Utilização do princípio da Simetria de Riemann-Schwarz para transformações conformes de algumas regiões*

Ludmila Bourchtein, Adriana Neumann de Oliveira**

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pelotas
96010-900, Capão de Leão - RS, Brasil
e-mail: burstein@terra.com.br, adriana_neumann@terra.com.br

Resumo

Neste artigo é analisado um dos princípios básicos das transformações conformes, mais precisamente, o princípio da simetria de Riemann-Schwarz. Este princípio será utilizado, juntamente com os outros princípios básicos e com as funções elementares, na construção de transformações conformes de algumas regiões simplesmente conexas no semiplano superior.

*Apoio CNPq e FAPERGS
** Bolsista Iniciação Científica BIC/FAPERGS

1. Introdução

Um dos conceitos importantes da matemática é o de transformação conforme, que surgiu de alguns problemas físicos. Este conceito tem muitas aplicações em vários ramos da física: hidrodinâmica, aeronáutica, teoria da elasticidade, teoria dos campos magnéticos e eletrostáticos e outros. Por exemplo, a existência da solução do problema generalizado de Dirichlet para qualquer região simplesmente conexa foi demonstrada, usando a resolução deste problema para o círculo unitário com a ajuda da integral de Poisson e da transformação conforme de uma região simplesmente conexa no círculo unitário [2, 3]. Analogamente, para demonstração da unicidade da solução do problema de Neumann (segundo problema de contorno) com a condição adicional: é conhecido o valor da função $u(z)$ num ponto fixo da região dada, este problema foi resolvido inicialmente para o semiplano superior e transferido para qualquer região simplesmente conexa, utilizando o mapeamento conforme [3]. Problemas de circunfluência de diferentes corpos com fluxo de líquido ou de partículas (e outros fluxos) também são resolvidos com a ajuda da transformação conforme: transformam a região dada na região canônica, que é o interior ou o exterior do círculo unitário ou o semiplano superior para as regiões simplesmente conexas, analisam o movimento de partículas, linhas de corrente e outros na região canônica, depois voltam à região inicial, usando a transformação inversa, e encontram as pré-imagens das linhas de corrente e outras características na região dada [2, 3].

O principal problema da teoria das transformações conformes é construir uma função que realiza a transformação de uma região à outra de modo biunívoco. E isto é muito complicado, pois não existe um único algoritmo de resolução. Na construção de uma transformação conforme são utilizadas, de forma adequada, as funções elementares, suas propriedades e os princípios básicos das transformações conformes. Então, relembramos, a seguir, alguns conceitos e resultados importantes desta teoria.

Definição 1.1 *Uma função* $w = f(z)$ *é chamada regular num ponto* z_0 *, se* $f(z)$ *pode ser desenvolvida numa série de potências*

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, *que converge num círculo* $|z - z_0| < r$ *com centro no ponto* z_0.

Definição 1.2 *Uma função w = f(z), definida na região D, é chamada regular nessa região se ela é regular em qualquer ponto desta região*.

É conhecido [1, 5] que a regularidade de uma função numa região é equivalente a diferenciabilidade desta função na mesma região.

Definição 1.3 *A função f(z) é chamada univalente numa região D, se* $\forall z_1, z_2 \in D,\ z_1 \neq z_2$, *segue que* $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Se considerarmos *f(z)* unívoca e univalente na região *D*, neste caso, teremos que *f(z)* é biunívoca.

Definição 1.4 *Sejam D uma região e E um conjunto,* $E \subset D$*; a função f(z) definida no conjunto E e F(z) é regular na região D. Se para todos pontos* $z \in E$ *é válida a condição F(z) = f(z), então F(z) é chamada o prolongamento analítico da função f(z) do conjunto E para a região D.*

Se o conjunto *E* tem pelo menos um ponto limite que pertence a região *D* e se existir prolongamento analítico de uma função *f(z)*, então este prolongamento é único [2, 4].

Seja *f(z)* regular numa região *D* e existe prolongamento analítico da função *f(z)* na região mais ampla. Notamos que como resultado do prolongamento analítico da função *f(z)* em todas as direções possíveis temos, no caso geral, uma função plurívoca.

Teorema 1.1 (Princípio de Simetria de Riemann-Schwarz, [5]) *Seja D alguma região cuja fronteira contém o segmento* γ *do eixo real. Seja, também, a função w = f(z) regular na região D e contínua em* $D \cup \gamma$ *e f(z) assume valores reais no segmento* γ. *Então a função f(z) pode ser prolongada analiticamente da região D para a região D' que é simétrica à D em* *relação ao eixo real, o prolongamento dessa função define-se do seguinte modo:*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D' \end{cases} \tag{1.1}$$

Observações

1. Denotamos por G a imagem da região *D* e por *G'* a imagem da região *D'* sob a transformação *F(z)*. Da fórmula (1.1) é visto que, não somente, *D* e *D'* são simétricos em relação ao eixo real, mas suas imagens *G* e *G'* também são.

2. Denotamos por *D** a região do plano *z*, ou seja, *D**= $D \cup \gamma \cup D'$ e por *G** a região do plano *w*, assim, *G**= $G \cup \Gamma \cup G'$, onde $\Gamma = f(\gamma)$. Se a região *D* é totalmente contida no semiplano superior ou semiplano inferior, então as regiões *D* e *D'* não intercecsionam-se: $D \cap D' = \phi$. Neste caso, a região *D** é univalente, isto é, cada ponto da região *D** pertence a *D, D'* ou γ (pontos pertencendo às regiões *D* e *D'* simultaneamente não existem). Assim, a função *F(z)*, determinada pela fórmula (1.1), é função unívoca na região *D**.

3. Sabemos [4] que para uma função realizar transformação conforme ela precisa ser univalente. Assim, a função *F*(z) somente realizará transformação conforme se for biunívoca. Para que isto aconteça, além de *D** ser como na observação anterior, ou seja, $D \cap D' = \phi$, temos que ter também $G \cap G' = \phi$, isto é, cada ponto de *G** pertencerá a *G, G'* ou Γ.

Corolário1.1 *Seja D alguma região cuja fronteira contém o arco* γ *da circunferência* Γ. *Seja a função w = f(z) regular na região D, contínua em* $D \cup \gamma$ *e no arco* γ *ela assume valores que pertencem a algum arco l de circunferência L, ou seja, o arco l é a imagem do arco* γ *sob a transformação w = f(z): l=f(* γ *). Então a função f(z) pode ser prolongada analiticamente da região D para a região D', que é simétrica à região D em relação à circunferência* Γ *e a função prolongada define-se do seguinte modo: se os pontos z e z' são simétricos em relação à circunferência* Γ, *então os pontos F(z) e F(z') são simétricos em relação à circunferência L.*

Observações

1. Denotamos *G = F(D)* e *G' = F(D')*. Então do corolário 1.1 segue que as regiões *G* e *G'* são simétricas em relação à circunferência *L*.

2. Deste corolário segue que pode existir simetria em relação a qualquer reta, pois uma reta é uma circunferência de raio infinito. Além disso, o princípio da simetria de Riemann-Schwarz pode ser aplicado quantas vezes forem necessárias.

2. Utilização do princípio da simetria de Riemann-Schwarz

Agora vamos usar as funções elementares, suas propriedades e os princípios básicos das transformações conformes e, principalmente, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz para construirmos, de forma concreta, transformações conformes de algumas regiões simplesmente conexas no semiplano superior.

1ª região (figura 1.1)

Para a região inicial do plano z (figura 1.1) não encontramos, diretamente, uma função que faça a transformação conforme dela de modo biunívoco, então entendemos toda esta região como a união de 6 regiões simétricas (setores) em relação aos raios. Separamos uma dessas regiões simétricas (setores) fazendo cortes auxiliares. E, assim, trabalharemos com esta região auxiliar (veja figura 1.2) que é um setor de raio infinito, cujo ângulo central é $\pi/3$.

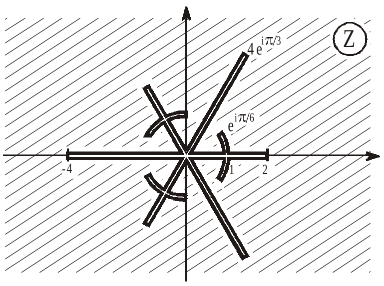


Figura 1.1

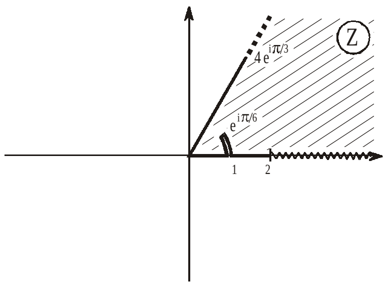


Figura 1.2

Nosso objetivo é transformar, biunivocamente, esta região auxiliar do plano z no setor circular com raio $[1, +\infty)$ (Veja figura 1.9) tal que a parte da fronteira que corresponde a fronteira da região inicial do plano z, passe no arco de circunferência. Antes de tudo, lembramos que a função de potência z^n trabalha muito bem com setores, já que esta função aumenta todos os ângulos no ponto 0 em n vezes, então usamos a função $z_1 = z^3$ e chegamos a região da figura 1.3.

O semiplano superior é uma das regiões de univalência da função de Jukowski e sabemos que esta função transforma uma circunferência unitária com centro na origem no segmento [-1,1] do eixo real, portanto a segunda função que utilizamos é a função de Jukowski, $z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$, assim teremos cortes somente no eixo real; veja a região da figura 1.4.

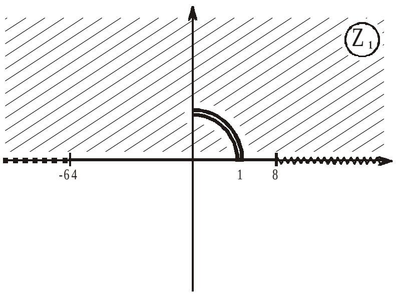


Figura 1.3

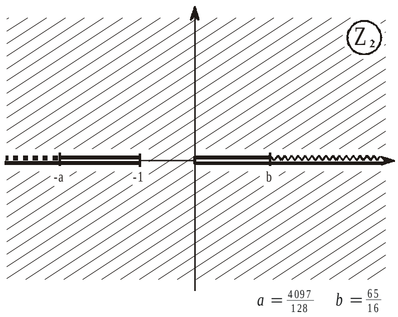


Figura 1.4

Temos como objetivo temporário transformar essa região do plano z_2 no semiplano superior de tal maneira que à parte da fronteira que corresponde à fronteira da região inicial (no plano z) se transforme no segmento [-1, 1] do eixo real; para isto, primeiramente, usamos uma função linear $z_3 = 2z_2 + 1$ para fazermos extensão e translação da região do plano z_2. Assim, chegamos a região da figura 1.5, onde podemos escolher um dos ramos regulares da função inversa da função de Jukowski, então utilizamos a função $z_4 = z_3 + \sqrt{(z_3)^2 - 1}$, já que sabemos que ela transforma todo plano com cortes ao longo dos segmentos $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$ no semiplano superior (veja figura 1.6).

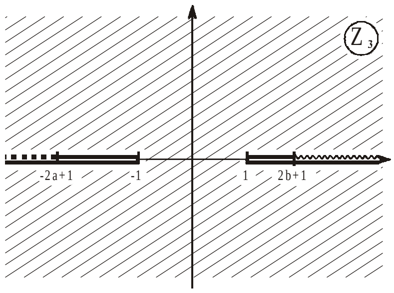
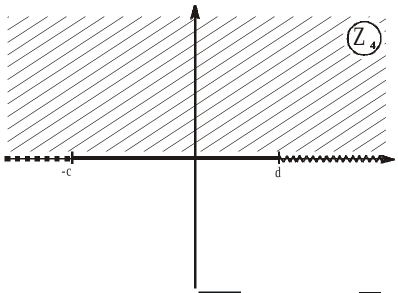


Figura 1.5



$c = \frac{1}{64}(4033 + 504\sqrt{8194})$ $d = \frac{73}{8} + \frac{9}{2}\sqrt{65}$

Figura 1.6

Para transformar, um pouco, a fronteira da região (semiplano superior) do plano z_4 usamos a função linear $z_5 = \left[(z_4 + c)\frac{2}{c+d}\right] - 1$. Assim, obtemos o semiplano superior com a parte da fronteira que corresponde a fronteira da região inicial sobre o segmento [-1, 1] do eixo real (figura 1.7). Agora, lembramos que a função inversa da função de Jukowski transforma todo plano com corte ao longo do segmento [-1, 1] do eixo real na parte exterior do círculo unitário com centro na origem. Mas, como temos somente o semiplano superior a região obtida desta transformação, $z_5 = z_4 + \sqrt{(z_4)^2 - 1}$, será o semiplano superior sem o semicírculo unitário superior com centro na origem (figura 1.8).

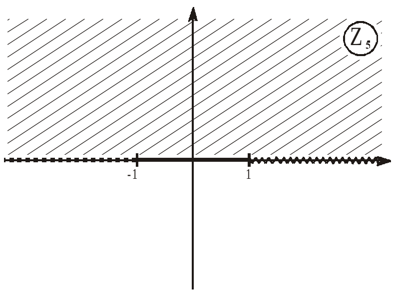


Figura 1.7

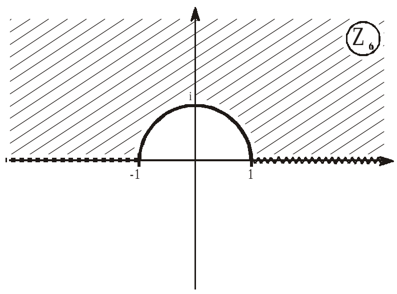


Figura 1.8

Usamos a função de potência z^n com $n = 1/3$, ou seja, a função $z_7 = \sqrt[3]{z_6}$, que é uma função plurívoca, mas escolhemos um ramo regular desta função e lembramos que esta função diminui todos os ângulos no ponto *0* em 3 vezes. Assim, obtemos parte de um setor de raio infinito e ângulo central igual à $\pi / 3$ (figura 1.9), que era o nosso objetivo quando construímos a região auxiliar (setor) no plano *z*. Agora, podemos usar o princípio de simetria de Riemann-Schwarz e prolongar analiticamente a composição de funções $z_7 = g(z)$. Então a composição de funções construída transforma a região inicial do plano *z* (figura 1.1) no exterior do círculo unitário com centro na origem do plano z_7 (figura 1.10).

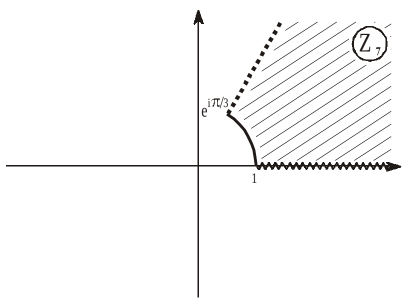


Figura 1.9

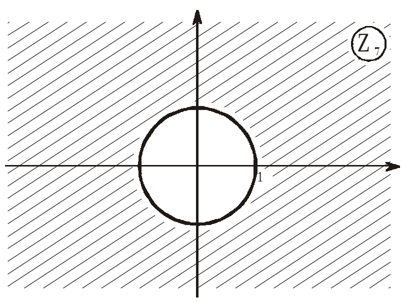


Figura 1.10

Agora, resta transformar o exterior do círculo no semiplano superior. Para isso, usamos uma função homográfica que transforma o ponto 1 no ponto infinito e o ponto -1 no ponto zero; como queremos obter o semiplano superior, ainda, precisamos, rotacionar esta região por $\pi / 2$ no sentido anti-horário; fazemos tudo isso com a função $w = i\,\frac{z_7 + 1}{z_7 - 1}$. Assim, com a composição de funções $w = h(z)$, transformamos, biunivocamente, a região inicial do plano *z* (figura 1.1) no semiplano superior do plano w (figura 1.11).

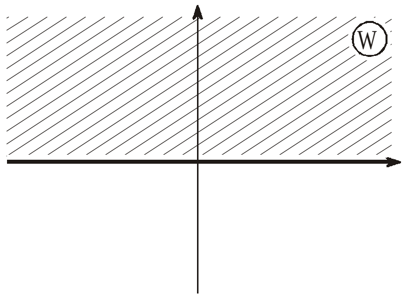


Figura 1.11

<u>2ª região</u> (figura 2.1)

Esta região do plano z (figura 2.1) pode ser considerada como a união infinita de regiões simétricas em relação às retas verticais: $z = \frac{1}{2} + k,$ $\forall k \in \mathbf{Z}$. Então fazemos cortes auxiliares na região inicial do plano *z*, escolhemos uma destas partes da região que é simétrica às outras (veja figura 2.2) e a chamamos de região auxiliar.

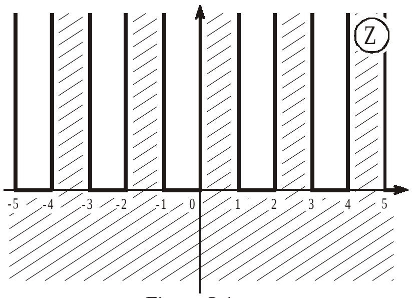


Figura 2.1

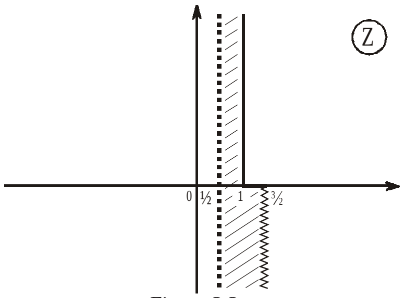


Figura 2.2

Nosso objetivo é transformar, biunivocamente, esta região auxiliar do plano *z* numa semifaixa vertical, de tal modo que à parte da fronteira da região auxiliar que corresponde à fronteira da região inicial passe no intervalo do eixo real (figura 2.14). Antes de tudo, com a função linear $z_1 = i\pi\, z - i\pi / 2$ rotacionamos, extendemos e transladamos a região auxiliar do plano *z* e, desta forma, obtemos a região da figura 2.3. Como a função exponencial, e^z, é univalente em faixas horizontais, cujo comprimento do segmento vertical é menor ou igual a 2π, podemos utilizá-la para transformar esta região do plano z_1; assim, com a função $z_2 = e^{z_1}$ chegamos a região da figura 2.4.

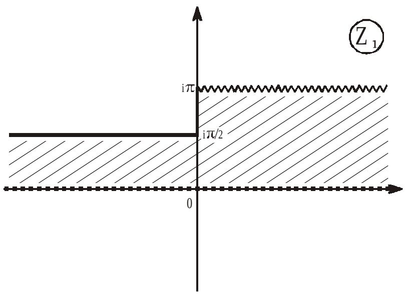


Figura 2.3

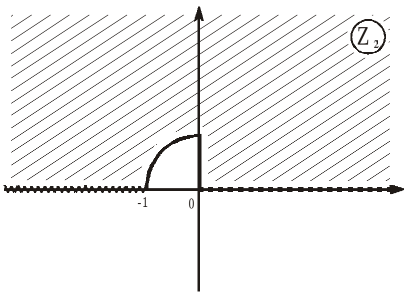


Figura 2.4

Temos no plano z_2 uma região onde a função de Jukowski, $z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$, é univalente, então a usando obtemos a região da figura 2.5. Depois, usamos a função $z_4 = \frac{1}{z_3}$ para transformar, um pouco, a fronteira da região do plano z_3 e obtemos a região do plano z_4 (figura 2.6).

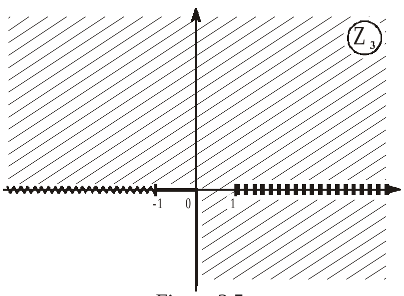


Figura 2.5

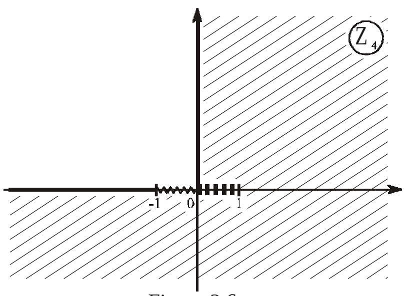


Figura 2.6

A região do plano z_4 é uma região onde podemos escolher um ramo regular da função inversa da função de Jukowski, então a utilizamos

($z_5 = z_4 + \sqrt{(z_4)^2 - 1}$) para transformar o segmento [-1, 1] em parte de uma circunferência unitária com centro na origem (veja figura 2.7).

Temos como objetivo temporário obter todo o semiplano superior com a parte da fronteira que corresponde à fronteira da região inicial do plano z sobre o segmento [-1, 1] do eixo real, então rotacionamos e reduzimos todos os ângulos da região do plano z_5 com a função $z_6 = (-z_5)^{2/3}$ e obtemos o semiplano superior sem o círculo unitário superior no plano z_6 (figura 2.8.).

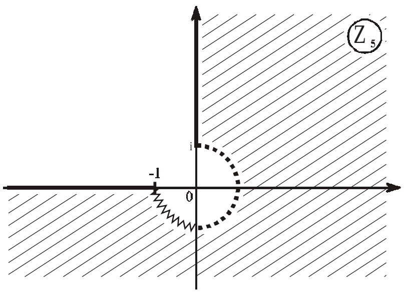


Figura 2.7

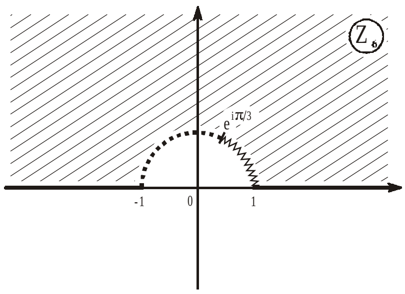


Figura 2.8

Agora, usamos a função de Jukowski, $z_7 = \frac{1}{2}\left(z_6 + \frac{1}{z_6}\right)$, para transformar a semicircunferencia da região do plano z_6 no segmento [-1,1] do eixo real e, assim, obtemos todo semiplano superior (figura 2.9); mas, ainda, temos que arrumar a fronteira desta região para atingirmos o objetivo temporário. Antes de tudo, utilizamos a função homográfica $z_8 = \frac{-1}{z_7 - 1/2}$, que transforma, um pouco, a fronteira da região do plano z_7 (figura 2.10).

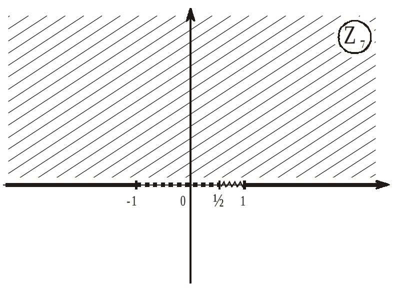


Figura 2.9

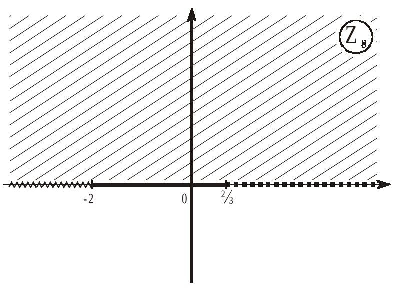


Figura 2.10

A função linear $z_9 = \frac{3}{4}(z_8 + 2) - 1$, também, é utilizada para transformar a fronteira, mais precisamente, para transformar o semiplano superior no semiplano superior de tal modo que o intervalo [-2, 2/3] passe no intervalo [-1,1] do eixo real (figura 2.11) e, assim, atingimos nosso objetivo temporário. Agora, facilmente atingiremos o objetivo principal, basta lembrarmos que a função inversa da função de Jukowski transforma todo plano com corte ao longo do segmento [-1, 1] do eixo real na parte exterior do círculo unitário com centro na origem e como na região do plano z_9 podemos escolher um ramo regular desta função, a utilizamos, $z_{10} = z_9 + \sqrt{(z_9)^2 - 1}$, para chegar à região da figura 2.12.

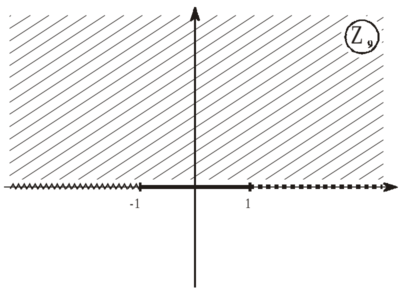


Figura 2.11

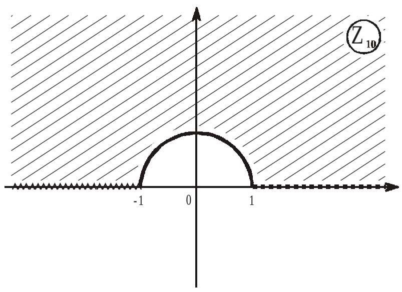


Figura 2.12

A região do plano z_{10} é uma região onde é possível escolher um ramo regular da função logarítmica: $\ln z = \ln |z| + i\,(\arg z + 2k\pi)$, onde $0 \le \arg z < 2\pi$, $\forall k \in \mathbf{Z}$. Então usamos a função $z_{11} = \ln z_{10}$, tomando $k=0$, e obtemos uma semifaixa horizontal de largura π no plano z_{11} (figura 2.13). Rotacionamos esta semifaixa com a função linear $w = i\,z_{11}$ e chegamos à região da figura 2.14, que era o nosso objetivo. Portanto, a composição de funções $w = g(z)$ transforma, biunivocamente, a região auxiliar da figura 2.2 na semifaixa da figura 2.14.

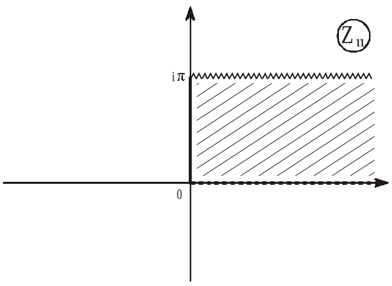


Figura 2.13

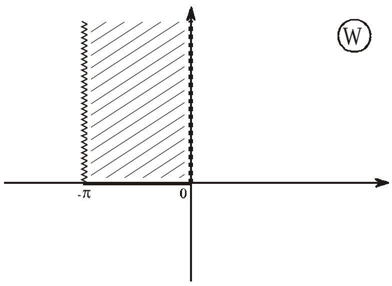


Figura 2.14

Utilizando o princípio de simetria de Riemann-Schwarz podemos prolongar analiticamente esta composição de funções, $w = g(z)$, infinitas vezes em relação aos cortes auxiliares e obtemos que a região dada no plano z (figura 2.1) é transformada, biunivocamente, no semiplano superior do plano w (figura 2.15).

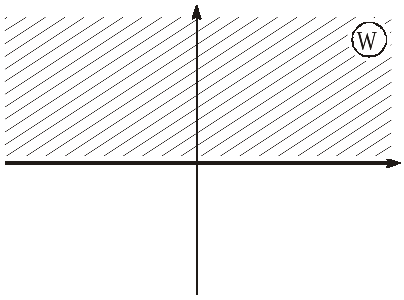


Figura 2.15

3ª região (figura 3.1)

Consideramos esta região da figura 3.1, como a união infinita de regiões (faixas) simétricas em relação às retas $z = 2n$, $\forall n \in \mathbf{Z}$. Assim, fazendo cortes auxiliares, escolhemos uma destas faixas (veja figura 3.2) que compõem a região do plano z, para construirmos uma função (na forma de composição de funções) que transforma esta região (faixa) em outra região, tal que utilizando o princípio de simetria de Riemann-Schwars obtenhamos o semiplano superior.

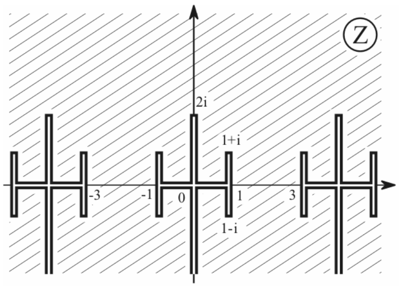


Figura 3.1

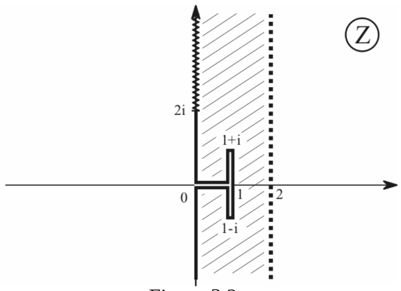


Figura 3.2

Nosso objetivo é transformar, biunivocamente, esta faixa vertical da figura 3.2, numa semifaixa vertical, tal que à parte da fronteira, que coincide com a fronteira da região inicial, passe no intervalo do eixo real. Antes de tudo, na região escolhida no plano *z* (figura 3.2), fazemos outro corte auxiliar e obtemos uma semifaixa vertical (veja figura 3.3). Agora, rotacionamos, estendemos e transladamos esta semifaixa com a função linear $z_1 = -i(\pi/2)z + i\pi$ e chegamos à região do plano z_1 (figura 3.4).

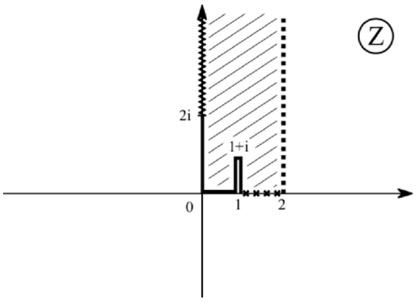


Figura 3.3

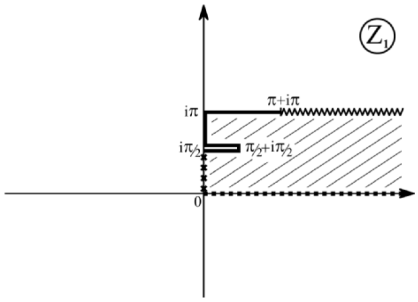


Figura 3.4

A região que obtemos no plano z_1 é uma região de univalência da função exponencial, e^z, assim, a próxima função que utilizaremos é $z_2 = e^{z_1}$; desta forma, chegamos a região da figura 3.5. Utilizamos a função de Jukowski, $z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$, para transformar a semicircunferência unitária com centro na origem do plano z_2 no segmento [-1,1] do eixo real do plano z_3 (figura 3.6).

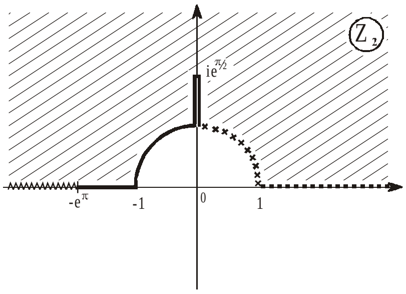


Figura 3.5

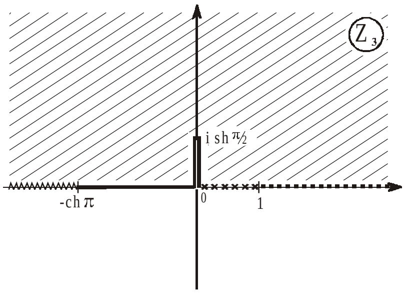


Figura 3.6

Para atingirmos nosso objetivo, temos que obter o semiplano superior com a parte da fronteira que corresponde à fronteira da região inicial sobre o segmento [-1,1] do eixo real e as partes da fronteira que correspondem aos dois primeiros cortes auxiliares separadas por este segmento. Para isso, primeiramente, usamos a função $z_4 = z_3^2 + sh^2(\pi/2)$ e obtemos a região do plano z_4 (figura 3.7). Nesta região (todo plano com corte ao longo do segmento $[0, +\infty)$ do eixo real) é possível escolher um ramo regular da função $\sqrt{z}$, então utilizamos $z_5 = \sqrt{z_4}$ e chegamos ao semiplano superior na figura 3.8.

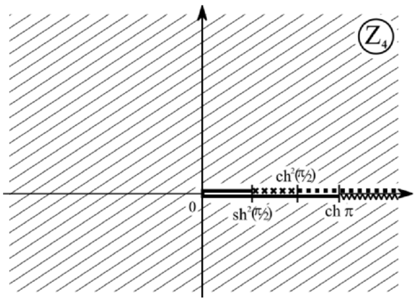


Figura 3.7

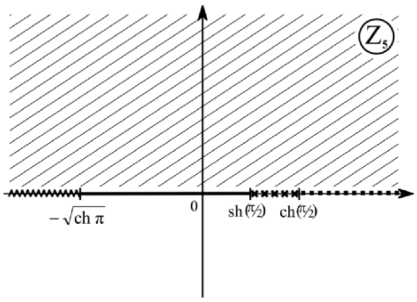


Figura 3.8

Agora, usamos o princípio de simetria de Riemann-Schwarz e prolongamos analiticamente a função (composição de funções) $z_5 = g(z)$ através do segmento $[\mathrm{sh}(\pi/2), \mathrm{ch}(\pi/2)]$ do eixo real, que corresponde ao último corte auxiliar feito no plano z, e, assim, obtemos no plano z_5 uma região que é todo plano com cortes ao longo do segmento $(-\infty, \mathrm{sh}(\pi/2)] \cup [\mathrm{ch}(\pi/2), +\infty)$

do eixo real (figura 3.9). Desta forma, a função $z_5 = g(z)$ transforma, de modo biunívoco, a região da figura 3.2 na região da figura 3.9. Depois, usamos a função homográfica $z_6 = \frac{z_5 - ch(\pi/2)}{z_5 - sh(\pi/2)}$ para transformar, um pouco, a fronteira desta região do plano z_5 e chegamos à região do plano z_6 (figura 3.10).

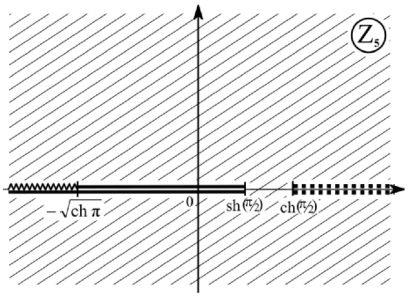


Figura 3.9

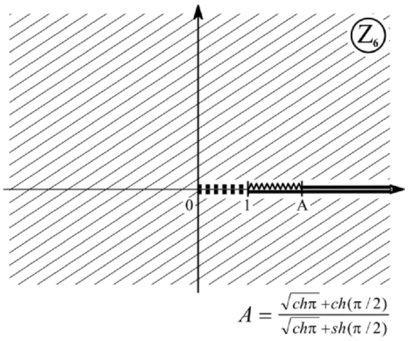


Figura 3.10

No plano z_6, temos uma região onde é possível escolher um ramo regular da função $\sqrt{z}$, então utilizamos $z_7 = \sqrt{z_6}$ e chegamos ao semiplano superior no plano z_7 (figura 3.11). Para obter o semiplano superior com a parte da fronteira que corresponde a fronteira da região inicial sobre o segmento [-1,1], teremos, ainda, que separar as partes da fronteira, da região do plano z_7, que correspondem aos cortes auxiliares; para isso usamos a função $z_8 = \frac{-1}{z_7 - 1}$ e obtemos a região da figura 3.12.

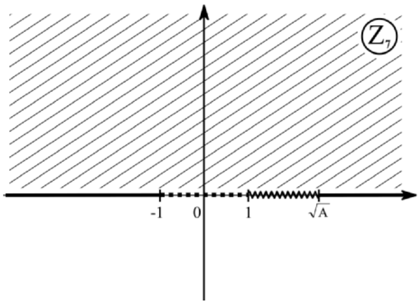


Figura 3.11

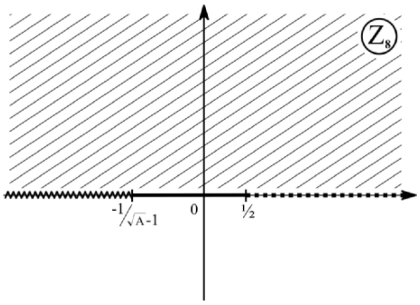


Figura 3.12

Depois, com a função linear $z_9 = \left(z_8 + \frac{1}{\sqrt{A}-1}\right)\left(\frac{2}{(1/2)+1/(\sqrt{A}-1)}\right) - 1$ obtemos o semiplano superior com a parte da fronteira que corresponde a fronteira da região inicial (do plano *z*) ao longo do segmento [-1, 1] do eixo real (veja figura 3.13). Agora, para atingirmos nosso objetivo é só seguir a seqüências de transformações que foi utilizada para transformar a região do plano z_{10} (figura 2.12) na região do plano *w* (figura 2.14), da segunda transformação apresentada, ou seja, utilizamos a função de Jukowski $z_{10} = z_9 + \sqrt{(z_9)^2 - 1}$ e chegamos a região da figura 3.14.

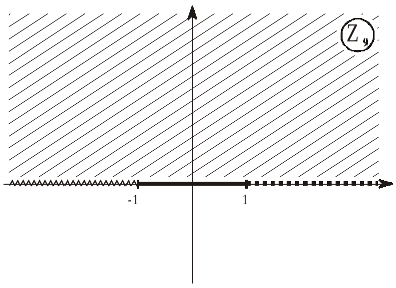


Figura 3.13

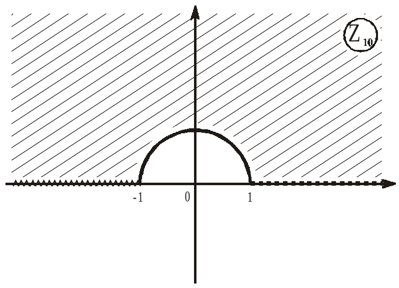


Figura 3.14

Depois escolhemos um ramo regular da função logarítmica, tomando *k=0*, e a usamos, $z_{11} = ln\, z_{10}$, para chegar a região da figura 3.15. Rotacionamos a região do plano z_{11} com a função linear $w = i\, z_{11}$ e obtemos a semifaixa vertical (figura 3.16), que era o nosso objetivo. Portanto, a composição de funções $w = h(z)$ transforma, biunivocamente, a região da figura 3.2 na região da figura 3.16

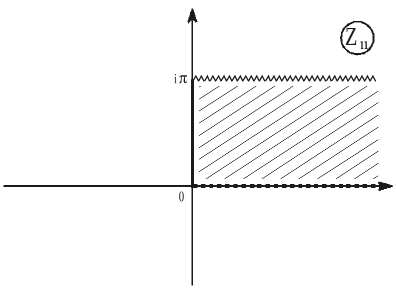


Figura 3.15

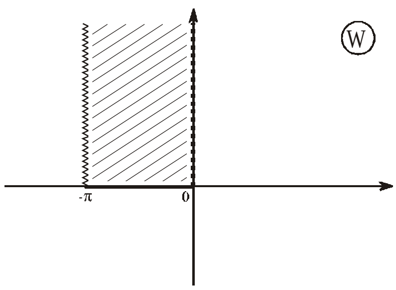


Figura 3.16

Usando o princípio da simetria de Riemann-Schwarz, podemos prolongar analiticamente esta função $w = h(z)$ (composição de funções) infinitas vezes, de acordo com os cortes que foram feitos no plano z. Portanto, transformamos, biunivocamente, a região dada no plano z (figura 3.1) no semiplano superior do plano w (figura 3.17).

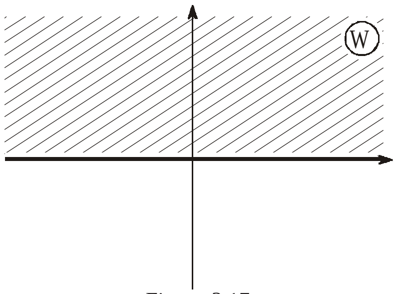


Figura 3.17

3. Agradecimentos

Agradecemos o apoio do CNPq com a bolsa 300057/2004-0 e da FAPERGS com a bolsa 03512058.

4. Referências

[1] CARATHÉODORY, C. **Conformal Representation**. New York: Mineola, Dover Pub., 1998.

[2] DETTMAN, J. W. **Applied Complex Variables**. New York: Dover Pub., 1984.

[3] LAVRENTIEV, M. A.; SHABAT B. V. **Métodos da Teoria das Funções de Variável Complexa**. Moskou, Nauka,1965.

[4] NEHARI, Z. **Conformal mapping**. New York: Dover Pub., 1997.

[5] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. New York: Mcgraw-hill, 1987.