, em que a maior tendenciosidade foi observada na Eq. 4 com uma variação entre -167,50% a +47,81%, essa variação pode ser explicada devido à variação da Eq. 3.

Figura 3 – Gráfico de resíduos dos modelos testados

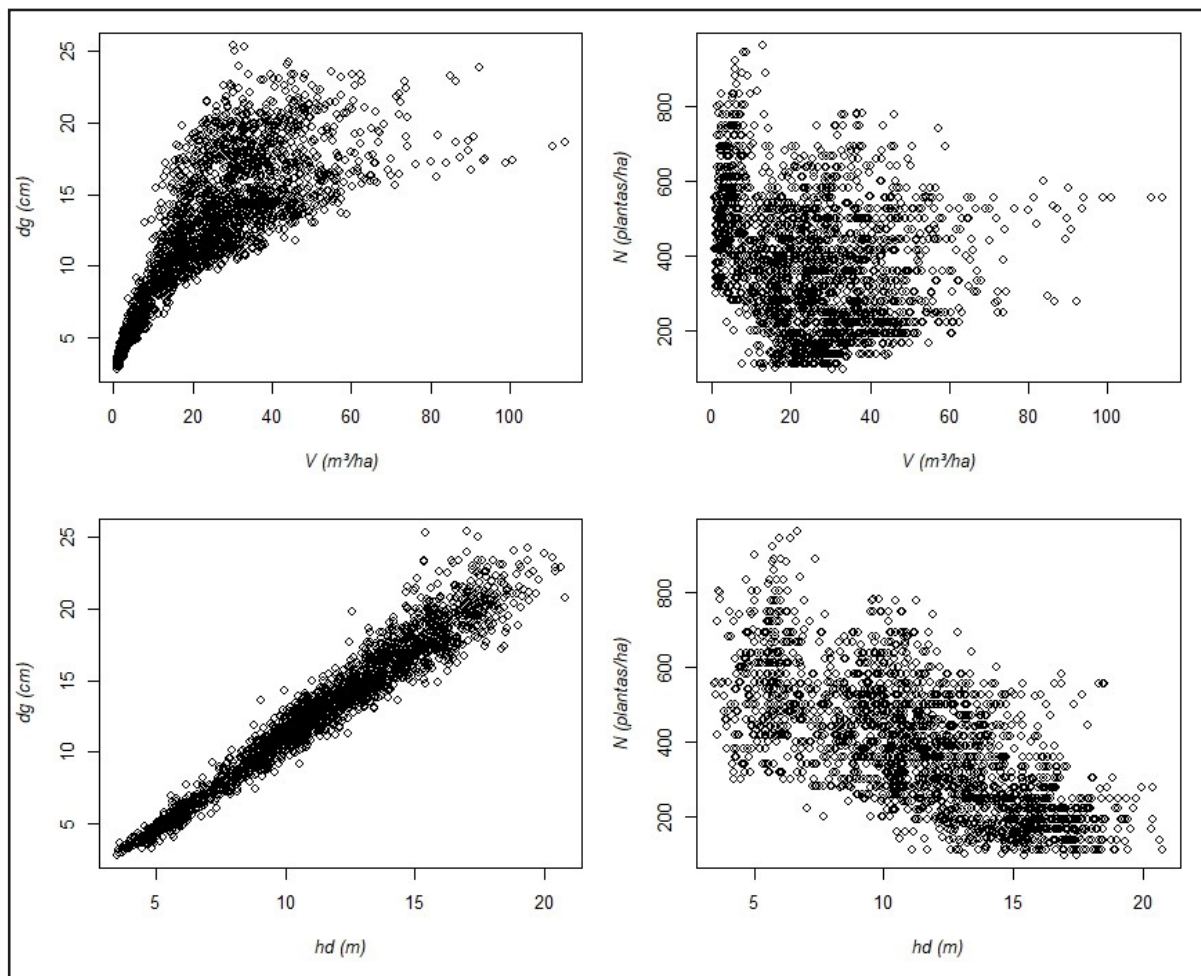


Fonte: Autores (2020)

Em que: A: Resíduos Eq. 1; B: Resíduos Eq.3; C: Resíduos: Eq. 2; D: Resíduos Eq.4.

A superioridade do primeiro sistema de equações pode ser explicada por captar melhor a variação do povoamento, uma vez observada a interação das variáveis envolvidas na Eq. 1 e Eq. 3 (Figura 4).

Figura 4 – Relação das variáveis presentes nos modelos



Fonte: Autores (2020)

Ao serem observadas as interações das variáveis contidas na Eq. 1, nota-se uma maior variação do comportamento do plantio em relação às da Eq. 3, e por ser um sistema de equações acabou captando melhor a variação presente no povoamento. Notadamente, o comportamento das variáveis diâmetro médio quadrático ( $dg$ ) e árvores por hectare ( $N$ ) em função do volume ( $V$ ) apresentaram comportamento inversos, pois, na medida em que se aumenta o  $dg$ , o  $V$  tende a aumentar, corroborando

com estudo de Schneider (2008) em povoamentos de *Pinus taeda*, em contrapartida, o V tende a aumentar com a diminuição de N. Nota-se que a variável dg em função da altura dominante (hd) apresenta uma baixa amplitude em relação as outras combinações demonstradas, e quando analisada em conjunto com a densidade, nota-se de forma análoga ao trabalho de Weber *et al.* (2013), um decréscimo da densidade à medida que se aumenta a altura dominante.

## 4 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados obtidos, o sistema de equações proposto por Dean e Baldwin (1993) mostrou-se mais preciso na predição das variáveis diâmetro quadrático e volume, quando comparado ao sistema 2. Esses resultados implicam que esse sistema de equações capta em maior escala, a variação e o comportamento do povoamento para as variáveis analisadas, e, portanto, o mais indicado na construção de diagramas de manejo da densidade para plantios clonais de teca.

## REFERÊNCIAS

- ALVARES, C. A. *et al.* Köppen's climate classification map for Brazil. **Meteorologische Zeitschrift**, Berlin, v. 22, n. 6, p. 711-728, 2013.
- BOLKER, B. M. **Ecological Models and Data in R**. Nova Jersey: [s. n.], 2008. 408 p.
- BOLKER, B.; R DEVELOPMENT CORE TEAM. **bbmle**: Tools for General Maximum Likelihood Estimation. R package version 1.0.20. [S. l.: s. n.], 2017. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=bbmle>. Acesso em: 26 set. 2020
- CABRERA-PÉREZ, R. S. *et al.* Density management diagram for mixed-species forests in the El Salto region, Durango, Mexico. **Revista Chapingo. Serie Ciencias Forestales**, Chapingo, v. 25, n. 1, p. 17-29, 2019.
- CASTEDO-DORADO, F. *et al.* Development of a stand density management diagram for radiata pine stands including assessment of stand stability. **Forestry**, [s. l.], v. 82, n. 1, p. 1-16, 2009.
- DEAN, T.; BALDWIN, V. C. J. Using a density-management diagram to develop thinning schedules for loblolly pine plantations. **Research Paper**, New Orleans, p. 1-12, aug. 1993.
- GYENGE, J. *et al.* Stand density management diagrams of *Eucalyptus viminalis*: Predicting stem volume, biomass and canopy cover for different production purposes. **CERNE**, Lavras, v. 25, n. 4, p. 463-472, 2019.

MATO GROSSO. Secretaria de Planejamento. **Mato Grosso**: Clima, análise e representação cartográfica. [S. l.]: Entrelinhas, 2011. 102 p.

MINOCHE, D. *et al.* Density management diagram for teak plantations in Tabasco, Mexico. **IForest**, [s. l.], v. 10, n. 6, p. 909-915, 2017.

PANDEY, D.; BROWN, C. La teca: uma visão global. **Unasyuva**, Roma, v. 51, n. 201, p. 3-13, 2000.

RETSLAFF, F. A. S. *et al.* Diagrama de manejo da densidade para *Pinus taeda* no estado do Paraná. **Floresta**, Curitiba, v. 46, n. 2, p. 185-195, 2016.

R CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2017. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acesso em: 26 set. 2020

SCHNEIDER, P. S. P. **Autodesbaste e diagrama de manejo da densidade em povoamentos de *Pinus taeda* L.** 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2008.

SCHNEIDER, P. S. P. *et al.* Utilização do Índice de conicidade no diagrama de manejo de densidade em povoamentos de *Pinus taeda* L. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 44, n.110, p. 425-434, 2016.

SCHNEIDER, P. S. P. *et al.* Diagrama de manejo da densidade para povoamento de *Pinus taeda* L. Conduzido sem desbaste. **Ciencia Florestal**, Santa Maria, v. 19, n. 4, p. 433-447, 2009.

SELLE, G. L. *et al.* Uso do dendrograma de manejo de densidade: Uma aplicação prática com *Hovenia dulcis* Thunberg. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 86, p. 247-254, 2010.

WEBER, V. P. *et al.* diretrizes para desbaste de *Pinus taeda* L. em função da altura dominante. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 23, n. 1, p. 193-201, 2013.

## Contribuição de Autoria

### 1 – João Paulo Sardo Madi

Engenheiro Florestal, Me.

<https://orcid.org/0000-0002-9817-2657> • joaosardomadi@gmail.com

Contribuição: Conceituação, Curadoria de dados, Investigação, Metodologia, Software, Validação, Visualização de dados, Escrita - primeira redação, Escrita - revisão e edição

## 2 – Samuel de Pádua Chaves e Carvalho

Engenheiro Florestal, Dr., Professor

<https://orcid.org/0000-0002-5590-9049> • sam.padua@gmail.com

Contribuição: Conceituação, Curadoria de dados, Metodologia, Administração do projeto, Recursos, Software, Supervisão, Visualização de dados, Escrita - primeira redação, Escrita - revisão e edição

## 3 – Rõmulo Mõra

Engenheiro Florestal, Dr., Professor

<https://orcid.org/0000-0002-2234-6753> • romulomef@yahoo.com.br

Contribuição: Metodologia, Análise Formal, Supervisão, Visualização de dados, Escrita - primeira edição

## 4 – Natalino Calegario

Engenheiro Florestal, PhD., Professor

<https://orcid.org/0000-0001-8323-1223> • calegari@dcf.ufla.br

Contribuição: Metodologia, Análise Formal, Supervisão, Visualização de dados

## Como citar este artigo

Madi, J. P. S.; Carvalho, S. P. C.; Mõra, R.; Calegario, N. Sistemas de equações utilizados na construção de diagramas de manejo da densidade de povoamentos de teca. *Ciência Florestal*, Santa Maria, v. 31, n. 2, p. 935-947, 2021. DOI 10.5902/1980509844176. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/1980509844176>. Acesso em: xx mês-abreviado 2021.