

Simulação da dispersão de poluentes usando o método de decomposição

Kelen B. de Mello^{1*}, Jonas C. Carvalho², Marco T. Vilhena³

¹Universidade de Caxias do Sul /DEME/ Brasil

²Universidade Federal de Pelotas/Brasil

³Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PROMECC /Brasil

Resumo

A idéia principal deste trabalho é resolver a equação de Langevin analiticamente pelo método de decomposição assumindo condições de turbulência Gaussiana e não-Gaussiana.

1. Introdução

Nos modelos de partículas Lagrangeanas, a turbulência na direção horizontal é estacionária, homogênea e Gaussiana; na direção vertical, a turbulência é estacionária, não-homogênea e Gaussiana ou não-Gaussiana de acordo com as condições de estabilidade.

O movimento destas partículas é regido pela equação de Langevin descrita como,

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(x_i, u_i)dt + b_i(x_i, u_i)\xi_i(t), \quad (1a)$$

$$dx_i = (U_i + u_i)dt, \quad (1b)$$

onde u é a velocidade turbulenta, U é velocidade média do vento, x é o deslocamento de cada partícula, $a_i dt$ é o termo determinístico, $b_i \xi_i$ é o termo estocástico e ξ_i é um incremento de distribuição randômica.

2. Solução pelo método de decomposição

A solução de uma equação de Langevin, neste trabalho, é obtida pelo método de decomposição, proposto por Adomian (1988). O método de decomposição é um eficiente procedimento para a solução analítica de equações diferenciais não-lineares. A idéia principal é expandir as variáveis de-

pendentes em séries e reescrever o problema não-linear num sistema de problemas lineares recursivos que tem soluções conhecidas.

2.1. Solução para turbulência Gaussiana

No caso da turbulência Gaussiana a equação (1a), torna-se:

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha_i u_i = \beta_i + \gamma_i u_i^2 + F(t), \quad (2)$$

onde as variáveis α_i , β_i , γ_i , $F(t)$, estão definidas no artigo de Carvalho, Vilhena, Moreira (2004).

Aplicando o método de decomposição na equação (2) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + \alpha_i(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) = \beta_i + F(t) + \\ + \gamma_i(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + \dots + 2u_1u_2 + \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

Reescrevendo a equação (3) como um sistema recursivo de equações diferenciais lineares e resolvendo-o, tem-se:

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^t (\beta_i + F(t)) dt + u_0(0), \\ u_1 &= \int_0^t (\gamma_i u_0^2 - \alpha_i u_0) dt + u_1(0), \\ u_2 &= \int_0^t (\gamma_i (u_0^2 + 2u_0u_1) - \alpha_i u_1) dt + u_2(0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4)$$

2.1. Solução para turbulência Não-Gaussiana:

Se a distribuição da velocidade vertical turbulenta é não-Gaussiana, na camada convectiva da camada limite planetária, a PDF da velocidade turbulenta pode ser representada como uma combinação linear de duas distribuições Gaussiana (PDF bi-Gaussiana) (Baerentsen e Berkowicz, 1984). Aplicando

$$\frac{dw}{dt} + \alpha_w w = \beta_w + \gamma_w + F(t), \quad (5)$$

onde α_w , β_w , γ_i e $F(t)$ são os mesmos utilizados no artigo de Carvalho, Vilhena, Moreira (2004).

Aplicando o método de decomposição na equação (5) tem-se:

$$\frac{d}{dt}(w_0 + w_1 + w_2 + \dots) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots)(w_0 + w_1 + w_2 + \dots) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + F(t) \quad (6)$$

Reescrevendo a equação (6) como um sistema recursivo de equações diferenciais lineares e resolvendo-o, tem-se:

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_0^t F(t) dt + w_0(0), \\ w_1 &= \int_0^t (\beta_0 + \gamma_0 - \alpha_0 w_0) dt + w_1(0), \\ w_2 &= \int_0^t (\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 w_0 + (\alpha_0 + \alpha_1) w_1) dt + w_2(0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

3. Resultados e conclusões

Os resultados encontrados por este método, são comparados com os resultados obtidos experimentalmente por Gryning e Lyck (1984) no experimento de Copenhagen, estão apresentados na Tabela 1 e na Figura 1.

Tabela 1. Dados estatísticos

Model	NMSE	FB	FS	R	FA2
Adomian Gaussiano	0.03	0.049	0.010	0.944	1.00
Adomian bi-Gaussiano	0.22	0.354	0.068	0.861	0.783

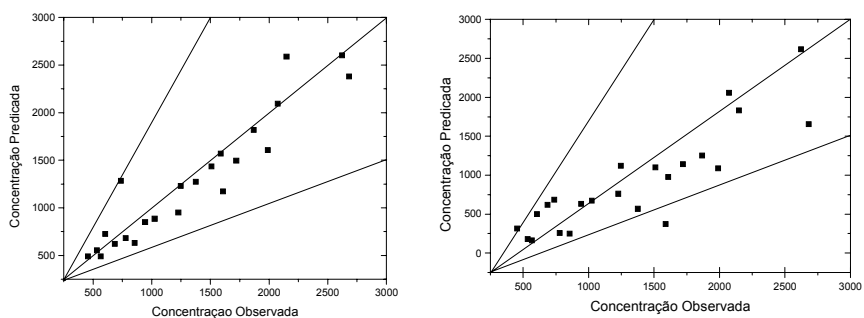


Figura 1. Gráfico de espalhamento dos dados observados experimentalmente com os dados obtidos pelo modelo: (a) turbulência Gaussiana, (b) turbulência bi-Gaussiana.

A análise dos resultados no gráfico de espalhamento e nos dados estatísticos confirmam os bons resultados encontrados para o modelo Gaussiano, enquanto para o modelo bi-Gaussiano, os resultados são satisfatório, no sentido que são aceitáveis. Pretende-se e esperas-se melhorar os resultados para o modelo bi-Gaussiano reformulando o sistema recursivo no método de decomposição usando série de Taylor.

4. Referências

- Adomian, G, 1988. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, **135**, 501–544.
- Carvalho, J. C., Vilhena, M. T., Moreira, D. M., 2004. An alternative numerical approach to solve the langevin equation applied to air pollution dispersion. *Water, Air, and Soil Pollution*. **163**, 103-118.
- Gryning, S.E. and Lyck, E., 1984. Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *Amer. Meteor. Soc.* **23**, 651-660.