Modelagem da dispersão de poluentes na atmosfera através da técnica GIADMT

Camila P. Costa[1*], Marco T. Vilhena[1], Tiziano Tirabassi[2], Davidson M. Moreira[3]

[1]PROMEC/UFRGS [*]*(bolsista CNPq)*
[2]CNR/ISAC – Institute of Atmospheric Sciences and Climate - Italy
[3]*Universidade Federal de Pelotas, UNIPAMPA – Bagé - Brasil*
e-mail: camila@mecanica.ufrgs.br

Resumo

Se apresenta a solução de uma equação que descreve um problema tridimensional difusivo-advectivo para simular a dispersão de poluentes na Camada Limite Planetária (CLP) através do método GIADMT (Generalized Integral Advection-Diffusion Multilayer Technique) bem como salientar os melhores resultados encontrados para a concentração na altura da fonte usando o algoritmo de *Talbot*.

1. Introdução

O método GIADMT (Costa et al. 2006) vem sendo empregado na resolução da equação de difusão-advecção tridimensional para simular o campo de concentração de poluentes na baixa atmosfera.

É um método que combina as bem conhecidas técnicas GITT cuja a idéia básica é encontrar a solução através de uma expansão em série, e ADMM, na qual a solução é determinada por uma integral de linha.

Devido a complexidade da integral de linha presente na solução encontrada pelo método GIADMT, devido a aplicação do ADMM, optou-se em resolvê-la numericamente, tornando assim, o GIADMT um método semi-analítico. Os resultados encontrados com a aplicação do GIADMT são bons, como pode ser comprovado nos trabalhos de Costa et al. 2006. Neste trabalho apresenta-se os melhores resultados encontrados para a concentração na altura da fonte usando o algoritmo de Talbot.

2. O modelo de poluição e solução via GIADMT

A equação de difusão-advecção tridimensional estacionária, que

modela a dispersão de poluentes na atmosfera pode ser escrita da seguinte forma:

$$u\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial c}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

para $0 < z < z_i$, $0 < y < L_y$ e $x > 0$, onde c indica a concentração média, u a componente do vento médio na direção x, K_y e K_z são os componentes cartesianos do coeficiente de difusão (z é a coordenada vertical).

Considera-se fluxo nulo na direção z no solo e no topo da CLP assim como na direção y em $y=0,L_y$, a fonte encontra-se na posição $x=0$, $z=H_s$ e $y=y_o$, descrita por $uc(0,y,z)=Q\delta(z-H_s)\delta(y-y_o)$ onde Q é a taxa de emissão e δ é a função delta de Dirac.

A solução do problema (1) é obtida pelo método GIADMT que faz uso de uma expansao em série, depois divide-se a CLP em N subcamadas obtendo-se um sistema de problemas que são resolvidos através da transformada de Laplace em x resultando numa equação diferencial ordinária que depende apenas de z. A concentração de poluentes é finalmente obtida aplicando a transformada inversa de Laplace, obtendo uma solução integral para o problema proposto:

$$\bar{c}_n(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\psi_j(y)}{\sqrt{N_j}}\frac{1}{2\pi i}\int_{i-\xi\infty}^{i+\xi\infty}e^{sx}\,\overline{c_{nj}}(s,z)\,ds \qquad (5)$$

onde

$$\overline{c_{nj}}(s,z)=C_{1n}e^{R_{nj}z}+C_{2n}e^{-R_{nj}z}+\frac{Q}{2R_{a_{nj}}}\left(e^{R_{nj}(z-H_s)}-e^{-R_{nj}(z-H_s)}\right)H(z-H_s) \qquad (6)$$

$$R_{nj}=\sqrt{\frac{su_n+K_{y_n}\lambda_j^2}{K_{z_n}}}\ ;\ R_{a_{nj}}=\frac{N_j^{1/2}}{\psi_j(y_0)}\sqrt{K_{z_n}\left(su_n+K_{y_n}\lambda_j^2\right)}\quad \text{e}\quad \mathrm{N}_j=\int_v\psi_j^2(y)dv$$

(7)

$\psi_j(y)=cos(l_j y)$, com $\lambda_j=j\pi/L_y$, são as autofunções e auto-valores, respectivamente do problema auxiliar de Sturm-Liouville (da GITT), $\bar{c}_n$ é a concentração na enésima subcamada, C_{1n} e C_{2n} são as constantes de integração e H é a função de Heavisite. A parte da Eq. (6) na qual aparece a Heavisite é considerada somente na subcamada que contém a fonte.

Devido a complexidade da integral de linha presente na solução

(5), optou-se resolvê-la através métodos numéricos, no presente trabalho considerou-se tanto o método da *Quadratura Gaussiana* (Stroud and Secrest, 1966) como o algoritmo de *Talbot* (Abate and Valkó, 2004) porque segundo a literatura este método de *Talbot* fornece resultados com a precisão desejada.

2.1. Esquema da Quadratura de Gauss

$$\bar{c}_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_j y)}{\sqrt{N_j}} \left[\sum_{k=1}^{N_k} \frac{P_k}{x} w_k \overline{c_{nj}}\left(\frac{P_k}{x}, z\right) \right] \tag{8}$$

onde w_k e P_k, são os pesos e as raízes da Quadratura respectivamente.

2.2. Algoritmo de Talbot

$$\bar{c}_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(y)}{N_j^{1/2}} \left\{ \frac{r}{M^*} \left[\frac{1}{2} \overline{c_{nj}}(r,z) e^{rx} + \sum_{k=1}^{M^*-1} \mathrm{Re}\left[e^{xS(\theta_k)} \overline{c_{nj}}(s(\theta_k), z)(1 + i\tau(\theta_k)) \right] \right] \right\} \tag{9}$$

$$s(\theta_k) = r\theta(\cot\theta + i),\ \tau(\theta_k) = \theta_k + (\theta_k \cot\theta_k - 1)\cot\theta_k,\ \theta_k = \frac{k\pi}{M^*},\ -\pi < \theta < +\pi$$

onde *r* é um parametro experimental.

3. Resultados e conclusões

Para realizar as simulações do presente trabalho, utilizam-se os dados do experimento 8 de Copenhagen (Gryning and Lyck, 1984). Na Figura 1 é apresentado o gráfico do perfil vertical da concentração utilizando os esquemas numéricos de inversão aqui apresentados.

Observando a Figura 1a e 1b pode-se observar na altura da fonte ($115m$) uma melhora considerável dos resultados pelo método de *Talbot*. Portanto podemos afirmar que o método GIADMT com o algoritmo *Fixed Talbot* é um método eficiente para simulação de poluentes na atmosfera.

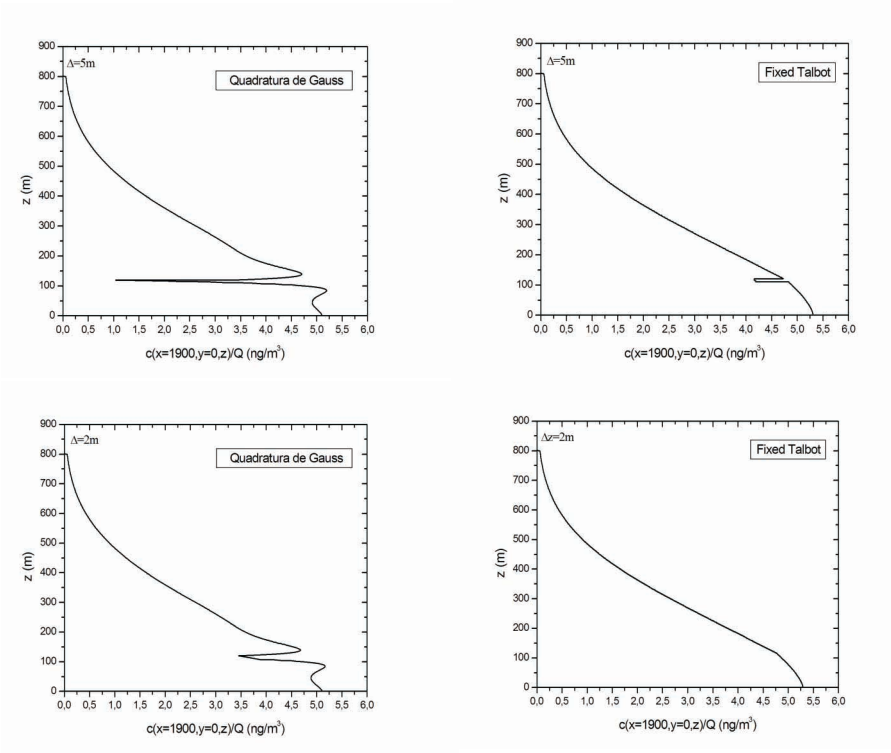

Figura 1. Perfil vertical da concentração a nível do solo ($\mu g / m^3$) com $\Delta z = 5m$ e $\Delta z = 2m$, utilizando os esquemas numéricos de inversão: a) Quadratura de Gauss, b) Algoritmo de Talbot

4. Referências

Abate, J. & Valkó, P.P. 2004. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**, 979–993.

Costa, C.P., Vilhena, M.T., Moreira, D.M., Tirabassi, T. 2006 "Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer". *Atmos. Environ. 40, 5659-5669.*

Gryning, S.E. and Lyck, E., 1984. Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. Amer. Meteor. Soc. 23, 651-660.

Stroud, A. H., and Secrest, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cli_s, N. J. (1966).