

# Teoria fracamente não-linear de ondas dispersivas para a atmosfera

Carlos Frederico Mendonça Raupp

*Departamento de Ciências Atmosféricas/Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas/Universidade de São Paulo  
Rua do Matão, 1226 – Cidade Universitária, São Paulo-SP, 05508-090  
e-mail: cfmraupp@model.iag.usp.br*

## Resumo

Neste artigo aborda-se a teoria fracamente não-linear de ondas dispersivas em fluidos geofísicos, onde é feita uma revisão dos principais resultados que têm sido publicados sobre esse tema, destacando as possíveis implicações para algumas questões fundamentais com relação à dinâmica da atmosfera. Especial ênfase é dada com relação à diferença entre as interações em latitudes médias e no guia de ondas equatorial. A análise aqui realizada se restringe ao caso em que os distúrbios ondulatórios são imersos num estado básico em repouso. Também são discutidos possíveis temas para trabalhos futuros com relação à aplicação dessa teoria para as equações que regem a dinâmica da atmosfera, incluindo o efeito da estratificação vertical e de escoamentos básicos mais realistas.

## Summary

This paper discusses on the weakly nonlinear theory of dispersive waves in geophysical fluid dynamics, pointing out the possible implications of the results published on this subject for some fundamental issues in atmospheric science. A special emphasis is given on the difference between the interaction in midlatitudes and in the equatorial wave-guide. The analysis employed here is focused on the case where the waves are embedded in a motionless background state. I also discuss some possible subjects for future work regarding the application of the weakly nonlinear theory for the governing equations of the atmosphere, which take into account both the

effects of the vertical stratification and the effects of more realistic background flows.

## 1. Introdução

Movimentos ondulatórios ocorrem na natureza numa diversa gama de sistemas físicos. No contexto dos movimentos ondulatórios na natureza, em geral, e em mecânica dos fluidos, em particular, existe uma clara distinção entre ondas dispersivas e não dispersivas. No contexto linear, esta distinção é claramente notável no sentido de que no caso de uma onda dispersiva cada componente harmônica na qual um distúrbio inicial qualquer é decomposto viaja com sua própria velocidade de fase individual, enquanto numa onda não dispersiva todas as componentes harmônicas se propagam com a mesma velocidade de grupo, como um pacote, preservando a forma do distúrbio original. No entanto, à medida que a não linearidade aparece, esta distinção no comportamento de ondas dispersivas e não dispersivas torna-se ainda mais marcante, levando a mecanismos de interação entre os modos bastante distintos. Numa onda não dispersiva, uma vez que todos os modos viajam com a mesma velocidade, a interação entre eles é bastante significativa, produzindo uma mudança na forma do pacote de ondas e, como ocorre em algumas situações envolvendo ondas em fluidos, levando à quebra da onda e à formação de choque (Boyd 1980). Por outro lado, no caso de uma onda dispersiva, devido ao fato que cada modo se propaga com sua própria velocidade, levando a uma dispersão do distúrbio inicial, exceto num intervalo curto de tempo, a interação entre os modos neste caso é muito fraca. Porém, uma exceção a essa regra surge quando ocorre o fenômeno da *ressonância*. Neste caso, quando um conjunto de modos entra em ressonância de modo que a fase relativa entre eles não varia com o tempo, a interação entre esses modos torna-se bastante expressiva (ver, por exemplo, Craik 1985). Por exemplo, num sistema dispersivo, com não linearidades quadráticas na mais baixa ordem, com a amplitude das ondas relativamente pequena (mas finita) de tal forma que estas preservem suas frequências características dentro de um período típico de interação, quando a fase relativa entre o produto de duas ondas devido aos termos não lineares e uma terceira onda não varia no tempo, ou varia muito pouco, as ondas envolvidas nesse trio interagem significativamente. Neste caso, esse trio de ondas é comumente referido como **tripleto ressonante** (ou tríade ressonante). Assim, num sistema dispersivo contendo não linearidades quadráticas na mais baixa ordem, se a amplitude típica do sistema é pequena de tal forma que as ondas lineares constituam a solução dominante, somente os tripletos ressonantes contribuem significativamente

para a evolução não linear do sistema. Como será mostrado mais adiante, para a grande maioria dos problemas em dinâmica de fluidos geofísicos, os termos não lineares nas equações governantes são sempre quadráticos.

Este fenômeno da ressonância triádica entre ondas dispersivas tem sido estudado em mecânica de fluidos, física de plasmas, ótica, engenharia elétrica, entre outros. A abordagem do presente artigo se restringe ao primeiro caso, mais especificamente para sistemas representativos da dinâmica de fluidos geofísicos em rotação, destacando sempre as possíveis implicações para a atmosfera. O fenômeno da ressonância não linear entre ondas em fluidos foi inicialmente investigado por Phillips (1960), que analisou o papel dos termos não lineares na evolução das ondas de gravidade superficiais de amplitude finita em águas profundas utilizando a teoria da perturbação. Phillips (1960) destaca que a relação de dispersão das ondas de gravidade superficiais em águas profundas é tal que interações triádicas ressonantes não são possíveis no espectro dessas ondas, e a não linearidade neste caso se manifesta na mais baixa ordem por meio de quartetos de ondas, através dos termos cúbicos. Entretanto, McGoldrick (1965) mostra que ressonâncias triádicas por meio de não linearidades quadráticas são possíveis no contexto de ondas de gravidade-capilares. Uma rica e completa discussão sobre ressonância triádica entre ondas dispersivas é encontrada em Bretherton (1964), que analisa um problema de uma simples equação de onda “forçada” por um termo quadrático. No contexto da dinâmica de fluidos geofísicos em rotação, o fenômeno da ressonância triádica entre ondas foi talvez primeiramente estudado por Longuet-Higgins e Gill (1967), que analisaram as interações não lineares ressonantes envolvendo ondas de Rossby num modelo barotrópico e não divergente. Duffy (1974) estudou as interações ressonantes no modelo de água-rasa com a aproximação do plano- $b$  de médias latitudes. Neste cenário, as interações triádicas são caracterizadas por duas ondas de gravidade-inerciais interagindo por meio de uma onda de Rossby, além das interações envolvendo somente ondas de Rossby, não sendo algebricamente possível a existência de tríades ressonantes envolvendo somente ondas de gravidade-inerciais. Domaracki e Loesch (1977), Loesch e Deininger (1979) e Raupp e Silva Dias (2006) estenderam a análise de Duffy (1974) para o plano  $b$ -equatorial, analisando as interações triádicas ressonantes envolvendo as ondas equatoriais.

No presente artigo será apresentada uma revisão da teoria de ondas dispersivas fracamente não-lineares em fluidos geofísicos em rotação, baseado nos trabalhos mencionados acima, enfatizando as possíveis implicações para algumas questões científicas relacionadas à dinâmica da atmosfera. A análise aqui realizada se restringe ao caso em que os distúrbios ondulatórios são imersos num estado básico em repouso, onde neste caso as ondas são linearmente neutras, ou seja, suas frequências temporais são

reais e as variações de amplitude são devidas exclusivamente às interações fracamente não lineares. Na Seção 2 será apresentado o formalismo teórico geral acerca da interação fracamente não-linear entre ondas dispersivas para um sistema hiperbólico genérico. Na Seção 3 esta teoria é aplicada no sistema de equações da água-rasa de médias latitudes, onde o parâmetro de Coriolis é suposto constante (aproximação do plano-f). A Seção 4 aborda esta teoria para as ondas equatorialmente confinadas, que correspondem às soluções ondulatórias das equações da água-rasa com a aproximação do plano b-equatorial obtidas inicialmente por Matsuno (1966). Possíveis linhas de pesquisa para trabalhos futuros com relação à aplicação dessa teoria nas equações que regem a dinâmica da atmosfera, incluindo o efeito da estratificação vertical e de escoamentos básicos mais realistas, são discutidas na Seção 5.

## 2. Formalismo geral

### 2.1 Desenvolvimento Teórico

Um problema genérico no qual os métodos de análise assintótica no limite fracamente não linear se aplicam envolve um sistema de equações diferenciais parciais do tipo

$$\xi_t + \mathfrak{L}(\xi) = \epsilon N(\xi, \xi) \quad (2.1)$$

onde  $\mathfrak{L}(\xi)$  e  $N(\xi, \xi)$  correspondem aos operadores linear e não-linear, respectivamente, aplicados no vetor estado  $x$ , que envolve as variáveis dependentes do modelo representado por (2.1). A não linearidade neste caso representada pelo termo  $N(\xi, \xi)$  deve ser pelo menos quadrática na mais baixa ordem e ambos os operadores  $\mathfrak{L}$  e  $N$  envolvem derivadas parciais das variáveis de estado representadas pelo vetor  $x$  com relação às variáveis independentes espaciais representadas pelo vetor  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ . O parâmetro adimensional e corresponde a uma medida da amplitude típica de  $x$ . O método de análise tipicamente empregado em (2.1) para  $\epsilon \ll 1$  é dado pela teoria da perturbação, que consiste em buscar uma solução para o sistema (2.1) da seguinte forma:

$$\xi = \xi^{(0)} + \epsilon \xi^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (2.2)$$

Neste caso, o problema de ordem dominante é dado pela versão linearizada de (2.1), i.e.,

$$\xi_t^{(0)} + \mathfrak{L}\xi^{(0)} = 0 \quad (2.3)$$

Supondo homogeneidade nas variáveis espaciais, segue que a equação (2.3) possui soluções de ondas da seguinte forma

$$\xi^{(0)} = \sum_p A_p \vec{R}_p(\vec{k}) e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{x} - i\omega_p t} + \text{c.c.} \quad (2.4)$$

onde c.c. denota o complexo conjugado do termo anterior,  $\omega_p$  refere-se à frequência temporal e  $\vec{k}_p$  ao vetor número de onda associados ao  $p$ -ésimo modo permitido pelo sistema 2.3. A solução de onda (2.4) leva ao seguinte problema de autovalor-autovetor

$$(-i\omega_p \mathbf{I} + \mathfrak{S}_{i\vec{k}}) \vec{R} = 0 \quad (2.5a)$$

Supõe-se que as autofreqüências  $\omega_p$  para  $p = 1, 2, \dots, m$  sejam reais e distintas de tal maneira que exista um conjunto completo de autovetores direito  $\vec{R}_p(\vec{k})$  e autovetores esquerdo  $\vec{L}_p(\vec{k})$  determinados por

$$\vec{L}(-i\omega_p \mathbf{I} + \mathfrak{S}_{i\vec{k}}) = 0 \quad (2.5b)$$

tal que  $\vec{L}_q(\vec{k}) \cdot \vec{R}_p(\vec{k}) = \delta_{pq}$ , sendo  $\mathfrak{S}_{i\vec{k}}$  a matriz obtida a partir de  $\hat{A}$  substituindo as derivadas espaciais por  $ik_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ ;  $\mathbf{I}$  corresponde à matriz identidade e  $\delta_{pq}$  refere-se ao delta de Kronecher. A partir de (2.5) segue que para que o sistema (2.3) apresente solução na forma (2.4), as freqüências  $\omega_p$  e o vetor número de onda  $\vec{k}_p$  devem satisfazer à seguinte relação de dispersão

$$\det(-i\omega_p \mathbf{I} + \mathfrak{S}_{i\vec{k}}) = 0 \quad (2.6)$$

Além disso, o modo  $p$  corresponde a uma onda dispersiva se o determinante da matriz Hessiana de  $\omega_p(\vec{k}_p)$  for diferente de zero, ou seja,

$$\det \left( \frac{\partial^2 \omega_p(\vec{k})}{\partial k_j \partial k_l} \right) \neq 0 \quad (2.7)$$

A análise aqui empregada se restringe a tais ondas. Soluções de mais alta ordem do sistema (2.1) tais como  $\xi^{(1)}$  satisfazem um problema linear forçado da seguinte forma

$$\xi_t^{(1)} + \mathfrak{S} \xi^{(1)} = \mathbf{N}^{(0)}(\xi^{(0)}, \xi^{(0)}) \quad (2.8)$$

onde  $N^{(0)}(\xi^{(0)}, \xi^{(0)})$  representa a contribuição de ordem dominante do termo não-linear  $N(\xi, \xi)$ . Como pode ser observado, a solução da parte homogênea de (2.8) é idêntica à solução de (2.3) dada por (2.4)-(2.6). Conseqüentemente, uma dificuldade adicional surge se o termo forçante em (2.8) for ressonante com algum modo  $p$ , que constitui uma solução da parte linear. Estes termos ressonantes resultam nas chamadas *soluções seculares*, que apresentam um crescimento linear em  $t$ . Neste caso, o método de múltiplas escalas deve ser usado para eliminar essas soluções seculares e, portanto, garantir soluções limitadas na escala rápida de tempo  $t$ . O método de múltiplas escalas consiste em supor que as amplitudes  $A_p$  de  $\xi^{(0)}$  sejam funções lentamente variáveis do tempo, ou seja, sejam funções da variável  $t = \varepsilon t$ . Neste caso, as derivadas temporais são escritas como

$$\xi_t \rightarrow \xi_t + \varepsilon \xi_{\tau} \quad (2.9)$$

e o problema para  $\xi^{(1)}$  é então escrito da seguinte forma

$$\xi_t^{(1)} + \mathfrak{L}\xi^{(1)} = N^{(0)}(\xi^{(0)}, \xi^{(0)}) \quad (2.10)$$

Assim, com a dependência da solução na escala longa de tempo, as soluções seculares são removidas desde que as amplitudes  $A_p$  satisfaçam à seguinte condição dada pela alternativa de Fredholm:

$$\frac{dA_p}{d\tau} = \sum_m \sum_n \eta_p^{mn} A_m^* A_n^* \quad (2.11)$$

Em (2.11), a somatória se dá para todos os modos  $m$  e  $n$  tais que

$$\begin{aligned} \vec{k}_p \pm \vec{k}_m \pm \vec{k}_n &= 0 \\ \omega_p \pm \omega_m \pm \omega_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Os modos  $p$ ,  $m$  e  $n$  cujas freqüências e números de onda satisfazem (2.12) constituem um **triplete ressonante**. Os coeficientes de acoplamento  $\eta_p^{mn}$  em (2.11) são dados por

$$\eta_p^{mn} = \vec{L}_p \bullet \left[ N(\vec{R}_m^*, \vec{R}_n^*) + N(\vec{R}_n^*, \vec{R}_m^*) \right] \quad (2.13)$$

Logo, estes coeficientes representam o grau de acoplamento intrínseco entre três modos quaisquer que constituem a solução de ordem dominante do sistema (2.1). Assim, na mais baixa ordem, toda a informação da não linearidade envolvendo as ondas permitidas pelo modelo está contida nesses coeficientes. No caso de um único triplete ressonante, o sistema (2.11) é dado por

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \eta_1^{23} A_2^* A_3^* \quad (2.14a)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = \eta_2^{13} A_1^* A_3^* \quad (2.14b)$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = \eta_3^{12} A_1^* A_2^* \quad (2.14c)$$

## 2.2 Propriedades dos tripletos ressonantes

Como mencionado anteriormente, o sistema (2.14) tem sido foco de muita pesquisa em mecânica de fluidos, bem como em ótica, física de plasmas e em outros ramos da ciência. Tipicamente, como ocorre na grande maioria dos problemas físicos, os coeficientes de interação  $\eta$  são reais ou imaginários puros. Neste contexto, se os coeficientes de interação  $\eta_1^{23}$ ,  $\eta_2^{13}$  e  $\eta_3^{12}$  possuírem o mesmo sinal, as amplitudes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  associada aos modos 1, 2 e 3, respectivamente, crescem ilimitadamente em  $t$ , apresentando singularidade em tempo finito. Tríades ressonantes que apresentam tal característica são denominadas tríades explosivas (ou tripletos explosivos). Este crescimento explosivo, obviamente, é inaceitável para qualquer problema físico, e as equações reduzidas (2.14) tornam-se inválidas após um certo intervalo de tempo. Neste caso, alguns efeitos de ordem mais alta desprezados até aqui devem ser incluídos para se obter uma descrição satisfatória do sistema. A existência de tríades ressonantes explosivas em problemas relacionados com mecânica de fluidos é possível somente na presença de um campo básico cisalhante e que apresente uma camada crítica (Becker e Grimshaw 1993), como será discutido na Seção 5. Logo, este caso está fora do escopo do presente artigo.

Por outro lado, se os coeficientes  $\eta_1^{23}$ ,  $\eta_2^{13}$  e  $\eta_3^{12}$  num tripleto ressonante possuírem sinais distintos, as amplitudes  $A_p$ ,  $p = 1, 2$  e  $3$ , são funções periódicas e limitadas em  $t$ , sendo expressas em termos de funções Elípticas (Bretherton 1964). Neste caso, a solução de ordem dominante do problema inicial dado por (2.1) é dada pela superposição de ondas quase lineares, cujas amplitudes são lentamente moduladas no tempo. Além disso, se os coeficientes de interação satisfizerem à condição

$$\eta_1^{23} + \eta_2^{13} + \eta_3^{12} = 0, \quad (2.15)$$

então os modos 1, 2 e 3 cujas amplitudes são governadas por (2.14) constituem uma *tríade conservativa*. A razão para esta rotulação pode ser facilmente verificada multiplicando às equações (2.14a), (2.14b) e (2.14c) por  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  e  $A_3^*$ , respectivamente, e somando as três equações resultantes. Neste caso, tem-se que se os coeficientes de interação satisfazem à relação (2.15), segue que

$$\sum_{p=1}^3 |A_p|^2 = \text{constante}$$

Usando a identidade de Parseval para a expansão (2.4), tem-se que

$$\|\xi^{(0)}\|^2 = \sum_p |A_p|^2$$

onde  $\|\xi^{(0)}\|^2$  refere-se à norma de  $x^{(0)}$  no espaço de Hilbert, que é positiva definida. Nos problemas físicos comumente encontrados, esta norma está associada com a contribuição de ordem dominante da energia total do sistema. Logo, tripletos ressonantes que satisfazem (2.15) conservam o termo de ordem dominante da energia total do sistema, que corresponde à própria energia total do sistema linearizado. A partir das equações para as energias  $E_p = |A_p|^2$ ,  $p = 1, 2$  e  $3$ , obtidas a partir de (2.14) obtém-se as relações de Manley-Rowe

$$\frac{1}{\eta_1^{23}} \frac{dE_1}{d\tau} = \frac{1}{\eta_2^{13}} \frac{dE_2}{d\tau} = \frac{1}{\eta_3^{12}} \frac{dE_3}{d\tau} \quad (2.16)$$

ou, alternativamente,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{E_1}{\eta_1^{23}} - \frac{E_2}{\eta_2^{13}} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{E_1}{\eta_1^{23}} - \frac{E_3}{\eta_3^{12}} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{E_2}{\eta_2^{13}} - \frac{E_3}{\eta_3^{12}} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Dessa forma, a partir das equações (2.15), (2.16) e (2.17) é possível verificar que numa interação triádica ressonante conservativa a onda que possui o coeficiente de interação com o sinal oposto dos outros dois modos (e, conseqüentemente, com o maior valor absoluto) sempre cede energia para (ou recebe energia das) outras duas ondas do tripleto. Este modo mais energeticamente ativo do tripleto é comumente referido como “onda bomba”. A partir da condição de ressonância para as freqüências temporais dada por  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ , juntamente com as condições (2.15)-(2.17), também segue que num tripleto ressonante conservativo os coeficientes de interação são proporcionais às respectivas freqüências temporais, ou seja,

$$\frac{\eta_1^{23}}{\omega_1} = \frac{\eta_2^{13}}{\omega_2} = \frac{\eta_3^{12}}{\omega_3} = \alpha_{123} \quad (2.18)$$

onde  $\alpha_{123}$  é um parâmetro que mede o grau de interação de um determinado tripleto ressonante. Com isso, nota-se que a onda de maior freqüência absoluta num tripleto ressonante conservativo é sempre a onda instável (onda bomba), ou seja, a onda que cede energia para as outras duas ou recebe energia dos outros dois modos. Da mesma maneira, um modo de freqüência nula não é energeticamente afetado por duas ondas que se propagam num tripleto ressonante conservativo, uma vez que o coeficiente de interação desse modo para este tripleto é nulo, de acordo com (2.18). Estas interações conservativas comumente ocorrem em mecânica dos fluidos para

o caso em que as ondas estão imersas num escoamento básico uniforme. Logo, os vínculos dados por (2.15)-(2.18) são válidos para as interações exploradas nas Seções 3 e 4 deste trabalho.

### 3. Interação fracamente não-linear em latitudes médias

Para analisar as características das ondas fracamente não-lineares no contexto da dinâmica de fluidos geofísicos para latitudes médias, considera-se o sistema de equações da água-rasa com rotação:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + f_0 \bar{v}^\perp + g \nabla h = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v} h) + H \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (3.1b)$$

onde  $(x, y, t) = (u, v)^T$  corresponde ao campo de velocidade bi-dimensional, sendo  $u$  e  $v$  suas respectivas componentes nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  e. Daqui a diante adotar-se-á a seguinte equivalência de notação para as coordenadas espaciais  $(x, y) \leftrightarrow (x_1, x_2)$ . A variável  $h$  em (3.1) corresponde à perturbação da altura da superfície livre da camada de fluido em relação ao seu valor médio representado  $H$ , que é comumente denominada altura equivalente. Os parâmetros  $f_0$  e  $g$  em (3.1) correspondem, respectivamente, ao parâmetro de Coriolis e à aceleração efetiva da gravidade. O parâmetro de Coriolis neste caso é suposto constante. Esta é a conhecida aproximação do plano- $f$ , que consiste em expandir o parâmetro de Coriolis numa série de Taylor em torno de uma latitude  $y = y_0$  e reter somente o primeiro termo  $f_0 = f(y_0)$ . Esta é uma aproximação razoável para a dinâmica dos movimentos atmosféricos de grande-escala em latitudes médias. O sistema (3.1) pode ser adimensionalizado e escrito na forma vetorial como em (2.1) da seguinte maneira:

$$\xi_t + \mathfrak{I}(\xi) = \varepsilon N(\xi, \xi) \quad (3.2)$$

sendo que  $\xi = (\bar{v}, h)^T$  representa o vetor estado e os operadores linear e não linear são expressos como

$$\mathfrak{I}(\xi) = \begin{pmatrix} \bar{v}^\perp + \nabla h \\ F \nabla \cdot \bar{v} \end{pmatrix}, \quad N(\xi, \xi) = -\bar{v} \cdot \nabla \xi - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \nabla \cdot \bar{v} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Em (3.2),  $\varepsilon = \text{Ro} = U / (L f_0)$  representa o número de Rossby e  $F = (L_R / L)^2$ , sendo  $L_R = \sqrt{gH} / f_0$  o raio de deformação de Rossby. O sistema (3.2) é adimensionalizado utilizando o seguinte escalonamento:

$$(u,v) \sim O(U) (u',v'), (x,y) \sim O(L) (x',y'), t \sim f_0^{-1} t', gh \sim O(f_0 LU) h' \quad (3.4)$$

onde “'” foi omitido em (3.2)-(3.3) por simplicidade. Para os movimentos de grande-escala na atmosfera, é razoável supor  $L \sim 1500\text{Km}$ ,  $f_0 \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $U \sim 5\text{m/s}$  e  $H \sim 10\text{Km}$ , implicando em  $\varepsilon \sim 0,03$  e  $F \sim 2,1$ . Assim, a análise assintótica fracamente não linear empregada na Seção 2 é conveniente para o sistema (3.2)-(3.3). Assim, supondo que  $0 < \varepsilon \ll 1$  e  $F = O(1)$ , emprega-se o mesmo procedimento adotado na seção anterior e obtém-se a solução de ordem dominante do tipo

$$\xi^{(0)}(x, y, t, \varepsilon t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{r=1}^3 A_{k,l,r}(\tau) \bar{\mathbf{R}}_{k,l,r} e^{ikx + ily - i\omega_{k,l,r}t} \quad (3.5)$$

Em (3.5) as autofrequências  $\omega_{k,l,r}$  e os autovetores direito  $\bar{\mathbf{R}}_{k,l,r}$  satisfazem o seguinte problema de autovalor-autovetor:

$$(-i\omega l + \mathfrak{S}_{ik}) \bar{\mathbf{R}} = 0 \quad (3.6a)$$

onde 
$$\mathfrak{S}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & ik \\ 1 & 0 & il \\ Fik & Fil & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6b)$$

Assim, a partir de (3.6) segue para cada número de onda  $\vec{k} = (k,l)^T$  fixado, existem três modos de oscilação no tempo permitidos:

$$\omega_{k,l,1} = 0 \quad (3.7a)$$

$$\omega_{k,l,2(3)} = \pm \left( 1 + F|\vec{k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7b)$$

O primeiro autovalor dado por (3.7a) corresponde aos modos geostróficos, enquanto (3.7b) refere-se às ondas de gravidade-inerciais, uma se propagando para oeste e a outra para leste. Estas duas últimas também são conhecidas como ondas de Poincaré. Os autovetores direito associados a estes modos são dados por

$$\bar{\mathbf{R}}_{\vec{k},1} = [\bar{v}_{\vec{k},1}, h_{\vec{k},1}]^T = \begin{bmatrix} -il \\ ik \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\vec{k},2(3)} = [\bar{v}_{\vec{k},2(3)}, h_{\vec{k},2(3)}]^T = \begin{bmatrix} k\omega_{\vec{k},2(3)} + il \\ l\omega_{\vec{k},2(3)} - ik \\ F|\vec{k}|^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Assim, para um tripleto constituído pelos modos  $(\vec{k}_1, r_1)$ ,  $(\vec{k}_2, r_2)$  e  $(\vec{k}_3, r_3)$  satisfazendo à condição de ressonância  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$  e  $\omega_{\vec{k}_1, r_1} = \omega_{\vec{k}_2, r_2} + \omega_{\vec{k}_3, r_3}$ , as amplitudes evoluem na escala longa de tempo de acordo um sistema de EDOs do tipo (2.14), com os coeficientes de interação sendo dados por

$$\eta_1^{23} = -(\vec{v}_{\vec{k}_2, r_2} \bullet i\vec{k}_3) \langle \vec{L}_{\vec{k}_1, r_1} \bullet \vec{R}_{\vec{k}_3, r_3} \rangle - (\vec{v}_{\vec{k}_3, r_3} \bullet i\vec{k}_2) \langle \vec{L}_{\vec{k}_1, r_1} \bullet \vec{R}_{\vec{k}_2, r_2} \rangle - \left\langle \vec{L}_{\vec{k}_1, r_1} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\vec{k}_2 \bullet \vec{v}_{\vec{k}_2, r_2} h_{\vec{k}_3, r_3} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \vec{L}_{\vec{k}_1, r_1} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\vec{k}_3 \bullet \vec{v}_{\vec{k}_3, r_3} h_{\vec{k}_2, r_2} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (3.9)$$

Em (3.9),  $\langle \bullet \rangle$  representa o produto interno e  $\vec{L}_{\vec{k}_p, r_p}$ ,  $p = 1, 2$  e  $3$ , representa o autovetor esquerdo associado ao modo  $p$  e é dado por

$$\vec{L}_{\vec{k}, 1} = [iFl, -iFk, 1], \vec{L}_{\vec{k}, 2(3)} = [k\omega_{\vec{k}, 2(3)} - il, l\omega_{\vec{k}, 2(3)} + ik, |\vec{k}|^2] \quad (3.10)$$

As interações ressonantes representadas por (3.9) foram exploradas por Duffy (1974) e Majda (2003). Majda (2003) analisou essas interações utilizando um formalismo que difere sutilmente em conceito do método aqui empregado, mas que leva ao mesmo resultado. Este método utilizado por Majda (2003) para estudar as ressonâncias não-lineares nas equações (3.1) é conhecido como o método da média sobre ondas rápidas. O método da média sobre ondas rápidas consiste no método de múltiplas escalas temporais com uma separação da solução com relação às dependências nas escalas rápida e longa de tempo, onde os termos de ordem dominante são singulares. Neste caso, a componente da solução que varia na escala longa de tempo é obtida através de uma média sobre a escala rápida de tempo. Este método é normalmente empregado para se estudar a interação entre fenômenos que apresentam escalas de tempo bastante distintas, como é o caso do modelo abordado na presente seção, onde existe uma clara separação entre as frequências temporais das ondas de gravidade-inerciais e dos modos geostróficos. Majda mostra que as possíveis ressonâncias triádicas no sistema aqui analisado são dadas por tripletos constituídos somente por modos geostróficos e tripletos constituídos por duas ondas de gravidade-inerciais e um modo geostrófico. Duffy (1974) também estendeu a análise

aqui empregada de modo a considerar a pequena correção no parâmetro de Coriolis dada pelo efeito b. Neste caso, os modos puramente geostróficos são substituídos pelas ondas de Rossby, que possuem baixa frequência e, portanto, um balanço geostrófico aproximado entre os campos do vento e massa. Em ambos os casos, tanto no plano-f quanto no plano-b de latitudes médias, é algebricamente impossível a existência de tripletos ressonantes envolvendo somente ondas de gravidade-inerciais.

Além disso, por argumentos de conservação de energia, num triplete ressonante constituído por duas ondas de gravidade-inerciais e um modo geostrófico, este último apresenta seu coeficiente de interação nulo, de acordo com a condição (2.18). Conseqüentemente, neste tipo de interação ressonante o modo geostrófico age como um catalizador, permitindo e controlando a troca de energia entre as duas ondas de gravidade-inerciais mas sem ser afetado por essas ondas. Esta propriedade dos tripletos ressonantes constituídos por um modo geostrófico e duas ondas de gravidade-inerciais apresenta uma implicação fundamental para a dinâmica do escoamento atmosférico em latitudes médias. É bastante conhecido que a dinâmica da circulação atmosférica de grande-escala em médias latitudes é razoavelmente bem descrita pelo sistema quase-geostrófico. Além da rápida dispersão da energia pelas ondas de gravidade-inerciais, isto também se deve essencialmente ao fato de que, uma vez que existe uma clara separação entre as escalas de tempo dos modos geostróficos e das ondas de gravidade-inerciais, se for tomada uma média sobre um certo intervalo de tempo, essas oscilações rápidas resultantes da propagação das ondas de alta frequência desaparecem. Conseqüentemente, mesmo para uma condição inicial da atmosfera em latitudes médias não geostroficamente balanceada, uma vez que os modos geostróficos não são afetados pelas ondas de gravidade-inerciais, a contribuição desses modos para o escoamento atmosférico em médias latitudes tende a prevalecer num sentido médio, independentemente da propagação das ondas de alta frequência.

As interações envolvendo somente as ondas lentas estão inseridas na classe de tripletos estudada por Longuet-Higgins e Gill (1967) e Ripa (1981). Essas interações, além de conservarem a energia total, conservam também a enstrofia. Conseqüentemente, nesses tripletos ressonantes envolvendo somente os modos quase-geostróficos, a onda de maior frequência absoluta corresponde ao modo que possui o número de onda total  $|\vec{k}|$  intermediário. Este vínculo implica numa efetiva cascata invertida da energia em direção às ondas mais longas e uma efetiva cascata direta de enstrofia em direção às ondas mais curtas.

#### 4. Interação fracamente não-linear na região equatorial

Um modelo que contém os ingredientes dinâmicos essenciais que descrevem os movimentos atmosféricos e oceânicos de grande-escala horizontal e confinados na região equatorial é dado pelo modelo barotrópico divergente onde os efeitos dinâmicos da rotação da Terra e da esfericidade da mesma sobre os movimentos de grande-escala são representados pela aproximação do plano  $\beta$ -equatorial, na qual o parâmetro de Coriolis é dado por  $f = \beta y$ , sendo  $y$  a distância com relação ao equador orientada para norte

e  $\beta = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=0}$  é o parâmetro de Rossby, que neste caso é suposto constante.

Neste caso, as equações governantes são similares às equações (3.1), mas com  $f_0$  substituído por  $\beta y$ . Assim como na seção anterior, é conveniente escrever este sistema na forma vetorial como segue:

$$\xi_t + \mathfrak{S}(\xi) = \varepsilon N(\xi, \xi) = 0 \quad (4.1)$$

onde neste caso os operadores  $\mathfrak{A}$  e  $N$  são escritos como

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 0 & -y & \frac{\partial}{\partial x} \\ y & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}, \quad N(\xi, \xi) = \begin{bmatrix} -(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) \\ -(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) \\ -(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y}) - \phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Em (4.1)-(4.2) acima,  $(u, v)$  representam as componentes do campo de velocidade bi-dimensional nas direções  $(x, y)$  e  $\phi = gh$  corresponde à perturbação do geopotencial na superfície livre da camada de fluido;  $\varepsilon = Ro = U / (\beta L^2)$  representa o equivalente na região equatorial ao número de Rossby em latitudes médias. As equações acima são adimensionalizadas utilizando o seguinte escalonamento:

$$(x', y') = O(L)(x, y), \quad t' = t O(1/(\beta L)), \quad (u', v') = O(U)(u, v),$$

$$\phi' = O(\beta L^2 U) \phi \quad (4.3)$$

As condições de fronteira do sistema (4.1) são dadas por:

$$\xi(x, y, t, \varepsilon t) = \xi(x + L_x, y, t, \varepsilon t) \quad (4.4a)$$

$$\xi(x, y, t, \varepsilon t) \rightarrow 0 \text{ quando } |y| \rightarrow \infty \quad (4.4b)$$

sendo  $L_x$  o período zonal que pode ser usado para representar o perímetro equatorial da Terra na escala adimensional. O sistema (4.1)-(4.2) linearizado foi estudado por Matsuno (1966), que demonstrou que a mudança de sinal do termo de Coriolis em  $y = 0$  leva a existência de ondas equatorialmente confinadas. Estas soluções de ondas lineares obtidas por Matsuno (1966)

são dadas por

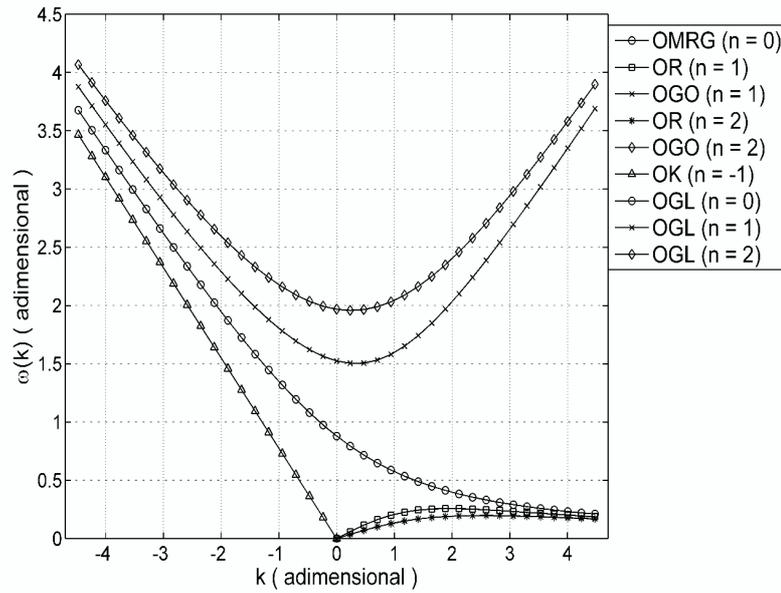
$$\xi_a(x, y, t) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_a - k_a)H_{n+1}(y) + n(\omega_a + k_a)H_{n-1}(y) \\ i(\omega_a^2 - k_a^2)H_n(y) \\ \frac{1}{2}(\omega_a - k_a)H_{n+1}(y) - n(\omega_a + k_a)H_{n-1}(y) \end{bmatrix} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\|\xi_a\|} e^{ik_x x - i\omega_a t} \quad (4.5)$$

onde  $\|\xi_a\|$  refere-se à norma das autofunções, enquanto o sub-índice  $a$  caracteriza um particular modo de expansão e é dado por  $a = (k, n, r)$ . Neste caso,  $k$  indica o número de onda zonal,  $n$  é um número inteiro que corresponde ao grau dos polinômios de Hermite  $H_n(y)$  em (4.5) e distingue a estrutura meridional das autofunções  $\xi_a(x, y)$  e  $r$  distingue os tipos de ondas a serem considerados. Tais ondas apresentam frequências temporais  $\omega_a$ . Estas auto-frequências  $\omega_a$  em (4.5) satisfazem à relação de dispersão mostrada na Fig. 1. De acordo com a Fig. 1, para cada  $k$  e  $n$  especificados, existem basicamente três modos de oscilação no tempo permitidos: dois de alta frequência ( $r = 2$  e  $r = 3$ ), que correspondem às ondas de gravidade-inerciais que se propagam para oeste e para leste, respectivamente, e um de baixa frequência (quase-geostrófico) ( $r = 1$ ), que corresponde às ondas de Rossby. Além desses três tipos básicos de ondas, a Fig. 1 mostra que o sistema (4.1) também permite a existência de duas ondas que são estritamente características da região equatorial: (i) a onda mista de Rossby-gravidade ( $n = 0$ ) e (ii) a onda de Kelvin ( $n = -1$ ). De acordo com a Fig. 1, estas duas ondas unem o regime de alta frequência com o de baixa frequência e apresentam um caráter misto de onda de gravidade e quase-geostrófica. A onda mista de Rossby-gravidade apresenta um comportamento do tipo gravidade-inercial (alta-frequência) no limite de ondas mais longas e, à medida que o número de onda zonal aumenta, tais ondas aproximam-se do limite de baixa frequência (quase-geostrófico). Por outro lado, as ondas de Kelvin aproximam-se do limite puramente geostrófico para  $k \rightarrow 0$  e do limite totalmente divergente para  $k \rightarrow \infty$ . No caso das ondas de Kelvin, as autofunções  $\xi_a(x, y)$  são estritamente confinadas na região equatorial e são dadas por

$$\xi_a(x, y) = \begin{bmatrix} H_0(y) \\ 0 \\ H_0(y) \end{bmatrix} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{(2\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} e^{ik(x-t)}, \quad \text{para } n = -1 \quad (4.6)$$

Dessa forma, como pode ser observado na Fig. 1, não existe na região equatorial a mesma separação entre ondas de alta frequência e ondas quase-geostróficas observada em latitudes médias. Um outro aspecto interessante a ser observado é que o sistema (4.1)-(4.2) também permite a exis-

tência de uma onda não-dispersiva, representada pelo modo de Kelvin ( $n = -1$ ). Logo, ondas dispersivas e não dispersivas co-existem no guia de ondas equatorial. Como será mostrado mais adiante, é possível que uma determinada componente do modo de Kelvin interaja com duas ondas dispersivas por meio de um tripleto ressonante.



**Figura 1.** Curvas de dispersão das ondas equatoriais para  $H = 250\text{m}$  e  $\beta = 2,3 \times 10^{-11}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ . As ondas são rotuladas como segue: onda de Rossby (OR), onda mista de Rossby-gravidade (OMRG), onda de gravidade-inercial para oeste (OGO), onda de gravidade-inercial para leste (OGL) e onda de Kelvin (OK)

O sistema (4.1) também possui um autovalor degenerado representado por  $\bar{\omega}_{0,n,1} = 0$ . As autofunções correspondentes a este autovalor degenerado são caracterizadas por uma estrutura zonalmente simétrica ( $k = 0$ ), absolutamente geostrófica e com a componente meridional do vento identicamente nula. Estas autofunções para estes modos geostróficos zonalmente simétricos podem ser escritas como (Silva Dias e Schubert 1979):

$$\xi_{0,n,1}(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \begin{bmatrix} u_a(y) \\ v_a(y) \\ \phi_a(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n[2(n+1)H_{n-1}(y) - H_{n+1}(y)] \\ 0 \\ n[-2(n+1)H_{n-1}(y) - H_{n+1}(y)] \end{bmatrix} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{[2^n n! \sqrt{\pi} 4n(n+1)(2n+1)]^{1/2}} \quad (4.7)$$

No caso fracamente não linear dado por (4.1)-(4.2), as ondas equatoriais representadas por (4.5), (4.6) e (4.7) constituem soluções de ordem dominante desde que, para todos os tripletos cujos modos satisfazem às relações de ressonância

$$\begin{aligned} k_a + k_b + k_c &= 0 \\ n_a + n_b + n_c &= \text{ímpar} \\ \omega_a + \omega_b + \omega_c &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

as amplitudes sejam lentamente moduladas no tempo de acordo com (2.11). Neste caso, os coeficientes de interação são dados por

$$\eta_a^{bc} = \left\langle \left\{ u_b i k_c \xi_c + v_b \frac{\partial \xi_c}{\partial y} + \left( i k_c u_c + \frac{\partial v_c}{\partial y} \right) \phi_b (0,0,1)^T + PC \right\} \bullet \xi_a^* \right\rangle \quad (4.9)$$

sendo o produto interno definido por

$$\langle \vec{p}(x, y) \bullet \vec{q}(x, y) \rangle = \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (p_1 q_1^* + p_2 q_2^* + p_3 q_3^*) dy dx \quad (4.10)$$

sendo  $\vec{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$  e  $\vec{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$  funções vetoriais quaisquer e  $*$  denota o complexo conjugado. O termo PC em (4.9) indica a permutação cíclica dos sub-índices **b** e **c**.

Como pode ser observado, a condição de ressonância em  $y$  associada à geometria do plano b-equatorial é menos restritiva que a condição no plano-f mostrada na seção anterior dada pela soma nula dos números de onda meridionais. Esta menor restrição resulta numa maior possibilidade de interações ressonantes na região equatorial em comparação com a dinâmica de latitudes médias. Por exemplo, as condições (4.8) permitem a existência de tripletos ressonantes compostos somente por ondas de gravidade-inerciais, o que não ocorre em latitudes médias como discutido na seção anterior.

Essas interações ressonantes no guia de onda equatorial foram estudadas por Domaracki e Loesch (1977), Loesch e Deininger (1979) e Raupp e Silva Dias (2006). Usando a conservação da energia do modelo representado por (4.1)-(4.2), Raupp e Silva Dias (2006) determinaram os possíveis tripletos ressonantes envolvendo as ondas equatoriais utilizando a condição (2.15) e obtiveram uma boa concordância com os resultados anteriores de Domaracki and Loesch (1977) e Loesch and Deininger (1979), que determinaram esses tripletos diretamente pelas condições (4.8). Alguns exemplos dos possíveis tripletos ressonantes determinados por Raupp e Silva Dias (2006) são mostrados na Tabela 1. Essas interações são fortemente dominadas por tripletos ressonantes constituídos por duas ondas de alta frequência (gravidade-inerciais, Kelvin ou ondas mistas longas) e uma de baixa frequência (Rossby ou mista Rossby-gravidade mais curta).

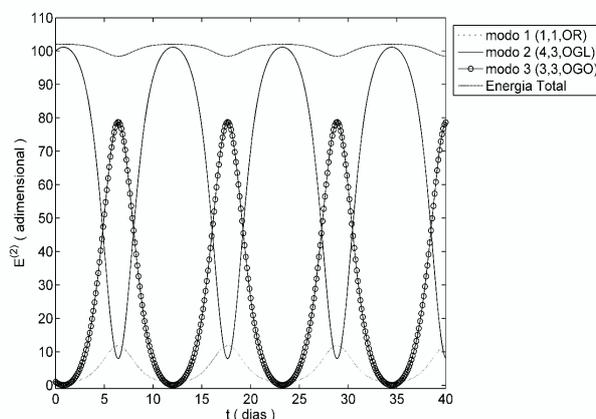
**Tabela 1.** Possíveis tripletos ressonantes envolvendo as ondas equatoriais para  $H = 250\text{m}$ . A tabela mostra, da esquerda para a direita, os modos constituintes dos tripletos e suas correspondentes autofreqüências e coeficientes de interação. Os modos são caracterizados, da esquerda para a direita, pelo número de onda zonal, modo meridional e tipo de onda. (Adaptado de Raupp e Silva Dias 2006)

	a	b	c	$\omega_a$	$\omega_b$	$\omega_c$	$\sigma_a^{bc}$	$\sigma_b^{ac}$	$\sigma_c^{ab}$
1	0,-1,K	1,1,WG	1,1,EG	0	1.71	-1.78	0	-0.1225	0.12765
2	1, 1, R	3,3,WG	4,3,EG	0.0758	2.687	-2.86	0.00607	0.04377	-0.0519
3	5,1,R	1,3,EG	6,3,WG	0.2711	-2.67	2.906	0.012614	0.054344	-0.0631
4	0,0,WG	4,1,WG	4,2,EG	1	1.83	-2.49	-0.028472	-0.064398	0.0909
5	0,1,R	5,2,R	5,0,M	0	0.183	0.577	0	-0.07624	0.07588
6	7,1,R	6,-1,K	1,3,EG	0.292	-1.39	-2.67	-0.00625	-0.049643	0.05715
7	5,-1,K	2,1,EG	7,1,WG	-1.156	-1.86	2.21	0.01684	0.076963	-0.0914
8	1,2,EG	3,1,WG	4,0,M	-2.27	1.756	0.64	0.09563	-0.0816	-0.0251
9	5,0,M	1,2,WG	4,3,EG	0.577	2.225	-2.86	-0.0185	-0.08019	0.10136
10	2,-1,K	7,0,M	5,2,EG	-0.462	0.477	-2.6	0.03389	0.007342	-0.04

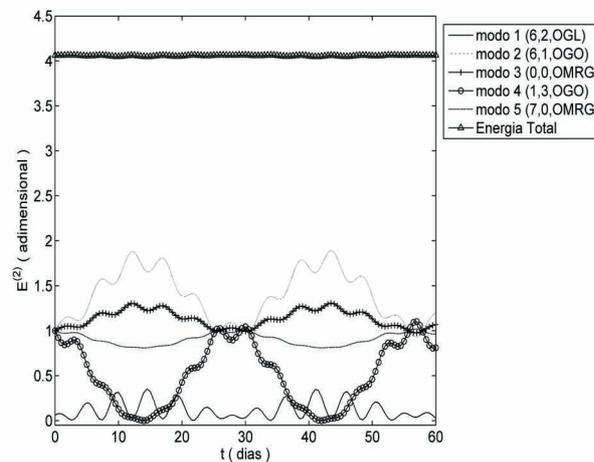
De acordo com a condição (2.18), nesses tripletos ressonantes as ondas de gravidade-inerciais constituem os modos mais energeticamente ativos, ou seja, experimentam uma variação de energia muito maior em comparação com a variação da energia dos modos de Rossby ou misto Rossby-gravidade, como ilustrado na Fig. 2. A Fig. 2, adaptada de Raupp e Silva Dias (2006), mostra a evolução temporal da energia modal correspondente à solução do problema de três ondas ressonantes dado por (2.14) para o tripleto formado por duas ondas de gravidade-inerciais e uma onda de Rossby (Tríade 2 da Tabela 1). Na integração ilustrada na Fig. 2, a maior parte da energia inicial é projetada no modo de maior freqüência absoluta do tripleto. Neste caso, a onda de maior freqüência absoluta é sempre a componente instável, ou seja, aquela que sempre cede energia para ou recebe energia das outras duas ondas no tripleto. Como também pode ser verificado através da Tabela 1, as interações ressonantes envolvendo um modo geostrófico zonalmente simétrico são bastante semelhantes às interações em latitudes médias, com esses modos agindo como catalizadores para as trocas de energia entre duas ondas que se propagam num tripleto ressonante.

Além do problema de três ondas ressonantes dado pelas equações (2.14), Raupp e Silva Dias (2006) também estudaram o problema de dois tripletos ressonantes acoplados por meio de um único modo. Raupp e Silva Dias (2006) destacam que, além das trocas de energia entre os modos que constituem um tripleto ressonante, dois modos de tripletos diferentes também podem trocar energia entre si por meio do modo que acopla os dois tripletos, desde que este modo seja o modo de maior freqüência absoluta nas duas tríades. Isto é ilustrado na Fig. 3 (adaptada de Raupp e Silva Dias

2006), que mostra a evolução temporal da energia modal referente a este problema de cinco ondas ressonantes com o primeiro triplete sendo constituído por uma onda de gravidade-inercial com propagação para leste com número de onda 6 e modo meridional  $n = 2$  (modo 1), uma onda de gravidade-inercial com propagação para oeste com o mesmo número de onda zonal do modo 1 e com modo meridional  $n = 1$  (modo 2), uma onda mista de Rossby-gravidade com  $k = 0$  (modo 3), e o segundo triplete sendo constituído pelo modo 1 além de uma onda de gravidade-inercial para oeste com número de onda 1 e modo meridional  $n = 3$  (modo 4) e uma onda mista de Rossby-gravidade com número de onda 7 (modo 5). Como pode ser observado na Fig. 3, essas trocas de energia inter-triádicas ocorrem numa escala de tempo mais longa em comparação com as trocas intra-triádicas. Conseqüentemente, Raupp e Silva Dias (2006) também destacam que as ondas de gravidade-inerciais podem ter um papel crucial na geração de flutuações de baixa freqüência nos modelos atmosféricos. Uma vez que as ondas de gravidade-inerciais estão diretamente relacionadas com a precipitação e os processos convectivos úmidos na atmosfera, esses resultados sugerem que a correta representação da variabilidade intra-sazonal e de período ainda mais longo em modelos atmosféricos de circulação geral depende da correta representação nesses modelos dos processos de interação entre as ondas de grande-escala e a convecção úmida.



**Figura 2.** Evolução temporal do termo de ordem dominante da energia total ( $E^{(2)}$ ) associado à solução do problema de três ondas ressonantes para o triplete composto por: uma onda de Rossby com número de onda zonal 1 e modo meridional  $n = 1$  (modo 1), uma onda de gravidade-inercial com propagação para leste com número de onda zonal 4 e modo meridional  $n = 3$  (modo 2) e uma onda de gravidade-inercial para oeste com número de onda zonal 3 e modo meridional  $n = 3$  (modo 3). A energia total dada pela soma da energia das componentes do triplete também é ilustrada. As amplitudes iniciais dos modos são dadas por  $A_1 = A_3 = 1$  e  $A_2 = 10$ . (Adaptado de Raupp e Silva Dias 2006)



**Figura 3.** Evolução temporal do termo de ordem dominante da energia total ( $E^{(2)}$ ) associado à solução do problema de cinco ondas ressonantes, ou seja, dado pelos tripletos (1,2,3) e (1,4,5) (dois tripletos acoplados por meio do modo 1). Os modos constituintes do problema são: uma onda de gravidade-inercial para leste com número de onda zonal 6 e modo meridional  $n = 2$  (modo1), uma onda de gravidade-inercial para oeste com número de onda zonal 6 e modo meridional  $n = 1$  (modo 2), uma onda mista de Rossby-gravidade com  $k = 0$  (modo 3), uma onda de gravidade-inercial para oeste com número de onda zonal 1 e modo meridional  $n = 3$  (modo 4) e uma onda mista Rossby-gravidade com número de onda zonal 7 (modo 5). As amplitudes iniciais dos modos são dadas por  $A_1 = 0,25$  e  $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1,0$ . (Adaptado de Raupp e Silva Dias 2006)

## 5. Considerações finais

No presente artigo foram abordados os principais aspectos relacionados com a teoria fracamente não linear de ondas dispersivas em problemas relacionados com a dinâmica de fluidos geofísicos em rotação, onde foram enfatizadas algumas implicações importantes para a dinâmica da atmosfera. A análise aqui realizada se restringiu ao caso em que os distúrbios ondulatórios são imersos num estado básico em repouso. Além disso, nos modelos abordados nas Seções 3 e 4 o efeito da estratificação vertical da atmosfera não foi considerado.

Com relação à influência da estratificação vertical da atmosfera sobre as interações triádicas ressonantes, recentemente Raupp et al. (2006) utilizaram o mesmo desenvolvimento teórico usado na teoria de ondas de gravidade superficiais em águas profundas e em ondas de gravidade-capilares para estudar os tripletos ressonantes nas equações primitivas, que re-

gem a dinâmica dos movimentos atmosféricos de grande-escala. Neste caso, é possível a existência de tripletos ressonantes constituídos por ondas associadas a diferentes modos verticais. A análise de Raupp et al. (2006) se deu para tripletos ressonantes constituídos por duas ondas equatoriais internas associadas ao mesmo modo baroclínico e uma onda de Rossby barotrópica. Os resultados mostram que as modulações resultantes das trocas de energia entre esses modos podem ter possíveis aplicações para a conexão trópicos-extratrópicos em baixa frequência.

Assim, uma importante questão que precisa ser explorada futuramente refere-se à dinâmica das interações triádicas ressonantes nas equações que regem a dinâmica da atmosfera na presença de um escoamento básico mais realista. De fato, os distúrbios ondulatórios na atmosfera, em geral, dificilmente estão imersos num estado básico em repouso. Conseqüentemente, a inclusão de um escoamento básico mais realista permite uma melhor comparação dos resultados teóricos com as observações.

De fato, a análise das interações ressonantes na atmosfera na presença de um campo básico razoavelmente realista pode levar a resultados interessantes com relação aos mecanismos de instabilidade não linear na atmosfera. Becker e Grimshaw (1993), usando as equações de Boussinesq representativas da dinâmica de grande-escala do oceano, mostram que na presença de um escoamento básico com um cisalhamento vertical é possível a existência de tríades ressonantes explosivas. Becker e Grimshaw adotam um formalismo variacional num sistema de coordenadas Lagrangeano se movendo com a velocidade do campo básico e mostram que uma determinada tríade ressonante torna-se explosiva quando o campo básico apresenta uma camada crítica, onde a velocidade de fase do modo de maior frequência absoluta iguala-se à velocidade do campo básico. É importante ressaltar que esse fenômeno de interações ressonantes explosivas pode ocorrer mesmo se o escoamento básico for linearmente estável, ou seja, mesmo se as frequências dos modos normais forem reais.

Um outro ponto interessante refere-se ao fato de que a condição de ressonância menos restritiva na região equatorial em comparação com a dinâmica de latitudes médias sugere que a existência de interações não lineares ressonantes seja mais favorecida quanto maior a existência de não-homogeneidades no domínio, que se reflete no aumento do número de coeficientes variáveis no sistema de equações diferenciais parciais que representa um dado modelo atmosférico. Logo, extrapolando para a atmosfera real, que é caracterizada pela existência de diversas não-homogeneidades, tais como a geometria esférica, topografia, gradientes térmicos horizontais decorrentes do contraste entre continentes e oceanos e etc, é provável que as trocas de energia entre ondas ressonantes sejam muito mais favorecidas que o sugerido em modelos teóricos.

**Agradecimentos:** O autor agradece à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro de suas atividades de pesquisa (processo 06/53606-0). O autor também agradece ao Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) pelo convite a ministrar o presente mini-curso durante a III Escola de Inverno de Física, organizada por esta instituição.

### Referências

- BECKER, J. M.; R. H. J. GRIMSHAW. Explosive resonant triads in a continuously stratified shear flow. **J. Fluid Mech.**, 257, 219-228, 1993.
- BRETHERTON, F. P. Resonant interactions between waves. The case of discrete Oscillations. **J. Fluid. Mech.**, 20, 457-479, 1964.
- BOYD, J. P. The nonlinear equatorial Kelvin wave. **J. Phys. Oceanogr.**, 10, 1-11, 1980.
- CRAIK, A. D. D. Wave interactions and fluid flows. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Math. **Cambridge University Press.**, pp. 322, 1985.
- DOMARACKI, A.; A. Z. LOESCH. Nonlinear interactions among equatorial waves. **J. Atmos. Sci.**, 34, 486-498, 1977.
- DUFFY, D. G. Resonant interactions of inertio-gravity and Rossby waves. **J. Atmos. Sci.**, 31, 1218-1231, 1974.
- LOESCH, A. Z.; R. C. DEININGER. Dynamics of closed systems of resonantly interacting equatorial waves. **J. Atmos. Sci.**, 36, 1490-1497, 1979.
- LONGUET-HIGGINS, M. S.; A. E. Gill. Resonant interactions between planetary waves. **Proc. Roy. Soc. London.**, A299, 120.
- MAJDA, A. J. Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean. **Courant Institute Lecture Series 9**, American Mathematical Society, 2003.
- MATSUNO, T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. **J. Meteor. Soc. Japan**, 44, 25-43, 1966.
- MCGOLDRIK, L. F. Resonant interactions among capillary-gravity waves. **J. Fluid. Mech.**, 21, 305-331, 1965.
- PHILLIPS, O. M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. **J. Fluid Mech.**, 9, 193-217, 1960.
- RAUPP, C. F. M.; P. L. SILVA DIAS. Dynamics of resonantly interacting equatorial waves. **Tellus**, 58A (2), 263-279, 2006.
- RAUPP, C. F. M.; P. L. SILVA DIAS; E. G. TABAK; P. MILEWSKI. Resonant wave interactions and their potential role on tropics-extratropics connection. **J. Atmos. Sci.**, 2006. (Submetido)
- RIPA, P. On the theory of nonlinear interactions among geophysical waves. **J. Fluid Mech.**, 103, 87-115, 1981.

SILVA DIAS, P.L.; W. H. SCHUBERT. The dynamics of equatorial mass-flow adjustment. **Atmospheric Science Paper No. 312** (Department of Atmospheric Science Colorado State University), Fort Collins, Colorado, USA, 1979.

