Análise de convergência pela teoria de Lyapunov da solução analítica da equação de Langevin para uma PDF bi-Gaussiana

Kelen Berra de Mello[1], Marco T. M. de Vilhena[2], Bardo E.J. Bodmann[2], Jonas C. Carvalho[3]

[1]CCET/Universidade de Caxias do Sul - Caxias do Sul, RS, Brasil
[2]PROMEC/UFRGS - Porto Alegre, RS, Brasil
[3]UFPel - Pelotas, RS, Brasil
e-mail: kelenber@yahoo.com.br

Resumo

Apresenta-se a solução analítica da equação de Langevin para uma função densidade probabilidade (PDF) bi-Gaussina utilizando o método de decomposição Adomian. Comparam-se os resultados do modelo com os resultados do experimento de Copenhagen. Utiliza-se a teoria de Lyapunov para análise da convergência da solução.

1. Introdução

Os modelos de partículas Lagrangeanos são baseados na Equação de Langevin, onde a velocidade turbulenta *ui* e o deslocamento de cada partícula *xi*, a cada passo de tempo, são obtidos através da solução das seguintes equações:

$$\frac{d}{dt}u_i = a_i(x_i, u_i) + b_i(x_i, u_i)\xi_i(t) \quad \text{e} \quad dx_i = (U_i + u_i)dt \tag{1}$$

onde U_i é a velocidade média do vento, $b_i = \sqrt{C_o \varepsilon}$, C_o é a constante de Kolmogorov, ε é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta e $x_i(t)$ é um número aleatório proveniente de uma distribuição probabilidade Gaussiana.

Assumindo que a função densidade probabilidade seja representada por uma distribuição bi-Gaussiana (Baerentsen e Berkowicz, 1984), *ai* é dado por:

$$a_i = -u_i \frac{AP_A\sigma_A^2 + AP_B\sigma_B^2}{\sigma_A^2\sigma_B^2}\frac{C_0\varepsilon}{2P} + \left(\frac{Aw_A P_A}{\sigma_A^2} + \frac{Aw_B P_B}{\sigma_B^2}\right)$$

onde

$$P = AP_A + BP_B$$

$$\phi = -\frac{1}{2}\left(A\frac{\partial w_A}{\partial x_i} + w_A\frac{\partial A}{\partial x_i}\right) erf\left(\frac{u_i - w_A}{\sqrt{2}\sigma_A}\right) + w_A P_A A \frac{\partial w_A}{\partial x_i}\left(\frac{u_i^2}{\sigma_A^2} + 1\right)$$
$$+ P_A w_A^2 \frac{\partial A}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(B\frac{\partial w_B}{\partial x_i} + w_B\frac{\partial B}{\partial x_i}\right) erf\left(\frac{u_i + w_B}{\sqrt{2}\sigma_B}\right)$$
$$+ w_B P_B B \frac{\partial w_B}{\partial x_i}\left(\frac{u_i^2}{\sigma_B^2} + 1\right) + P_B w_B^2 \frac{\partial B}{\partial x_i},$$

A e *B são* as frequências relativas de ocorrência de *updrafts* e *downdrafts*, respectivamente, P_A é a PDF Gaussiana das velocidades verticais em *updrafts,* P_B é a PDF Gaussiana das velocidades verticais em *downdrafts*, w_A, w_B e s_A, s_B são respectivamente as velocidades médias e os desvios padrões nos *updrafts e downdrafts.*

Assim a equação de Langevin para uma PDF bi-Gaussiana é dada por:

$$\frac{d}{dt}u_i + \alpha_{u_i} = B_{u_i} + \sqrt{C_0\varepsilon}\,\xi_i(t) \qquad (2)$$

$$\alpha_{u_i} = u_i \frac{AP_A\sigma_A^2 + BP_B\sigma_B^2}{\sigma_A^2\sigma_B^2}\frac{C_0\varepsilon}{2P}$$

e onde $$\beta_{u_i} = \left(\frac{Aw_AP_A}{\sigma_A^2} + \frac{Bw_BP_B}{\sigma_B^2}\right)\frac{C_0\varepsilon}{2P} + \frac{\phi}{P}.$$

2. Método de Decomposição Adomian

Aplicando o método de decomposição na equação (2) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j} + \sqrt{C_0\varepsilon}\,\xi_i(t) \qquad (3)$$

onde $\sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\beta_{u_{i,j}} - \alpha_{u_{i,j}}\right)$ é o termo não-linear e este deve ser decomposto em polinômios de Adomian, $A_{i,j}$, (Adomian, 1988) que são determinados através da fórmula:

$$A_{i,0} = \beta_{u_{i,0}} - \alpha_{u_{i,0}} \tag{4a}$$

$$A_{i,1} = u_{i,1} \frac{d}{du_{i,0}} \left(\beta_{u_{i,0}} - \alpha_{u_{i,0}} \right) \tag{4b}$$

$$A_{i,2} = u_{i,2} \frac{d}{d_{u_{i,0}}} \left(\beta_{u_{i,0}} - \alpha_{u_{i,0}} \right) + u_{i,1} \frac{d^2}{du_{i,0}^2} \left(\beta_{u_{i,0}} - \alpha_{u_{i,0}} \right) \tag{4c}$$

Assim para resolver a equação (3) utiliza-se o seguinte sistema recursivo:

$$\frac{d}{dt} u_{i,0} = \sqrt{C_0 \varepsilon} \xi_i(t) \rightarrow u_{i,0}(t) = \int_0^t \sqrt{C_0 \varepsilon} \xi_i(t) dt + u_{i,0}(0) \tag{5a}$$

$$\frac{d}{dt} u_{i,1} = A_{i,0} \rightarrow u_{i,1}(t) = \int_0^t A_{i,0} dt + u_{i,1}(0) \tag{5b}$$

$$\frac{d}{dt} u_{i,2} = A_{i,1} \rightarrow u_{i,2}(t) = \int_0^t A_{i,1} dt + u_{i,2}(0) \tag{5c}$$

3. Teoria de Lyapunov

Se $\left| \delta Z_n \right| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} u_{i,j} \right\|$ denota a diferença máxima entre $\sum_{j=0}^{n} u_{i,j}$ e a solução exata u_i, onde $\|.\|$ significa a norma máxima, então uma maneira de analisar a convergência baseando-se na teoria de Lyapunov é

$$\left| \delta Z_n \right| \approx e^{\lambda} \left| \delta Z_0 \right| \tag{6}$$

Onde se $\lambda < 0$ então a aproximação usando os polinômios de Adomian convergem. Outra maneira de determinar o sinal de é usando a prescrição de Liapunov:

$$\lambda = \frac{1}{\left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} u_{i,j} \right\|} \ln \left(\frac{\delta Z_n}{\delta Z_0} \right) \tag{7}$$

4. Resultados

Com o objetivo de testar esta nova solução analítica aqui encontrada, foram utilizados os resultados do Experimento de Compenhagen. O produto $C_o\varepsilon$ foi calculado em termos da variância da velocidade turbulenta e da escala de tempo de decorrelação Lagrangeana com os parâmetros de acordo com Degrazia et al, 2000.

Na Tabela 1 encontram-se resultados estatísticos (Hanna,1989).

Tabela 1. Resultados estatísticos usando o método ADM (Método de Decomposição Adomian).

	NMSE	COR	FA2	FB	FS
ADM	0,05	0,95	1,00	0,13	-0,02

5. Conclusões

A analise estatística demonstrou que os resultados obtidos estão de concordância com os valores de NMSE, FB e FS que tem que estar próximos de zero, já os valores FA2 e COR próximos de 1.

Já utilizando o critério de convergência prescrita por Lyapunov, notou-se que a partir de n = 3 λ é negativo, mostrando assim que a solução converge.

6. Referência bibliográfica

Baerentsen, J. H. and Berkowicz, R. Monte Carlo simulation of plume dispersion in the convective boundary layer, **Atmos. Environ.** n. 18, p. 701–712, 1984.

Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. **Journal of mathematical analysis and applications**, n. 135, p. 501–544, 1988.

Degrazia, G. A., Anfossi, D., Carvalho, J. C., Mangia, C., Tirabassi, T. e Campos Velho, H. F. A. Turbulence parameterization for PBL dispersion models in all stability conditions. **Atmos. Environ**. n. 34, p. 3575–3583, 2000.

Hanna S. R. Confidence limits for air quality models, as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. **Atmos. Environ**. n. 23, p. 1385–1395, 1989.