UFSM

CIÊNCIA e NATURA



ISSN 2179-460X

OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 48, e88711, 2026• https://doi.org/10.5902/2179460X88711

Submissão: 22/08/24 • Aprovação: 08/04/25 • Publicação: 14/10/26

Ensino

Novas classes de soluções para um problema extremal com sequências numéricas

New classes of solutions for an extreme problem with numerical sequences

Thiago Yukio Tanaka [I], **Gésica Peixoto Campos** [II], **Jogli Gidel da Silva Araújo** [I], **Ricardo Nunes Machado Junior** [I]

[I]Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, Brasil

[II]Escola de Referência em Ensino Médio Edmur Arlindo de Oliveira, Jaboatão dos Guararapes, PE

RESUMO

Neste artigo, apresentamos e solucionamos uma classe de problemas extremais cuja estrutura envolve sequências numéricas e funções polinomiais. Investigamos os elementos estruturais que compõem o problema original e apresentamos as soluções para casos particulares, cujas estruturas são bem comportadas. Precisamente, modificamos a s equência p adrão, c onsiderando-a c omo s endo uma Progressão Aritmética, uma Progressão Geométrica ou a Sequência de Fibonacci. Também fizemos uma generalização no grau, considerando um grau par qualquer e analisamos a nova versão do problema original e o caso das PAs. Este artigo é consequência dos estudos de uma dissertação de mestrado profissional (PROFMAT-UFRPE), n o q ual a presentamos a lguns r esultados c lássicos s obre sequências numéricas e suas aplicações. Até onde vai o nosso conhecimento os resultados apresentados são inéditos.

Palavras-chave: Sequências numéricas; Problemas extremais; Função quadrática; Progressão aritmética; Progressão geométrica

ABSTRACT

In this article, we present and solve a class of extremal problems whose structure involves numerical sequences and polynomial functions. We investigate the structural elements that comprise the original problem and provide solutions for particular cases whose structures are well-behaved. Specifically, we modify the standard sequence, considering it as an Arithmetic Progression, a Geometric Progression, or the Fibonacci Sequence. We also generalize the degree, considering any even degree, and analyze the new version of the original problem and the case of Arithmetic Progressions. This article is a consequence of the studies conducted in a professional master's dissertation (PROFMAT-UFRPE), in which we present some classical results on numerical sequences and their applications. To the best of our knowledge, the results presented are original.

Keywords: Numerical sequences; Extremal problems; Quadratic function; Arithmetic progression; Geometric progression

Published by Ciência e Natura under a CC BY-NC-SA 4.0 license.

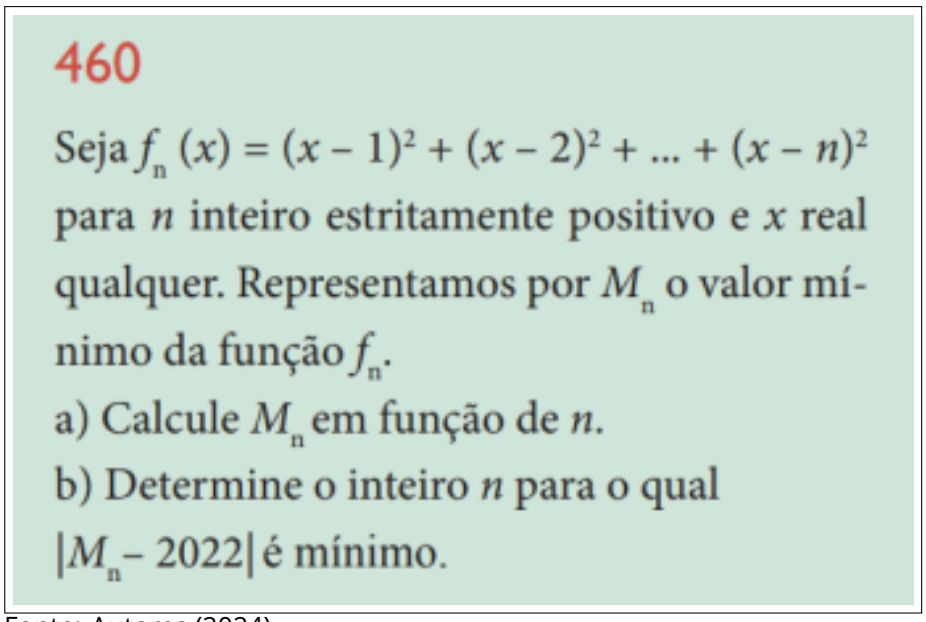
1 INTRODUÇÃO

A Matemática, como ciência, é composta de conceitos e definições, bem como das consequências que podemos obter a partir da manipulação de determinadas premissas consideradas verdadeiras, sempre respeitando as “regras do jogo” durante essa busca por respostas. A grande maioria dos resultados que conhecemos hoje pode ser vista sob três perspectivas: pode ser um resultado completamente inovador, no sentido de que nunca havia sido considerado antes; pode ser um resultado novo, mas obtido a partir da generalização de algum resultado mais simples; ou ainda, pode ser um caso particular e mais específico de um resultado mais geral. É natural observar a Matemática sob estas perspectivas, uma vez que estamos constantemente procurando demonstrar ou provar a veracidade de novos resultados, sejam eles generalizações ou casos particulares. É desta maneira que frequentemente surgem novas teorias ou novas perspectivas para objetos já estudados.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar a resolução de um problema que envolve uma interdisciplinaridade com conteúdos de Matemática vistos em momentos distintos no Ensino Básico: as funções quadráticas, as sequências e as séries. Acreditamos que os resultados apresentados podem ser aplicados tanto na perspectiva de servir como um elo entre os conteúdos quanto na ótica da resolução de problemas. Nossa motivação nessa investigação foi o Problema 460, exposto na Revista do Professor de Matemática (RPM), número 105. Estruturalmente, o problema está relacionado com duas questões de otimização (uma para cada item) para uma sequência de funções (f_n) com n sendo um número natural, e correspondente ao somatório de expressões escritas como o quadrado da diferença entre a variável x e os números naturais desde 1 até n.

Um primeiro questionamento envolve a obtenção da minimalidade de f_n para um n fixo, denotado por M_n. Um segundo questionamento busca estabelecer o menor valor para $|M_n - 2022|$, ou seja, considerando a sequência (f_n), qual deve ser o valor de n para que a distância entre as retas $y = M_n$ e $y = 2022$ seja mínima. Uma vez respondidos os questionamentos do problema original, iremos propor a seguinte generalização, estudando os extremos para a função

Figure 1 – Recorte do Problema 460 da 105ª Edição da RPM


460

Seja $f_n(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-n)^2$ para n inteiro estritamente positivo e x real qualquer. Representamos por M_n o valor mínimo da função f_n.

a) Calcule M_n em função de n.

b) Determine o inteiro n para o qual $|M_n - 2022|$ é mínimo.

Fonte: Autores (2024)

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2 = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_{n-1})^2 + (x - a_n)^2, \tag{1}$$

na qual (a_n) é uma sequência de números reais.

Buscaremos então responder ao primeiro questionamento, procurando pela minimalidade de F_n, ou seja, determinando qual o valor de x para que $F_n(x)$ seja mínimo e qual é esse valor mínimo.

Em seguida, iremos determinar como estes objetos se comportam quando consideramos situações particulares para a sequência (a_n) nos seguintes casos:

(i) (a_n) é uma PA;

(ii) (a_n) é uma PG;

(iii) (a_n) é a Sequência de Fibonacci (clássica).

Após estes resultados, iremos considerar segunda generalização considerando uma função de grau par qualquer,

$$f_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^{2k} = (x - a_1)^{2k} + (x - a_2)^{2k} + \cdots + (x - a_{n-1})^{2k} + (x - a_n)^{2k}, \tag{2}$$

em que $k \in \mathbb{N}$ e dois casos a considerar:

(iv) (a_n) é a sequência dos naturais $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$;

(v) (a_n) é uma PA.

Nosso segundo objetivo é abordar o tema sob uma perspectiva olímpica, em particular, na criação de problemas semelhantes aos das Olimpíadas de Matemática. Acreditamos que nosso trabalho expande o problema original para uma classe de novos problemas, que podem auxiliar e motivar a busca por respostas elementares para as situações particulares mencionadas, desde a obtenção da Lei de Formação até o comportamento dos somatórios no caso geral das sequências consideradas. Além disso, os conceitos envolvidos são todos relacionados ao Ensino Básico. Embora não seja comum a abordagem desses assuntos na perspectiva do problema original, os resultados aqui apresentados podem servir como uma ponte para conectar conteúdos de matemática que usualmente não se encontram, como Sequências Numéricas, Somatórios e Funções Quadráticas.

Em termos da abordagem adotada no trabalho, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância da integração entre conteúdos de diferentes unidades temáticas, pois enriquece o aprendizado do aluno e ajuda no desenvolvimento de "competências para compreender o mundo, relacionar informações, representar e solucionar problemas de várias naturezas" (BNCC, 2018, p. 350). Geralmente, os conteúdos de função quadrática e sequências são apresentados de forma separada no currículo de Matemática, uma vez que as competências e habilidades relacionadas são distintas. A função quadrática é parte do programa das funções elementares, focando principalmente nas propriedades, representações gráficas e aplicações práticas. Já as Sequências Numéricas são abordadas no contexto de Progressões Aritméticas e Geométricas, com ênfase em encontrar padrões, deduzir e utilizar fórmulas. Nossa proposta é explorar a interdisciplinaridade unindo dois temas que, a princípio, não parecem se interligar. Dessa forma, incentivamos os alunos a aprofundar seus conhecimentos matemáticos em "contextos significativos de aprendizagem" (BNCC, 2018, p. 350).

Com relação à contextualização, procuramos diversos trabalhos, entre artigos ou dissertações de mestrados, que abordassem problemas de otimização para esta

função, e relacionasse com problemas de sequências, mas dada a especificidade, não encontramos contextos relevantes. Apesar disso, vale ressaltar que esta função aparece frequentemente em diversos contextos da matemática. Alguns dos contextos onde essa função é relevante incluem a Análise de Variância, para medir a soma dos quadrados das diferenças (variância) entre valores observados e seus valores médios, na Regressão e Ajuste de Curvas, como na regressão linear para obter a linha de ajuste. Em métodos numéricos como o Métodos de Mínimos Quadrados, essa soma é minimizada para encontrar a melhor aproximação para um conjunto de dados.

A busca por padrões em sequências, sejam de resultados novos ou de generalizações de resultados conhecidos, mas com modificações na sequência escolhida ou sobre otimização são temas recorrentes em artigos da própria Revista Ciência e Natura. Recomendamos a leitura de Martins (2015); Da Silva e Tonet (2015); Porto et al. (2019) para artigos de sequências e o artigo Meurer et al. (2020) para problemas de otimização. Em especial, destacamos o volume 37, publicado em 2015, contendo uma edição especial com artigos selecionados originados de dissertações de PROFMAT, com diversos artigos com estrutura semelhante ao nosso. Por fim, recomendamos também as dissertações de PROFMAT Bragagnolo (2020); Conceição (2021); Cunha (2013); Da Silva (2014); Fonseca (2023); Junior (2022); Kelmer (2023); Sena (2013); Souza (2016) que percorrem todos os temas propostos neste artigo.

Este trabalho compõe parte da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da UFRPE, da primeira autora, sob a orientação do segundo autor e colaboração dos demais autores, ver Campos e Tanaka (2025). Até onde vai o nosso conhecimento, os resultados aqui apresentados são inéditos.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: na Seção 2, apresentaremos o problema original e sua solução, buscando entender as estruturas envolvidas até a solução. Em seguida, iremos generalizar o problema, fazendo uma alteração no formato que define a função a ser minimizada. Na Seção 3, apresentaremos as formas do problema quando consideramos casos particulares e com estruturas já conhecidas. A Seção 4 traz a abordagem com alteração no grau do polinômio e considera os casos do problema original e com Progressões Aritméticas. A Seção 5 contém resultados considerando a generalização no grau do polinômio com grau par qualquer, e aborda

o caso do problema original e a nossa modificação com PAs. Por fim, a Seção 6 traz a conclusão do trabalho.

2 ANÁLISE DO PROBLEMA ORIGINAL

Discutiremos o problema proposto na Revista do Professor de Matemática (RPM), edição 105, a fim de observar os elementos estruturais do problema.
Problema 460 da Revista do Professor de Matemática nº 105. Seja

$$f_n(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \cdots + (x-n)^2,$$

para n inteiro estritamente positivo e x real qualquer. Representamos por M_n o valor mínimo da função f_n.

(a) Calcule M_n em função de n.

(b) Determine o inteiro n para o qual $|M_n - 2022|$ é mínimo.

Solução. Item (a).

Iniciaremos procurando uma expressão mais simplificada para $f_n(x)$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x-1)^2 + (x-2)^2 + \cdots + (x-n)^2 \\ &= (x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2) + (x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2) + \cdots + (x^2 - 2\cdot n\cdot x + n^2) \\ &= (1+1+\cdots+1)x^2 - 2\cdot(1+2+\cdots+n)x + (1^2+2^2+\cdots+n^2) \\ &= nx^2 - 2\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n\left[x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]. \end{aligned}$$

Na última expressão, completamos quadrados para obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\left[x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= n\left[\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}\right] \\ &= n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{n^3-n}{12}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_n(x) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{n^3-n}{12} \geq \frac{n^3-n}{12}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a partir da desigualdade acima, segue que $f_n \geq \dfrac{n^3-n}{12}$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \dfrac{n+1}{2}$, o que mostra que o valor mínimo de f_n é $\dfrac{n^3-n}{12}$.

No desenvolvimento do cálculo acima trocamos os somatórios por expressões que dependem de n e estão em um formato mais simplificado.[1]

Item (b).

Uma vez encontrada a expressão para M_n, o problema se reduz a encontrar o menor valor para a função g, dada por

$$g(n) = \left|\frac{n^3-n}{12} - 2022\right|.$$

Para encontrar o menor valor assumido por $g(n)$, devemos encontrar um valor n no qual $\dfrac{n^3-n}{12}$ mais se aproxime de 2022.

Para que $\dfrac{n^3-n}{12} \approx 2022$, precisamos ter $n^3 - n \approx 24264$, o que é satisfeito para $n = 29$. Com efeito, como n^3 é muito maior do que n à medida que n aumenta, podemos simplificar a procura por um valor de n tal que $n^3 \approx 24264$.

[1] A soma dos n primeiros números naturais é dada por $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, e a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Rapidamente observamos que n precisa ter dois dígitos, uma vez que $100^3 = 1000000$. Como $10^3 = 1000$, ainda um valor longe de 24264, nosso primeiro palpite é $n = 20$, com $20^3 = 8000$, que já está mais próximo. Consideremos agora $n = 30$, encontramos $30^3 = 27000$, valor que excede 24264. As últimas duas estimativas refinam a nossa busca para $20 < n < 30$, com n mais próximo de 30 do que de 20. Agora, basta esgotar os casos.

$$27^3 = 19683, \qquad 28^3 = 21952, \qquad 29^3 = 24389.$$

Dentre os valores acima, o que mais se aproxima de 24264 é $29^3 = 24389$, logo $n = 29$ é o resultado.

3 UMA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO

Uma vez conhecido um resultado matemático, uma das indagações naturais é saber como se comporta o resultado ao modificar algumas estruturas subjacentes. Com o resultado anterior estabelecido e entendendo a estrutura do problema, vamos considerar agora um caso mais geral, que consiste em substituir os números naturais das diferenças $x - 1, x - 2, \ldots, x - n$, por termos de uma sequência qualquer. Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma função $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2,$$

em que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os n primeiros termos de uma dada sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Seja $m_n = m(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ o valor mínimo da função F_n e x_n o valor de x que minimiza F_n.

Teorema 3.1 (Autores). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função F_n possui um valor mínimo global m_n com*

$$m_n = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2, \tag{3}$$

obtido quando

$$x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{4}$$

Demonstração. Expandindo F_n, obtemos

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{j=1}^{n}(x-a_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(x^2 - 2xa_j + a_j^2\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} x^2\right) - \left(2x\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) \\ &= nx^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x + \sum_{j=1}^{n} a_j^2. \end{aligned}$$

Organizando os termos, podemos proceder de modo análogo ao caso anterior para f_n, de modo a obtermos:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= n\left[x^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right] \\ &= n\left[x^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x + \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right] \\ &= n\left[\left(x - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2\right] \\ &= n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$F_n(x) = n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$F_n \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$. Portanto, o mínimo da função F_n é

$$m_n = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n} a_i a_j\right), \tag{5}$$

e ocorre quando

$$x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{6}$$

Perceba que as estruturas que estão em jogo na busca pela minimalidade de f_n nos forçam a determinar expressões para os seguintes objetos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \qquad \text{e} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2, \tag{7}$$

que são, respectivamente, a soma dos n primeiros termos, a soma dos quadrados dos n primeiros termos e, finalmente, o quadrado da soma dos n primeiros termos da sequência (a_n). Sabemos que essas quantidades são bem comportadas quando a sequência é, por exemplo, uma progressão aritmética. É natural então esperar que m_n e x_n possuam formatos específicos quando considerarmos sequências que possuem determinadas regularidades. É isso que vamos explorar na próxima seção.

4 CLASSES DE SOLUÇÕES: ANÁLISE DE CASOS PARTICULARES

Uma vez demonstrado o Teorema 3.1, apresentaremos a análise de alguns casos particulares. Sugerimos que essas modificações podem se tornar boas questões olímpicas por possuírem estruturas adequadas tanto para questões de múltipla escolha quanto para questões dissertativas. Além disso, assim como o problema original, podemos associar o valor de n ao ano de aplicação, por exemplo. Apresentaremos então o comportamento deste problema quando, em vez de uma sequência arbitrária, consideramos sequências com determinadas particularidades: Progressões Aritméticas e Geométricas.

Para responder os questionamentos, nosso trabalho será procurar por formatos simplificados para x_n e m_n. Para evitar a confusão entre os casos $F_n(x)$ geral, de PA e de PG, manteremos a notação (a_n) para o caso geral, e adotaremos as notações (b_n) e (c_n) para PAs e PGs, respectivamente.

4.1 O Caso das Progressões Aritméticas

Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência (b_n) que possui uma recorrência de primeira ordem da forma $b_{n+1} - b_n = r$ para todo $n \geq 1$ e r é uma constante a qual chamamos de razão da PA. A lei de formação ou fórmula do termo geral para PAs já é uma resultado bastante conhecido, ela nos permite calcular b_n em função de b_1 e r da seguinte forma: $b_n = b_1 + (n-1)r$. Este formato pode ser estabelecido por meio de um argumento que utiliza somas telescópicas. Ainda sobre estas sequências, a soma dos n primeiros termos também é um resultado bastante conhecido e não demonstraremos aqui,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2}. \tag{8}$$

Estabelecidos os fundamentos, suponha então que $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ são os termos consecutivos de uma Progressão Aritmética de razão r. Representamos por $m_n = m(r, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ o valor mínimo da função F_n dada por

$$F_n(x) = (x - b_1)^2 + (x - b_2)^2 + \cdots + (x - b_n)^2.$$

Provaremos o seguinte resultado.

Proposição 4.1 (Autores). *Dada uma Progressão Aritmética $(b_n)_{n\geq 1}$ de razão r, então o menor valor para F_n ocorre para*

$$x = \frac{b_1 + b_n}{2} = b_1 + (n-1)\frac{r}{2}, \tag{9}$$

e cujo valor é igual a

$$m_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{12} r^2. \tag{10}$$

Demonstração. Já sabemos que o mínimo ocorre para x dado por (6), assim

$$x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{1}{n}\left(\frac{(b_1 + b_n)n}{2}\right) = \frac{b_1 + b_n}{2} = \frac{b_1 + b_1 + (n-1)r}{2} = b_1 + (n-1)\frac{r}{2}.$$

Na segunda igualdade usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA fornecida na Identidade (9). O valor mínimo de F_n é dado por (5), logo precisamos assim descobrir o formato destes somatórios em (5) quando (b_n) é uma PA. Note que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{(b_1 + b_n)n}{2}\right)^2 = \frac{n(b_1 + b_n)^2}{4} = nb_1^2 + b_1 n(n-1)r + \frac{n(n-1)^2 r^2}{4}. \tag{11}$$

Observe agora que

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(b_1 + (j-1)r\big)^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(b_1^2 + 2b_1 r(j-1) + (j-1)^2 r^2\big)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b_1^2 + 2b_1 r \sum_{j=1}^{n}(j-1) + r^2 \sum_{j=1}^{n}(j-1)^2$$
$$= nb_1^2 + 2b_1 r \frac{n(n-1)}{2} + r^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Note que no último somatório usamos que $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 = nb_1^2 + b_1 n(n-1)r + \frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{6}. \tag{12}$$

Substituindo as expressões dos somatórios obtidos nas Equações (12) e (13) na Identidade (5), obtemos

$$m_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} r^2 = \frac{(n^3-n)r^2}{12}.$$

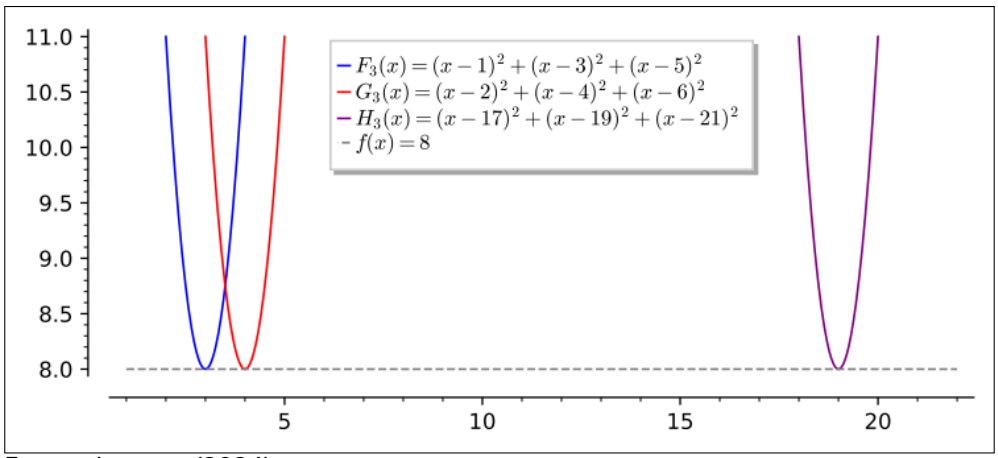
Observação 4.2. É interessante perceber que, no caso acima, o valor mínimo m_n não depende da condição inicial, ou de nenhum outro termo da progressão aritmética. Ela depende exclusivamente da quantidade de termos envolvidos e do valor da razão r. Isso significa que no valor mínimo $m(r, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ há dependência apenas dos parâmetros n e r. Por exemplo, se (p_n) e (q_n) são PAs com a mesma razão r, então pelos resultados da Proposição 4.1 podemos concluir que as funções $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f_n(x) = \sum_{j=k}^{k+n} (x - p_j)^2 \qquad \text{e} \qquad g_n(t) = \sum_{j=l}^{l+n} (t - q_j)^2$$

possuem o mesmo valor mínimo $M(n,r) = \frac{n(n-1)(n+1)}{12} r^2$. Isso abre uma grande margem para a criação de bons problemas. Os Problemas 3 e 4 são inspirados nesta observação.

Na figura abaixo, consideramos três funções e ilustramos o mínimo obtido.

Figure 2 – Caso de funções com $n = 3$ e PAs de mesma razão $r = 2$



Fonte: Autores (2024)

Podemos na Figura 2 ver no gráfico que o mínimo para as três funções é o mesmo, e que o gráfico de uma pode ser obtido pela translação horizontal do gráfico da outra.

Observação 4.3. No caso das progressões aritméticas, a expressão para $F_n(x)$ tem o seguinte aspecto

$$F_n(x) = nx^2 - 2\left(b_1 n + \frac{n(n-1)}{2} r\right) x + nb_1^2 + 2b_1 r \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} r^2.$$

Observacao 4.4. O caso degenerado constante está incluído neste caso, basta considerar $r = 0$. O problema original também está incluso, basta considerar $b_1 = r = 1$.

4.2 O caso das Progressões Geométricas

Faremos uma investigação análoga a anterior, mas agora considerando (c_n) uma progressão geométrica.

Dizemos que (c_n) é uma Progressão Geométrica (PG) quando $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$ para todo $n \geq 1$. É possível mostrar pelo argumento de produtos telescópicos que a lei de formação ou fórmula do termo geral da PG é dado por $c_n = c_1 q^{n-1}$. Também é um resultado bastante conhecido que a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n = \frac{c_n q - c_1}{q-1} = \frac{c_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Estamos no ponto de considerar o segundo caso particular.

Proposição 4.5 (Autores.) *Dada uma Progressão Geométrica* $(c_n)_{n\geq 1}$ *de razão* q*, então o menor valor para* F_n *ocorre para*

$$x = \frac{c_1(q^n-1)}{n(q-1)}, \tag{13}$$

e o valor é igual a

$$m_n = \frac{c_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1} - \frac{c_1^2(q^n-1)^2}{n(q-1)^2}. \tag{14}$$

Demonstração. Seguiremos o roteiro da Proposição 4.1, devemos portanto estabelecer uma expressão para as expressões em (8) quando (c_n) é uma PG de razão q. Por (6), o mínimo é obtido em

$$x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{1}{n}\frac{c_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Por (3), o valor mínimo é igual a

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{j=1}^{n} c_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)^2 = \frac{c_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{c_1(q^n-1)}{q-1}\right)^2 \\ &= \frac{c_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1} - \frac{c_1^2(q^n-1)^2}{n(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, explicando o formato do primeiro somatório, perceba que o termo geral é escrito por $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$ dessa forma

$$c_n^2 = (c_1 \cdot q^{n-1})^2 = c_1^2 \cdot (q^2)^{n-1},$$

assim (c_n^2) é uma PG cujo primeiro termo é igual a c_1^2 e a razão é igual a q^2. Agora, basta usar a expressão para soma dos n primeiros termos.

Observação 4.6. Note que para o caso PG, m_n depende do primeiro termo c_1, da razão q e da posição n. Além disso, a dependência em c_1 no x que nos dá o valor mínimo, e em m_n é de ordem 1 e 2, respectivamente. Isso significa que PGs com termos iniciais opostos possuem um mesmo mínimo m_n, porém o mínimo é obtido em valores x diferentes.

Observação 4.7. No caso das progressões geométricas, $F_n(x)$ assume o seguinte formato

$$F_n(x) = nx^2 - 2c_1\frac{q^n - 1}{q - 1}x + c_1^2\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}.$$

É interessante notar que na situação em que (c_n) é uma PG cuja razão q satisfaz $0 < q < 1$, se $n \to +\infty$, que consistiria em considerar a expressão $f_\infty = \sum_{j=1}^{\infty}(x - c_j)^2$, então aplicando o limite quando $n \to +\infty$ nas Expressões (14) e (15), obteremos

$$x_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_1(q^n - 1)}{n(q - 1)} = 0$$

e

$$m_\infty = \lim_{n\to+\infty} m_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{c_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} - \frac{c_1^2(q^n - 1)^2}{n(q - 1)^2}\right) = \frac{c_1^2}{1 - q^2}.$$

Para a conclusão dos dois limites acima, usamos o fato de que, se $0 < q < 1$, então $q^n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Esse resultado pode ser encontrado em (Stewart, 2016a, p. 630). Também utilizamos um caso particular do Teorema 5, p. 122, encontrado em Stewart (2016b), que garante que $1/n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Concluímos, assim, que m_∞ tem o mesmo valor da soma dos infinitos termos da PG dos quadrados dos termos, (c_n^2).

4.3 O Caso da Sequência de Fibonacci

Até então os casos anteriores consideravam recorrências de primeira ordem. Ao considerarmos a sequência de Fibonacci, teremos então uma modificação que considera uma recorrência de segunda ordem.

A sequência de Fibonacci é uma sequência (d_n) que possui uma recorrência de segunda ordem da forma

$$d_{n+2} = d_{n+1} + d_n, \qquad n \geq 1,$$

com $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$. Antes de partir para o resultado principal, iremos provar o seguinte lema.

Lema 4.8. *Se (d_n) é a sequência de Fibonacci, então*

(i) $\sum_{j=1}^{n} d_j = d_{n+2} - d_2$.

(ii) $\sum_{j=1}^{n} d_j^2 = d_n \cdot d_{n+1}$.

Demonstração (i). Escrevendo sucessivamente as recorrências desde a ordem $n+2$ até d_3, podemos cancelar sistematicamente o primeiro termo do lado direito da igualdade de cada linha com o termo do lado esquerdo da igualdade da linha imediatamente inferior,

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= d_{n+1} + d_n \\ d_{n+1} &= d_n + d_{n-1} \\ &\vdots \\ d_4 &= d_3 + d_2 \\ d_3 &= d_2 + d_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_{n+2} = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) + d_2 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} d_j = d_{n+2} - d_2.$$

(ii) Utilizaremos o Princípio de Indução Finita.[2] Queremos validar a expressão

$$P(n) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2 = d_n \cdot d_{n+1}.$$

Perceba que para o caso $n = 1$, $d_1^2 = 1^2 = 1$, e $d_1 \cdot d_2 = 1 \cdot 1 = 1$, logo $P(1)$ é verdadeiro.

Suponha que $P(n)$ é verdade, então

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2 + d_{n+1}^2 &= \left(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_{n-1}^2 + d_n^2\right) + d_{n+1}^2 \\ &= P(n) + d_{n+1}^2 = d_n \cdot d_{n+1} + d_{n+1}^2 \\ &= d_{n+1}(d_n + d_{n+1}) = d_{n+1} \cdot d_{n+2} \\ &= P(n+1). \end{aligned}$$

E o resultado está demonstrado.

Proposição 4.9 (Autores). *Se $(d_n)_{n\geq 1}$ é a sequência de Fibonacci então o menor valor para f_n ocorre para*

$$x = \frac{d_{n+2} - d_2}{n},$$

e cujo valor é igual a

$$m_n = d_n \cdot d_{n+1} - \frac{(d_{n+2} - d_2)^2}{n}.$$

Demonstração. A demonstração consiste em utilizar as expressões obtidas no Lema 4.8

[2] O Princípio de Indução Finita é uma ferramenta utilizada para validar expressões que dependem de números naturais. Este princípio diz que se uma determinada propriedade P que depende de um número natural n, denotada por $P(n)$ satisfaz $P(n_0)$ é verdadeiro e para todo $n \geq n_0$, assumindo que $P(n)$ é verdadeiro implicar que $P(n+1)$ também é verdadeiro, então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq n_0$.

itens (i) e (ii) para obter expressões para os somatórios dados em (8). Combinando estes resultados com as expressões (6) e (5), obtemos o resultado.

Observação 4.10. Ainda que demonstrado para um caso particular, ao considerarmos uma sequência com a mesma recorrência que a Sequência de Fibonacci, porém com termos iniciais quaisquer, ou seja, $d_1 = \alpha$ e $d_2 = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os resultados dados pelo Lema 4.8 e da Proposição 4.9 ainda são verdadeiros. Perceba que a validade desses resultados dependem da estrutura, ou seja, da recorrência, permanecendo válidos com modificações em seus valores iniciais. Dessa maneira, também provamos o resultado para a Sequência de Lucas, que é a sequência com a mesma recorrência que Fibonacci, porém com termos iniciais $d_1 = 1$ e $d_2 = 3$. Assim, m_n depende do elemento posicional n e também das condições iniciais.

5 GENERALIZAÇÃO NO GRAU DO POLINÔMIO

Apresentaremos uma segunda proposta de generalização que consiste em modificar o grau 2 para um grau par qualquer. Assim, a proposta desta seção é discutir a otimalidade para a seguinte função

$$y_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^{2k},$$

em que n e k são inteiros positivos. Utilizando o Teorema Binomial, que pode ser encontrado em Morgado et al. (1991), na identidade anterior, obtemos:

$$y_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k}{m} x^{2k-m} (-a_j)^m = \sum_{m=0}^{2k} \binom{2k}{m} \left(\sum_{j=1}^{n} (-a_j)^m \right) x^{2k-m}.$$

Uma vez que esta função é polinomial e de grau $2k$, não há um método que seja sistemático para determinar a minimalidade de $y_{n,k}$. Por exemplo, nem pelo método variacional, derivando a expressão, encontrando os pontos críticos, é algo elementar de resolver, uma vez que para isso seria necessário estudar os zeros de $y'_{n,k}$ que é uma função polinomial de grau $2k - 1$. Apenas métodos computacionais seriam eficientes para esse fato.

Observando os casos anteriores, indagamos se seria possível replicar a minimalidade com os "mesmos pontos" considerados em cada situação, e é a partir desta ideia que provamos esses resultados. Mais precisamente, usaremos como candidatos os pontos de mínimo obtidos nas seções anteriores, e para provar que um ponto x é um ponto de mínimo para uma função y, provaremos que

$$y(x) \leq y(x+\delta), \quad \text{para todo } \delta \text{ tal que } x+\delta \text{ esteja no domínio de } y,$$

e nesse caso $y(x)$ é o valor mínimo assumido por esta função. É assim que atacaremos os problemas a seguir.

5.1 No Problema Original

Sejam n e k números inteiros positivos. Considere a função $f_{n,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^{n} (x-j)^{2k} = (x-1)^{2k} + (x-2)^{2k} + \cdots + (x-n+1)^{2k} + (x-n)^{2k}.$$

Observe que $f_{n,k}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $f_{n,k} > 0$. Observando os resultados desenvolvidos no início da Seção 2, provaremos que o mesmo x que minimiza f_n, também minimiza $f_{n,k}$.

Proposição 5.1 (Autores). *A função $f_{n,k}$ atinge o valor mínimo em $x = \dfrac{n+1}{2}$.*

Demonstração. De fato, defina o número m tal que

$$\begin{aligned} m = f_{n,k}(x) &= (x-1)^{2k} + (x-2)^{2k} + \cdots + (x-n+1)^{2k} + (x-n)^{2k} \\ &= \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)^{2k} + \left(\frac{n+1}{2} - 2\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{n+1}{2} - n\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$m = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-5}{2}\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{5-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}.$$

Agora defina o número $\hat{x}$ por

$$\hat{x} = x + \delta = \frac{n+1}{2} + \delta, \qquad \text{com } \delta \neq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{n,k}(\hat{x}) &= (\hat{x}-1)^{2k} + (\hat{x}-2)^{2k} + \cdots + (\hat{x}-n+1)^{2k} + (\hat{x}-n)^{2k} \\ &= \left(\frac{n-1}{2} + \delta\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2} + \delta\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2} + \delta\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2} + \delta\right)^{2k} \\ &= \left[\left(\delta + \frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-1}{2}\right)^{2k}\right] + \cdots + \left[\left(\delta + \frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-3}{2}\right)^{2k}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Para escrever (16) de outra forma, desenvolveremos as expressões em cada colchete. Seja i um número ímpar, utilizando o Teorema Binomial, obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\delta + \frac{n-i}{2}\right)^{2k} = \delta^{2k} &+ \binom{2k}{1}\delta^{2k-1}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^2 + \\ &+ \binom{2k}{3}\delta^{2k-3}\left(\frac{n-i}{2}\right)^3 + \cdots + \binom{2k}{3}\delta^3\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-3} \\ &+ \binom{2k}{2}\delta^2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2} + \binom{2k}{1}\delta\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \left(\delta - \frac{n-i}{2}\right)^{2k} = \delta^{2k} &- \binom{2k}{1}\delta^{2k-1}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^2 + \\ &- \binom{2k}{3}\delta^{2k-3}\left(\frac{n-i}{2}\right)^3 + \cdots - \binom{2k}{3}\delta^3\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-3} \\ &+ \binom{2k}{2}\delta^2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2} - \binom{2k}{1}\delta\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-1} + \left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{17}$$

Somando as Identidades (17) e (18), cancelamos todos os termos opostos de modo a obter

$$\begin{aligned}\left(\delta+\frac{n-i}{2}\right)^{2k}+\left(\delta-\frac{n-i}{2}\right)^{2k} &= 2\delta^{2k}+2\binom{2k}{2}\delta^{2k-2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2}+\cdots \\ &\quad +2\binom{2k}{2}\delta^{2}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k-2}+2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k} \\ &> 2\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}=\left(\frac{n-i}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{i-n}{2}\right)^{2k}.\end{aligned} \tag{18}$$

Finalmente, combinando a Desigualdade (19) e a Identidade (16),

$$f_{n,k}(\hat{x}) > \left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k}+\cdots+\left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}=f_{n,k}(x)=m,$$

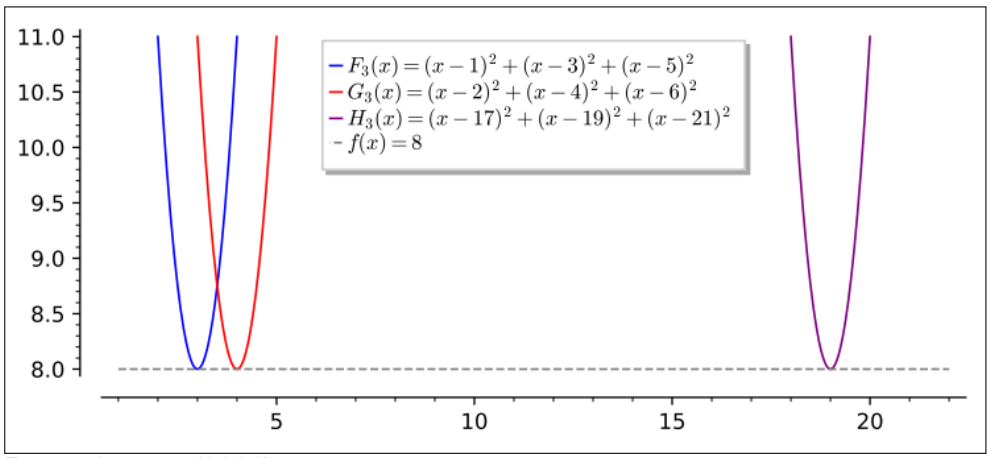
isto é,

$$f_{n,k}(x) < f_{n,k}(\hat{x}) = f_{n,k}(x+\delta), \qquad \text{para todo } \delta \neq 0.$$

Portanto, o valor mínimo da função $f_{n,k}$ é m e é atingido quando $x=\bar{x}=\dfrac{n+1}{2}$.

Na figura abaixo, consideramos a função $f_{4,k}(x)$ e escolhemos três valores para k. Podemos ver no gráfico, o ponto de mínimo é o mesmo.

Figure 3 – Representação dos gráficos de $f_{4,k}$ para $k=1$, $k=2$ e $k=3$. Os valores mínimos $f_{4,k}(\bar{x})$ são distintos, mas obtidos no mesmo valor $\bar{x}$



Fonte: Autores (2024)

Observação 5.2. Com o resultado acima estabelecido, perceba que alterações considerando graus pares não altera a localidade x para obtenção do valor mínimo. Provamos assim que a família de funções $f_{n,k}$ com $k \in \mathbb{Z}_+^*$ possuem o mesmo ponto de mínimo $x = \dfrac{n+1}{2}$, sendo f_n o caso particular com $k = 1$.

5.2 No Caso das Progressões Aritméticas

Sejam a e r números reais e n, k números inteiros positivos. Considere a função $f_{n,k,a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f_{n,k,a,r}(x) = {} & [x-(a+r)]^{2k} + [x-(a+2r)]^{2k} + \cdots \\ & + [x-(a+(n-1)r)]^{2k} + [x-(a+nr)]^{2k}. \end{aligned}$$

Observe que nesse contexto mais geral, o caso anterior é um problema em particular quando $a = 0$ e $r = 1$, isto é, $f_{n,k} = f_{n,k,0,1}$. Pela Proposição 4.1, o valor mínimo é encontrado pela Identidade (10) como a média aritmética entre o primeiro e último termo. Veremos que isso também acontece para o caso mais geral na dimensão. Sem perda de generalidade, na demonstração a seguir, consideramos a PA começando do termo $a + r$ e com razão r, apenas para facilitar a escrita dos termos.

Proposição 5.3 (Autores). *A função $f_{n,k,a,r}$ possui um valor mínimo no ponto*

$$x = \bar{x} = \frac{(a+r)+(a+nr)}{2} = a + \frac{1}{2}(n+1)r.$$

De fato, seja M um número dado por

$$\begin{aligned} M = f_{n,k,a,r}(\bar{x}) = {} & [\bar{x}-(a+r)]^{2k} + [\bar{x}-(a+2r)]^{2k} + \cdots \\ & + [\bar{x}-(a+(n-1)r)]^{2k} + [\bar{x}-(a+nr)]^{2k} \\ = {} & \left[a + \tfrac{1}{2}(n+1)r - (a+r)\right]^{2k} + \left[a + \tfrac{1}{2}(n+1)r - (a+2r)\right]^{2k} + \cdots \\ & + \left[a + \tfrac{1}{2}(n+1)r - (a+(n-1)r)\right]^{2k} + \left[a + \tfrac{1}{2}(n+1)r - (a+nr)\right]^{2k}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{n-1}{2}r\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}r\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}r\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}r\right)^{2k} \\ &= r^{2k}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}\right]. \end{aligned}$$

Seja $\hat{x}$ um número real qualquer. Então, podemos escrever $\hat{x} = \bar{x} + \delta$, com $\delta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} f_{n,k,a,r}(\hat{x}) &= [\hat{x} - (a+r)]^{2k} + [\hat{x} - (a+2r)]^{2k} + \cdots \\ &\quad + [\hat{x} - (a+(n-1)r)]^{2k} + [\hat{x} - (a+nr)]^{2k} \\ &= \left(\frac{n-1}{2}r + \delta\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{1-n}{2}r + \delta\right)^{2k} \\ &= \left[\left(\delta + \frac{n-1}{2}r\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-1}{2}r\right)^{2k}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Aqui usamos um abuso de notação. Queremos que as reticências sejam entendidas apenas como as escritas de termos semelhantes aos que já estão escritos, e que a soma é finita. A escrita simbólica nesse caso é ineficiente porque não sabemos se n é par ou ímpar.

Seja i um número ímpar e T_i como definido abaixo:

$$T_i = \left(\delta + \frac{n-i}{2}r\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-i}{2}r\right)^{2k}.$$

Considerando o Teorema Binomial em T_i, podemos cancelar os termos de ordem ímpar, assim, de modo análogo ao caso anterior,

$$T_i = \left(\delta + \frac{n-i}{2}r\right)^{2k} + \left(\delta - \frac{n-i}{2}r\right)^{2k} \geq \left(\frac{n-i}{2}r\right)^{2k} + \left(\frac{i-n}{2}r\right)^{2k}. \tag{19}$$

Combinando a desigualdade acima e $f_{n,k,a,r}$, concluímos que

$$f_{n,k,a,r}(\hat{x}) \geq \left(\frac{n-1}{2}r\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}r\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}r\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}r\right)^{2k}$$
$$= r^{2k}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{n-3}{2}\right)^{2k} + \cdots + \left(\frac{3-n}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1-n}{2}\right)^{2k}\right] = M.$$

Portanto, o valor mínimo da função $f_{n,k,a,r}$ é M e é atingido quando $x = \bar{x} = a + \frac{1}{2}(n+1)r$.

5.4 Em particular, este caso mais geral engloba os resultados provados anteriormente:

- Do problema original da RPM 105, quando $a = 0$, $r = 1$ e $k = 1$;
- Da Proposição 4.1 quando $k = 1$;
- Da Proposição 5.1 quando $a = 0$ e $r = 1$.

Observação 5.5. Novamente, neste caso o valor mínimo denotado por M, não depende do termo inicial, apenas da razão (r), do expoente (k) e da quantidade de termos (n).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste artigo, emergem conexões inovadoras entre os conteúdos de funções quadráticas e sequências numéricas, em consonância com os princípios de interdisciplinaridade propostos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Demonstramos como é viável quantificar a otimalidade de uma função quadrática através de somatórios que integram elementos de sequências, destacando a relevância de cada conteúdo na investigação do problema proposto. Vimos que ao considerarmos um expoente par qualquer, o conteúdo também tem conexões com o Teorema Binomial e com a noção de minimalidade por meio da uma desigualdade, e que os resultados poderiam ser obtidos a partir dos candidatos a mínimo encontrados no caso de expoente 2. Precisamente provamos cinco novos resultados que estão nas Proposições 1 até 5.

Ao explorar estruturas interdisciplinares, investigamos casos específicos envolvendo Progressões Aritméticas (PAs), Progressões Geométricas (PGs), Sequência de Fibonacci, observando a simplificação dos somatórios nessas configurações

particulares. Essa abordagem amplia a compreensão dos estudantes, oferecendo uma visão integrada dos conteúdos matemáticos e fomentando a articulação entre o mesmos, conforme preconizado pela BNCC. Essas ações podem promover uma aprendizagem significativa e contextualizada. Essa abordagem visa, não apenas o desenvolvimento de habilidades matemáticas avançadas, mas também, a integração de diferentes conteúdos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pelo apoio nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Polo Recife, e no Projeto de Extensão da UFRPE Polo de Treinamento Olímpico em Matemática (PTOM - UFRPE). Também expressamos nossa gratidão ao Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) pelo suporte fundamental e apoio contínuo oferecido ao longo deste trabalho.

REFERÊNCIAS

BRAGAGNOLO, C. P. S. *Polinômios e sequências reais*. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Curitiba, 2020.

CAMPOS, G. P.; TANAKA, T. Y. *Um Estudo Sobre Sequências Numéricas: Novos Resultados*. 2025. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2025.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT, v. 216).

CASTRO, C. O.; HEREDIA, M. R.; OLIVEIRA, A. R. L. O Teorema de Goldman-Tucker para problemas de otimização linear canalizados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 120–136, 2024. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19557.

CONCEIÇÃO, A. P. *Sequências recursivas e métodos iterativos aplicados no ensino básico: aplicações em raízes irracionais*. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

COSTA, E. A. Os números mágicos de Ball e a sequência de Fibonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 1, p. 19–25, 2021. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.14066.

CUNHA, M. M. *Progressão Aritmética, Geométrica e Fractais*. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

DA SILVA, C. M. *Propriedades Aritméticas e Geométricas das Ternas Pitagóricas*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2014.

DA SILVA, J. G. A.; VIEIRA, F. R. A.; MENEZES, D. B. Aspectos da Teoria das Situações Didáticas aplicada ao ensino de Geometria plana referente a problemas das olimpíadas de Matemática com amparo do software Geogebra. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 5, n. 2, p. 328–342, 2020. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v5i2.13325.

DA SILVA, M. E. S.; TONET, L. G. A solution to the Josephus' problem. *Ciência e Natura*, v. 37, n. e23, p. 525–531, 2015. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X14613. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/14613.

DE JESUS TEIXEIRA, C.; MOREIRA, G. E. Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas: Uma análise de evidências de validade de conteúdo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 1, p. 1–25, 2021. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v6i1.13801.

DO CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

FONSECA, L. C. *Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci*. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

JUNIOR, E. W. *Identidades envolvendo números da sequência de Fibonacci demonstradas por prova combinatorial e indução finita*. 2022. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2022.

KELMER, L. R. G. *Um Estudo De Progressão Aritmética No Ensino Médio Com Uso De Uma Planilha Eletrônica Gratuita*. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2023.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

MARTINS, D. P. Harmonic progression and the triangle of Leibniz. *Ciência e Natura*, v. 37, p. 426–438, 2015. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X40596.

MEURER, J. C.; CARDOSO, L. T.; QUADROS, G. R. de. Variational calculus and applications. *Ciência e Natura*, v. 42, n. e50, 2020. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X40596. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/e50-40596.

MOREIRA, C. G. T. de A.; MARTINEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. *Tópicos de Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos números*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. Mathematics recurrences in OBMEP. *Ciência e Natura*, v. 37, n. 1, p. 36–46, 2015. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X14415. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/14415.

PORTO, A. L. P.; SANTIAGO, D. F. G.; GOMES, L.; MACEDO, M. H. M. From circle to square, a study on the convergence of a curve sequence. *Ciência e Natura*, v. 41, p. 525–531, 2019. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X32231.

RABELO, M. *Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 29, p. 30–31.

SANTOS, R.; COSTA, E. A. Números de Ball Generalizados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 7, n. 1, p. 61–85, 2022. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v7i1.16202.

SEÇÃO de Problemas. *Revista do Professor de Matemática*, v. 105, 2022.

SENA, C. A. R. *Sequência de Fibonacci: Propriedades, Aplicações e Curiosidades*. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2013.

SIQUEIRA, E.; GALVÃO, M. E. E. L. Problemas de otimização e mudança de quadros em um trabalho com participantes de um curso de engenharia. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 3, p. 21–39, 2021. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v6i3.14149.

SOUZA, I. R. S. *Relação entre função exponencial e progressão geométrica*. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016.

SPREAFICO, E. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sobre os números generalizados de Oresme e o Sistema Fundamental de Fibonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 68–80, 2024. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19912. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/19912.

STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.

STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 2.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Identidades Tribonacci. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 1, p. 216–226, 2019. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v4i1.9823. Disponível em: https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/9823.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização dos quatérnios de Narayana. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 6, n. 3, p. 12–22, 2021. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v6i3.14975.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações Bidimensionais e Identidades da Sequência de Leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 156–173, 2019. DOI: https://doi.org/10.34179/revisem.v4i2.11863.

Contribuições dos autores

1 – Thiago Yukio Tanaka (Autor Correspondente)
Doutor em Matemática, Professor do Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
https://orcid.org/0000-0002-6586-127X • thiago.tanaka@ufrpe.br
Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Investigação; Redação – Preparação do Rascunho Original, Revisão e Edição; Revisão de Literatura, Análise de Dados

2 – Gésica Peixoto Campos
Mestra em Matemática, Professora da Escola de Referência em Ensino Medio Edmur Arlindo de Oliveira
https://orcid.org/0009-0008-5639-5001 • gesica.pcampos@gmail.com
Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Investigação; Redação – Preparação do Rascunho Original, Revisão e Edição; Revisão de Literatura, Análise de Dados

3 – Jogli Gidel da Silva Araújo
Doutor em Matemática, Professor do Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
https://orcid.org/0000-0002-0367-0339 • jogli.silva@ufrpe.br
Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Investigação; Redação – Preparação do Rascunho Original, Revisão e Edição; Revisão de Literatura, Análise de Dados

4 – Ricardo Nunes Machado Junior
Doutor em Matemática, Professor do Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
https://orcid.org/0000-0002-3324-8366 • ricardo.machadojunior@ufrpe.br
Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Redação – Preparação do Rascunho Original, Revisão e Edição; Revisão de Literatura, Análise de Dados

Como citar este artigo

Tanaka, T. Y.; Campos, G. P.; Araújo, J. G. S.; Machado Jr., R. N. Novas classes de soluções para um problema extremal com sequências numéricas. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.48, 2026. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X88711.