Derivação do Modelo de Pluma Gaussiana empregando o Método de Transformadas Integrais

Charles R. P. Szinvelski, Lidiane Buligon, Gervásio A. Degrazia

Universidade Federal de Santa Maria, PPGFis, Santa Maria, RS
e-mail: charless@mail.ufsm.br

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar a dedução da fórmula gaussiana para o prognóstico da dispersão tridimensional de escalares na atmosfera, sob hipóteses de homogeneidade e turbulência bem-desenvolvida. Devido a sua natureza analítica, este modelo tem um baixo custo computacional e apresenta resultados razoáveis quando confrontado a experimentos de dispersão. (Degrazia (1998)).

2. Dedução

A equação de difusão é obtida através da reunião da equação da Continuidade e a Lei de Fick (Machado(2004)), escritas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{j} = -K_\alpha \nabla \rho \qquad (1)\text{-}(2)$$

onde $\rho \equiv \rho(\vec{x},t)$ e K_α é o coeficiente de difusão, sendo constante em cada direção. Assim a equação de difusão é expressa por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \qquad (3)$$

A equação acima é conhecida como Modelo de Pluma Gaussiana.

A solução da equação acima pode ser obtida aplicando-se a Transformada de Fourier, com as condições de contorno dadas por:

Condição inicial:

$$\rho(x,y,z,t=0) = M\delta(x)\delta(y)\left[\delta(z-h)+\delta(z+h)\right] \qquad (4)$$

Condição de contorno:

$$\rho(\pm\infty,0) \to 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla\,\rho(\pm\infty,0) \to 0 \qquad (5)$$

Sendo que *M* é a massa do poluente emitido, δ é a função generalizada Delta de Dirac e *h* representa a altura do centro da pluma (Venkatram (1998)). Assume-se que o poluente é refletido no solo.

A Transf. de Fourier e sua inversa são dadas, respectivamente por:

$$F\left(\vec{\xi},t\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\vec{\mathrm{x}},t\right)e^{\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{\mathrm{x}}\right)}dxdydz$$

$$\rho\left(\vec{\mathrm{x}},t\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\vec{\xi},t\right)e^{\left(i\vec{\xi}\cdot\vec{\mathrm{x}}\right)}d\xi_x d\xi_y d\xi_z . \qquad (6)\text{-}(7)$$

A derivada da equação (6) em relação ao tempo é:

$$\frac{dF\left(\vec{\xi},t\right)}{dt}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\rho\left(\vec{\mathrm{x}},t\right)}{\partial t}e^{\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{\mathrm{x}}\right)}dxdydz \qquad (8)$$

Substituindo a equação (3) em (8), resulta

$$\frac{dF\left(\vec{\xi},t\right)}{dt}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_x\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right]e^{\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{\mathrm{x}}\right)}dxdydz.$$

Resolvem-se as integrais acima por integração por partes e utilizando-se a condição (5), obtém-se

$$\frac{dF\left(\vec{\xi},t\right)}{dt}=\frac{-1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\left(K_x\xi_x^2+K_y\xi_y^2+K_z\xi_z^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\vec{\mathrm{x}},t\right)e^{\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{\mathrm{x}}\right)}dxdydz.$$

Pela equação (6) obtém-se a seguinte equação diferencial,

$$\frac{dF\left(\vec{\xi},t\right)}{dt}=-\left(K_x\xi_x^2+K_y\xi_y^2+K_z\xi_z^2\right)F\left(\vec{\xi},t\right). \qquad (9)$$

Resolve-se (9) pelo método de separação das variáveis, resultando

$$F\left(\vec{\xi},t\right)=F\left(\vec{\xi},0\right)e^{\left[-\left(K_x\xi_x^2+K_y\xi_y^2+K_z\xi_z^2\right)t\right]} \qquad (10)$$

mas, $F\left(\vec{\xi},0\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\vec{x},0\right)e^{\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{x}\right)}dxdydz$, e pela C.I. (4),

tem-se $F\left(\vec{\xi},0\right)=\frac{M}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\left[e^{\left(-i\xi_z h\right)}+e^{\left(i\xi_z h\right)}\right]$, e substituindo-a em (10):

$$F\left(\vec{\xi},t\right)=\frac{M}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\left[e^{\left(-i\xi_z h\right)}+e^{\left(i\xi_z h\right)}\right]e^{\left[-\left(K_x\xi_x^2+K_y\xi_y^2+K_z\xi_z^2\right)\right]t}. \qquad (11)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, equação (7):

$$\rho\left(\vec{x},t\right)=\frac{M}{\left(2\pi\right)^{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{\left(-i\xi_z h\right)}+e^{\left(i\xi_z h\right)}\right]e^{\left[-\left(K_x\xi_x^2+K_y\xi_y^2+K_z\xi_z^2\right)t\right]}e^{\left(i\vec{\xi}\cdot\vec{x}\right)}d\vec{\xi}$$

Resolvendo as integrais acima, obtém-se

$$\rho\left(\vec{x},t\right)=\frac{M}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{K_x t}}e^{\left(\frac{-x^2}{4K_x t}\right)}\frac{1}{\sqrt{K_y t}}e^{\left(\frac{-y^2}{4K_y t}\right)}\frac{1}{\sqrt{K_z t}}\left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{4K_z t}\right)}+e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{4K_z t}\right)}\right]$$

Para grandes tempos de difusão pode-se utilizar que $2K_\alpha t=\sigma_\alpha^2$ com $\alpha = x, y$ e z, assim

$$\rho\left(x,y,z\right)=\frac{M}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\frac{1}{\sigma_x}e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}\right)}\frac{1}{\sigma_y}e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)}\frac{1}{\sigma_z}\left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}+e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}\right]. \qquad (12)$$

Para representar uma fonte pontual contínua, assumem-se condições estacionárias e as coordenadas são transformadas de tal modo que o vento médio coincida com a direção longitudinal x. Substitui-se a razão entre a massa e o parâmetro de dispersão na direção-x, $M/\sqrt{2\pi}\sigma_z \quad (g/m)$ pela razão entre a taxa de emissão e a velocidade média do vento na direção-x, $Q/\bar{u} \quad (g/m)$, assim

$$\rho(x,y,z)=\frac{Q}{(2\pi)\bar{u}}\frac{1}{\sigma_y}e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)}\frac{1}{\sigma_z}\left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}+e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}\right], \qquad (13)$$

tomando $\rho_y(x,z)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\bar{u}}\left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}+e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)}\right]$, (14)

a qual representa a concentração integrada lateralmente. Logo

$$\rho(x,y,z)=\frac{\rho_y(x,z)}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)}. \qquad (15)$$

3. Conclusão

Se comparado com Modelos de Deslocamento Aleatório e LES, sua simplicidade, juntamente com os bons resultados gerados, o tornam uma prática ferramenta de teste para a validação de novas hipóteses e parametrizações aplicados em problemas de dispersão.

4. Agradecimento

Trabalho parcialmente financiado pela CAPES.

5. Referência bibliográfica

DEGRAZIA, G. A. Modelling dispersion from elevated sources in a planetary layer dominated by moderate convection. *Il Nuovo Cimento*, V. 21, p. 345-353, 1998.

MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 600 p, 2004.

VENKATRAM, A. Dispersion in the stable boundary layer. In*: Venkatram, A., Wyngaard, J. C. Eds. Lectures on Air Pollution Modeling. American Meteorological Society*, Boston, p.390, 1988.