

## Simulação analítica da dispersão de poluentes atmosféricos tridimensional

Daniela Buske<sup>1</sup>, Régis S. de Quadros<sup>2</sup>, Davidson M. Moreira<sup>3</sup>,  
Marco T. Vilhena<sup>4</sup>,

<sup>1</sup>UFPel/IFM/DME - Pelotas, RS, Brasil

<sup>2</sup>Center of Smart Interfaces, CSI/TU - Darmstadt, Alemanha

<sup>3</sup>UNIPAMPA - Bagé, RS, Brasil

<sup>4</sup>UFRGS/PROMEC - Porto Alegre, RS, Brasil

e-mail: danielabuske@gmail.com

### Resumo

Este trabalho tem por objetivo resolver analiticamente a equação de advecção-difusão tridimensional estacionária. Para atingir este objetivo a transformada integral é aplicada na variável  $y$  de forma a recair num problema bidimensional cuja solução é conhecida e obtida pela técnica GILTT associada com a transformada de Laplace.

### 1. Introdução

Nas últimas décadas, métodos híbridos e analíticos têm resolvido, a contento, modelos matemáticos que representam satisfatoriamente os problemas em Física-Matemática, especificamente na Transferência de Calor e Massa, na Teoria do Transporte de Partículas Neutras e na Dispersão de Poluentes na Camada Limite Atmosférica (CLA).

Recentemente surgiu na literatura uma solução totalmente analítica da equação de advecção-difusão uni e bidimensional dependente do tempo para simulação da dispersão de poluentes na Camada Limite Atmosférica combinando a Transformada de Laplace e o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*).

Com o objetivo de resolver analiticamente a equação de advecção-difusão, propõe-se neste trabalho a obtenção da solução para a equação estacionária. Para atingir este objetivo a transformada integral é aplicada na variável  $y$  de forma a recair num problema bidimensional cuja solução é conhecida e obtida pela técnica GILTT associada com a transformada de Laplace (Moreira et al., 2009). Este procedimento conduz a uma equação matricial transformada e depois a uma equação linear matricial de segunda ordem, a qual poderá ser resolvida por redução de ordem e diagonalização matricial.

Esta solução representa um importante avanço na busca de soluções analíticas, sendo válida para qualquer perfil de vento e coeficiente de difusão variável com a altura.

## 2. O modelo

A equação de difusão-advecção que modela a dispersão de poluentes na atmosfera pode ser escrita da seguinte forma:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (1)$$

para  $0 < z < h$ ,  $0 < y < L_y$ ,  $0 < x < L_x$ , sujeita sujeito às condições de contorno:

$$\frac{\partial c}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial c}{\partial z}(x, y, h) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial c}{\partial y}(x, L_y, z) = \frac{\partial c}{\partial x}(L_x, y, z) = 0 \quad (1b)$$

$$uc(0, y, z) = Q\delta(y - y_0)\delta(z - H_s) \quad (1c)$$

onde  $h$  é a altura da Camada Limite Atmosférica,  $Q$  é a taxa de emissão de poluentes,  $L_x$  e  $L_y$  são distâncias suficientemente grandes nas direções  $x$  e  $y$  e  $\delta$  é a função delta de Dirac.

Na seqüência é apresentada a idéia da solução do problema (1), pela primeira vez, pelo método GILTI. Para tanto, adotando o mesmo procedimento utilizado nos problemas bidimensionais apresentados em Moreira et al. (2009), expandimos a concentração na série

$$c(x, y, z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{m,n}(x) Y_n(y) Z_m(z) \quad (2)$$

Lembrando que as autofunções  $Y_n(y) = \cos \lambda_n y$  e  $Z_m(z) = \cos \lambda_m z$  são soluções do problema de Sturm-Liouville que aparece nas variáveis  $y$  e  $z$  com respectivos autovalores  $\lambda_n = \frac{n\pi}{L_y}$  e  $\lambda_m = \frac{m\pi}{h}$  ( $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Substituindo esta expansão na equação original e tomando momentos obtemos uma equação matricial linear de segunda ordem. Aplicando as técnicas de redução de ordem e diagonalização, a equação linear de primeira ordem resultante é resolvida utilizando o método da trans-

formada de Laplace. Uma vez que o problema transformado é resolvido, a solução da equação de advecção-difusão é determinada pela expansão dupla em série mencionada.

Mostrando a existência da solução, o teorema de Cauchy-Kowalesky garante a unicidade. Para o nosso conhecimento, solução analítica com coeficientes de difusão e perfil de vento variável não existe na literatura.

É importante observar que a integração em  $y$  da equação de advecção-difusão tridimensional recai na solução conhecida (Moreira et al., 2009):

$$c^y(x, z) = \sum_{m=0}^M c_m(x) Z_m(z) \quad (3)$$

### 1. Resultados numéricos e conclusões

Como um exemplo, para uma avaliação inicial do modelo os dados micrometeorológicos do experimento de Copenhagen, coeficientes de difusão da literatura (Degrazia et al., 2002) e perfil de vento potência foram utilizados. Na Figura 1 é apresentado o gráfico de espalhamento entre os dados medidos experimentalmente e os preditos pelo modelo ao nível do solo. Podemos observar uma concordância satisfatória dos resultados obtidos.

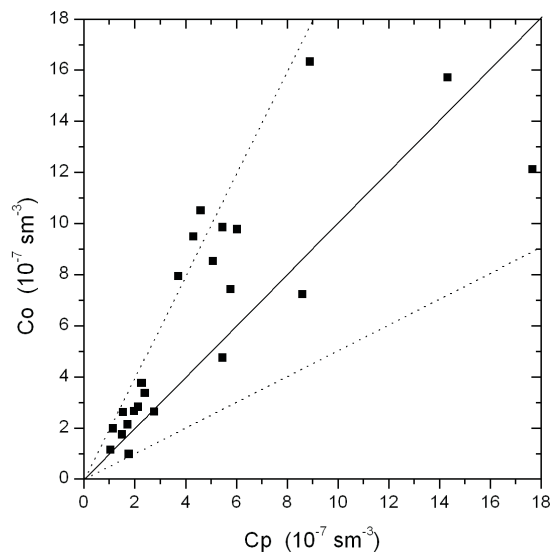


Figura 1. Gráfico de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração (Co) em comparação com os resultados de concentração do modelo (Cp).

Acreditamos que o objetivo do presente trabalho foi atingido uma vez que foi possível a generalização da solução GILTT para um problema de difusão-advecção tridimensional. Devido ao caráter tridimensional da solução, esta metodologia torna possível realizar a simulação de dispersão de poluentes na atmosfera de uma forma mais realística.

### Referências bibliográficas

Degrazia, G. A., Moreira, D. M., Campos, C. R. J., Carvalho, J. C. and Vilhena, M. T., 2002. Comparison between an integral and algebraic formulation for the eddy diffusivity using the Copenhagen experimental dataset. **Il Nuovo Cimento** 25C, 207–218.

Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D. and Tirabassi, T., 2009. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmospheric Research** 92, 1-17.