Solução analítica da equação de advecção-difusão considerando fechamento não-local da turbulência e condições de vento fraco

Daniela Buske[1*], Marco T. Vilhena[1], Davidson M. Moreira[2], Tiziano Tirabassi[3]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul – PROMEC – Brasil
e-mail: buske@mecanica.ufrgs.br , bolsista CNPq
[2] Universidade Federal de Pelotas, UNIPAMPA – Bagé – Brasil
[3] Institute ISAC of CNR – Bologna – Italy

Resumo

Neste trabalho consideramos o fechamento não-local da difusão turbulenta na equação de advecção-difusão. Obtemos uma solução analítica para a equação de advecção-difusão usando o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*). Para testar a nova solução analítica, as concentrações máximas obtidas são comparadas com os dados experimentais do experimento de ITT Delhi para condições de vento fraco.

1. A solução analítica

Combinando a parametrização para o termo de contragradiente proposta por van Dop e Verver (2001) com a equação de advecção-difusão, em condições estacionárias, e integrando-se lateralmente temos que:

$$u\frac{\partial c}{\partial x}+w\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta u\frac{\partial c}{\partial x}\right)+ \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta w\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right) \quad , \qquad (1)$$

onde $\beta = 0.5 S_k \sigma_w T_{L_w}$ para $0 < z < h$ e $x > 0$, S_k é *skewness*, T_{Lw} é a escala de tempo Lagrangeana e σ_w é a variância da velocidade turbulenta vertical. $c(x,z)$ é a concentração de poluente, K_x e K_z são os coeficientes de difusão turbulenta longitudinal e vertical, respectivamente, e aqui são funções das variáveis x e z, u é a velocidade longitudinal do vento médio orientado e função da variável z e w é a velocidade vertical do vento.

A Eq. (1) está sujeita as condições de contorno de fluxo nulo no solo ($z = 0$) e no topo da CLP ($z = h$). Assumimos uma fonte contínua com taxa de emissão constante Q na altura da fonte H_s. Além disto, para longe da fonte (L_*) temos que $\partial c(L_*, z)/\partial x = 0$ em $x = L_*$.

É importante observar que, na Eq. (1), quando $S_k \to 0$ temos que $\beta \to 0$ resultando no problema resolvido em Buske et al. (2007b) para o caso com fechamento Fickiano da turbulência. A Eq. (1) é resolvida pela técnica GILTT cuja equação transformada é uma equação diferencial ordinária matricial de segunda ordem que é resolvido analiticamente pelo método de redução de ordem, transformada de Laplace e diagonalização. Maiores detalhes são encontrados nos trabalhos (Buske et al., 2007a) e (Buske et al., 2007b).

Neste trabalho, consideramos que a concentração máxima para o problema tridimensional pode ser escrita como o produto da solução bidimensional por uma Gaussiana em y, ou seja:

$$C(x, y, z) = c(x, z) e^{\left(-y^2/2\sigma_y^2\right)} / \sqrt{2\pi}\sigma_y \qquad (2)$$

onde σ_y é parâmetro de dispersão lateral e $c(x, z)$ é a solução da Eq. (1).

2. Resultados numéricos e conclusões

Com o objetivo de testar a nova solução analítica aqui encontrada, na obtenção dos resultados numéricos utilizamos os dados do experimento de dispersão em condições instáveis de vento fraco realizados pelo *Indian Institute of Technology* (ITT Delhi) (Sharan et al., 2002). As expressões utilizadas para K_x, K_z, σ_y e β são apresentadas, respectivamente, nos trabalhos de (Degrazia et al., 1997, 1998, 2002). Escolhemos o perfil de vento potência. Para a obtenção dos resultados com a precisão desejada utilizamos 60 autovalores na solução em série.

Na figura 1, podemos ver o gráfico de espalhamento dos dados observados no experimento ITT Delhi versus os dados preditos pela GILTT. Foi considerado $S_k = 0.6$. Os resultados estatísticos (Hanna, 1989) são apresentados na tabela 1. Podemos observar que as concentrações máximas calculadas reproduzem de forma satisfatória os resultados experimentais.

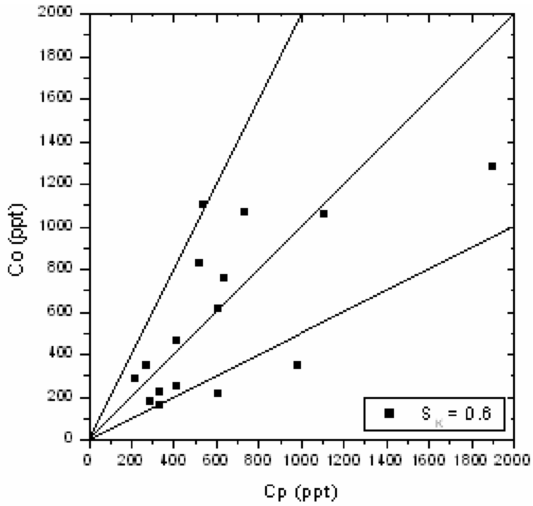

Figura 1. Gráfico de espalhamento dos dados observados e preditos pelo modelo.

Tabela 1. Dados estatísticos obtidos pelo modelo GILTT.

	SK = 0.6
Nmse	0.28
Cor	0.69
Fa2	0.75
Fb	-0.08
Fs	-0.09

Esperamos melhorar estes resultados usando a solução analítica encontrada por este método para o problema tridimensional de advecção-difusão (Segatto et al., 2006).

3. Referências bibliográficas

Buske, D., Vilhena, M.T., Moreira, D.M. and Tirabassi, T., 2007a. An analytical solution of the advection-diffusion equation considering non-local turbulence closure. **Environ. Fluid Mechanics** 7, 43-54.

Buske, D., Vilhena, M.T., Moreira, D.M. and Tirabassi, T., 2007b. Simulation of pollutant dispersion for low wind conditions in stable and convective planetary boundary layer. **Atmos. Environ**. 41, 5496-5501.

Degrazia, G.A., Campos Velho, H.F. and Carvalho, J.C., 1997. Nonlocal exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. **Contr. Atmos. Phys**., 57-64.

Degrazia, G.A., Mangia, C. and Rizza, U., 1998. A comparison between different methods to estimate the lateral dispersion parameter under convective conditions. **J. Appl. Meteor**. 37, 227-231.

Degrazia, G.A., Moreira, D.M., Campos, C.R.J., Carvalho, J.C. and Vilhena, M.T., 2002. Comparison between an integral and algebraic formulation for the eddy diffusivity using the Copenhagen experimental dataset. **Il Nuovo Cimento** 25C (2), 207-218

Hanna, S.R., 1989. Confidence limits for air quality models, as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. **Atm. Environ**. 23, 1385-1395.

Segatto, C.F., Vilhena, M.T., Buske, D. and Moreira, D.M., 2006. An analytical solution for the time-dependent 3D advection-diffusion equation in cartesian geometry by integral transform technique. *In:* **International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics**, Hersonnisos (Creta, Grécia). Weinheim : Wiley - VCH, 299-302.

Sharan, M., Yadav, A.K., Modani, M., 2002. Simulation of short-range diffusion experiment in low wind convective conditions. **Atm. Environ**. 36, 1901–1906.

van Dop, H. and Verver, G., 2001. Countergradient transport revisited. **J. Atmos. Sci**. 58, 2240-2247.