Funções de autocorrelação e a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta

G. A. Degrazia[1], J. B. Gonçalves[1], G. S. Welter[1], S. Maldaner[1], A. U. Timm[1] , O. C. Acevedo[1], J.C. Carvalho[2],

[1]Departamento de Física/CCNE/UFSM/CRS/INPE/Santa Maria, RS - Brasil
[2]Faculdade de Meteorologia/UFPel - Pelotas, RS, Brasil
e-mail: ju-1320@hotmail.com

1. Introdução

A seguinte relação bem conhecida para a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta (Hinze, 1975; Arya, 1999; Pope, 2000; and Yeung, 2002)

$$\varepsilon = \frac{n_c}{C_0}\frac{\sigma^2}{T_L} \tag{1}$$

onde ó^2 é a variância de velocidade, T_L é a escala de tempo integral Langrangiana, C_0 é a constante de Kolmogorov e n_c é um coeficiente numérico que estabelece uma premissa fundamental na teoria da turbulência bem desenvolvida e mostra que a dissipação é diretamente proporcional a energia disponível e inversamente proporcional a evolução temporal dos turbilhões mais energéticos. Portanto, a razão representada na equação (1) mostra que a ordem de magnitude de å é fornecida pelas quantidades que caracterizam os turbilhões mais energéticos. O objetivo deste trabalho será derivar a partir de diferentes funções de autocorrelação e expansões em séries de potências do parâmetro de dispersão, expressões como a Eq.(1) contendo diferentes valores do coeficiente numérico n_c.

A formulação (1) com valor de n_c=2 tem sido exaustivamente empregada em parametrizações da turbulência aplicada em modelos de dispersão estocásticos Lagrangianos (Thomson, 1987; Yeung, 2002). Apesar da expressão (1) ser muito utilizada, uma análise desenvolvida por Degrazia et al. (2005) tem evidenciado que a escolha da função de autocorrelação para a velocidade turbulenta, pode definir outras magnitudes para n_c.

2. Derivações para o n_c utilizando-se diferentes funções de autocorrelação

Tennekes (1982) utilizou uma forma exponencial para a função de autocorrelação e^{-t/T_L} e argumentos do subintervalo inercial na teoria estatística da difusão de Taylor (TEDT) e obteve o seguinte parâmetro de dispersão:

$$\left(\overline{X^2}\right) = 2\sigma^2 T_L{}^2 \left[\frac{t}{T_L} - 1 + \exp\left(\frac{-t}{T_L}\right)\right] \tag{2}$$

onde t é o tempo de viagem da partícula de fluido. Expandindo-se em séries de potência a função exponencial, resulta:

$$\varepsilon = \frac{2}{C_0}\frac{\sigma^2}{T_L} \tag{3}$$

Por outro lado, o uso da função de autocorrelação da forma (Degrazia et al., 2005),

$$\rho_L(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_L}\right)} - \frac{t}{T_L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_L}\right)\right]^2} + \frac{1}{4}\frac{t^2}{T_L^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_L}\right)\right]^3} \tag{4}$$

substituída na teoria da difusão estatística de Taylor, permite escrever:

$$\overline{X}^2 = \frac{\sigma^2 t^2}{\left(1+\frac{1}{2}\frac{t}{T_L}\right)} \tag{5}$$

Expandindo-se (5) em uma série binomial e considerando-se $t<T_L$, encontra-se outra expressão para ε:

$$\varepsilon = \frac{3}{C_0}\frac{\sigma^2}{T_L} \tag{6}$$

A partir de dados experimentais de dispersão, a seguinte função de autocorrelação binomial foi sugerida por Phillips e Panofsky (1982) e (Pasquil e Smith, 1983).

$$\rho_L(t) = \left(1+\frac{\tau}{T_L}\right)^{-2} \tag{7}$$

A função de autocorrelação (7) satisfaz as condições matemáticas propostas por Hinze (1975, p.59) para a turbulência homogênea, exceto para o critério $\lim_{t\to 0}\left({d\rho_L}/{dt} \right) = 0$. Substituindo-se (7) no teorema da difusão estatística de Taylor, encontra-se :

$$\left(\overline{X}^2\right) = 2\sigma^2 T_L \left[t - T_L \ln\left(1 + \frac{t}{T_L} \right) \right] \tag{8}$$

Seguindo os procedimentos feitos anteriormente em (8), resulta

$$\varepsilon = \frac{4}{C_0}\frac{\sigma^2}{T_L} \tag{9}$$

Uma outra forma para a função de autocorrelação proposta por Frenkiel (1953), é dada pela seguinte equação:

$$\rho_L(\tau) = \exp\left(\frac{-\pi}{4}\frac{\tau^2}{T_L} \right) \tag{10}$$

Esta equação fornece o seguinte parâmetro de dispersão:

$$\left(\overline{X}^2\right) = \sigma^2 T^2{}_L \left[2\frac{t}{T_L} erf\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{t}{T_L} \right) + \frac{4}{\pi}\exp\left(\frac{-\pi}{4}\frac{t^2}{T_L^2} \right) - \frac{4}{\pi} \right] \tag{11}$$

No entanto, a expansão de (11) em série de Maclaurin não permite a obtenção de potências ímpares de t. Portanto, uma expressão como a Eq. (1) não pode ser derivada dessas equações. Diferentemente da forma exponencial (e^{-t/T_L}) e das Eqs.(4) e (7), a Eq.(10) não concorda com a teoria do subintervalo inercial de Kolmogorov e, consequentemente, o emprego de (11) para representar parâmetros de dispersão é inadequado.

3. Conclusões

Neste estudo foram empregadas diferentes funções de autocorrelação, a teoria estatística de Taylor e expansões em série de Maclaurin para derivar relações que descrevem a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Embora, tendo-se utilizado funções de autocorrelação distintas, a análise empregada permite derivar taxas de dissipação que são expressas em termos das mesmas variáveis turbulentas. Neste sentido a forma funcional que descreve a taxa de dissipação é sempre a mesma independente da função de autocorrelação. Todavia, a escolha da função de autocorrelação seleciona nestas formas funcionais coeficientes numéricos com magnitudes distintas. Esta variação no valor do coeficiente numérico é causada pela nossa incerteza associada à função de autocorrelação descrevendo uma turbulência bem desenvolvida.

4. Agradecimentos: Este trabalho foi financiado por CNPQ e CAPES.

5. Referências

DEGRAZIA G.A., ACEVEDO O. C., CARVALHO J. C., GOULART A. G., MORAES O. L. L., VELHO H. F. C., MOREIRA D. M., On universality of the dissipation rate functional form and of the autocorrelation function exponential form. **Atmospheric Environment**, v. 39, p. 1917-1924, 2005

HINZE J.O., **Turbulence**, Mc Graw Hill, 1975