

# Uma nova solução analítica para a equação de advecção-difusão-deposição

Luis Felipe K. de Macedo, Jorge L.B. Ribes, Guilherme J. Weymar, Ricardo L. dos Santos, Daniela Buske

*UFPel/IFM/DME - Pelotas, RS, Brasil  
e-mail: felipe.lemad@gmail.com*

## Resumo

Utilizando transformadas integrais, neste trabalho é apresentada a solução analítica da equação de advecção-difusão-deposição bidimensional considerando a rugosidade do terreno na construção do problema de Sturm-Liouville. Desta forma, as singularidades no solo que apareciam nas integrais desaparecem. Resultados numéricos e comparação com dados da literatura são apresentados.

## 1. Introdução

A equação de advecção-difusão tem sido muito utilizada para descrever o transporte e a dispersão de poluentes na atmosfera. Esta equação pode ser resolvida numericamente, porém os métodos analíticos são sempre preferidos, pois os parâmetros do problema aparecem explicitamente na solução, de forma que sua influência pode ser facilmente investigada.

Recentemente surgiu na literatura uma solução totalmente analítica da equação de advecção-difusão-deposição bidimensional para simulação da dispersão de poluentes na Camada Limite Atmosférica combinando a Transformada de Laplace e o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) (Tirabassi et al., 2008; Moreira et al., 2009).

Objetivando a busca de soluções analíticas, neste trabalho é dado um passo a frente resolvendo analiticamente a equação de advecção-difusão-deposição bidimensional considerando a rugosidade do terreno na construção do problema de Sturm-Liouville. Desta forma, as singularidades no solo que apareciam nas integrais desaparecem.

## 2. O modelo

A integração na direção  $y$  da equação de advecção-difusão estacionária (desprezando-se a difusão longitudinal) resulta:

$$u(z) \frac{\partial c(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(z) \frac{\partial c(x, z)}{\partial z} \right) \quad (1)$$

sujeita às condições de contorno:

$$K_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = h \quad (1a)$$

$$K_z \frac{\partial c}{\partial z} = V_g c \quad \text{em } z = z_0 \quad (1b)$$

e a condição de fonte contínua:

$$uc(0, z) = Q\delta(z - H_s) \quad \text{em } x = 0 \quad (1c)$$

onde  $c(x, z)$  representa a concentração de poluente,  $h$  é a altura da camada limite estável,  $K_z$  é o coeficiente de difusão vertical,  $u$  é a velocidade do vento médio na direção  $x$ ,  $Q$  é a taxa de emissão,  $H_s$  a altura da fonte,  $V_g$  é a velocidade de deposição do poluente e  $z_0$  é a rugosidade do terreno.

A novidade neste trabalho está na inclusão da informação da rugosidade do terreno em 1b, eliminando assim as singularidades das integrais no solo encontradas em trabalhos anteriores. Esta informação extra nos leva a um novo problema de Sturm-Liouville cuja solução é usada como base na expansão em série do método GILTT:

$$\Psi''_n(z) + \lambda_n^2 \Psi_n(z) = 0 \quad \text{em } 0 < z < h \quad (2)$$

$$K_z \Psi'_n(z_0) - V_g \Psi_n(z_0) = 0 \quad (2a)$$

$$\Psi'_n(h) = 0 \quad (2b)$$

cujas funções são dadas por:

$$\Psi_n(z) = f(\lambda_n, V_g, z_0) \cos(\lambda_n z) + \text{sen}(\lambda_n z) \quad (2c)$$

onde  $f(\lambda_n, V_g, z_0) = \frac{\lambda_n \cos(\lambda_n z_0) - V_g \text{sen}(\lambda_n z_0)}{\lambda_n \text{sen}(\lambda_n z_0) - V_g \cos(\lambda_n z_0)}$  e cujos autovalores

$\lambda_n$  são as raízes da equação transcendental:

$$\tan(\lambda_n h) = \frac{1}{f(\lambda_n, V_g, z_0)} \quad (2d)$$

Os autovalores são calculados pelo método de Newton-Raphson. O cálculo destes é acoplado a um programa em linguagem Fortran, otimizando assim o tempo computacional, uma vez que estes eram calculados em linguagem simbólica anteriormente.

Finalmente, seguindo o mesmo procedimento de Tirabassi et al. (2008), temos que a solução do problema 1 é dada por:

$$c(x, z) = \sum_{n=0}^N \bar{c}_n(x) \Psi_n(z) \quad (3)$$

onde  $\Psi_n(z)$  é a autofunção associada ao problema de Sturm-Liouville e  $\bar{c}_n(x)$  resulta da solução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

### 3. Resultados numéricos e conclusões

Para validar os resultados do novo modelo são utilizados os dados do experimento de Hanford para condições de estabilidade atmosférica estáveis. O experimento difusivo de Hanford foi conduzido de maio-junho de 1983, em uma região semi-árida de sul a leste de Washington (46° 34' N, 119° 36' W) em um terreno geralmente plano.

Neste trabalho foram utilizados o coeficiente de difusão turbulenta descrito em Degrazia et al. (2000), perfil de vento potência e 60 autovalores na solução em série para a obtenção dos resultados numéricos. Na Figura 1 é apresentado um gráfico de espalhamento da concentração observada experimentalmente ao nível do solo e das simuladas pelo modelo proposto sem incorporar a rugosidade do terreno na construção do problema de Sturm-Liouville. Observa-se que o modelo reproduz bem as concentrações observadas. Espera-se obter resultados mais acurados com a metodologia aqui proposta.

A solução apresentada é uma solução exata da equação de difusão atmosférica, sem nenhuma restrição ao perfil vertical do vento e ao coeficiente de difusão, e levando em conta a deposição seca do poluente como uma condição de fluxo não-nulo no solo, representando de uma forma mais completa o processo da dispersão de poluentes na atmosfera.

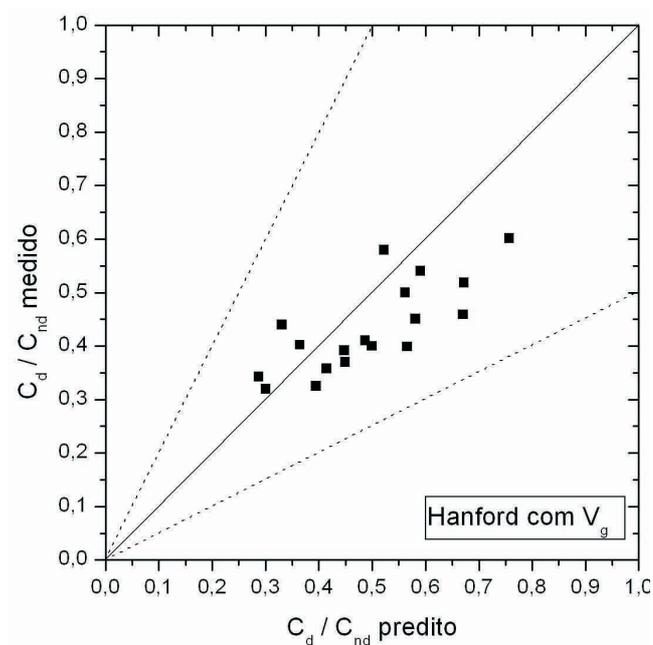


Figura 1. Gráfico de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração ( $C_o$ ) em comparação com os resultados de concentração do modelo ( $C_p$ ).

### Referências bibliográficas

Degrazia, G.A., Anfossi, D., Carvalho, J.C., Mangia, C., Tirabassi, T., Campos Velho, H. F., 2000. Turbulence parameterisation for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmospheric Environment* 34, 3575-3583.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D. and Tirabassi, T., 2009. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmospheric Research* 92, 1-17.

Tirabassi, T., Buske, D., Moreira, D.M. and Vilhena, M.T., 2008. A solution of two-dimensional diffusion equation with dry deposition at the ground. *J. Applied Meteorology* 47, 2096-2104.