

# Solução analítica da equação de difusão-advecção com coeficiente de difusão variável com o tempo

Maria Cristina A. Arbage<sup>1</sup>, Marco Túllio Vilhena<sup>2</sup>, Daniela Buske<sup>3</sup>, Régis S. Quadros<sup>3</sup>, Davidson M. Moreira<sup>4</sup>

<sup>1</sup>UFOPA, Programa de Pós-Graduação em Recursos Naturais da Amazonia

<sup>2</sup>UFRGS, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

<sup>3</sup>UFPEL, Departamento de Matemática e Estatística

<sup>4</sup>UNIPAMPA/Bagé

e-mail: quadros99@gmail.com

## 1. Introdução

Na última década surgiu na literatura o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) [1]. Esta metodologia tem sido amplamente aplicada no tópico da simulação da dispersão de poluentes na camada limite atmosférica. Neste trabalho apresentamos uma nova solução, para cenários mais realísticos, que incorpora no modelo difusivo a dependência temporal do coeficiente de difusão turbulenta. Para atingir este objetivo o método da Decomposição de Adomian [2] é usado em conjunto com o método GILTT. Aplicando o método da decomposição reduzimos o problema a um conjunto recursivo de equações difusivas, que é então resolvido diretamente pela GILTT. Resultados preliminares são apresentados.

## 2. Metodologia

Na seqüência, apresentamos a idéia da derivação da solução da equação de difusão-advecção com dependência temporal do coeficiente de difusão turbulenta. Para tal, consideremos o problema:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(z, t) \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

sujeita a condição inicial nula, condições de contorno de fluxo nulo no solo e no topo da camada limite, e uma condição de fonte contínua  $uC(0, z, t) = Q\delta(z - H_s)$ .

Fazendo  $K(z,t) = k(z,t) + \bar{k}_1(z)$  onde  $\bar{k}_1(z) = \left( \int_0^t K(z,t) dt \right) / t$  teremos o seguinte problema a ser resolvido:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}_1(z) \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z,t) \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Iniciamos, de acordo com o método da decomposição, considerando que a concentração pode ser expandida na série truncada

$$C(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^N C_n(x, y, z, t) \quad (3)$$

Substituindo a série na equação (1) obteremos uma equação e (N+1) funções incógnitas  $\{C_n(x, y, z, t)\}$ . Assim estamos em posição de construir o conjunto recursivo de equações difusivas cuja solução é conhecida. Obviamente esta construção não é única. O conjunto recursivo escolhido, para  $n = 1 : N$ , é:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_0}{\partial t} + u \frac{\partial C_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}_1(z) \frac{\partial C_0}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + u \frac{\partial C_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}_1(z) \frac{\partial C_1}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z,t) \frac{\partial C_0}{\partial z} \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial C_N}{\partial t} + u \frac{\partial C_N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}_1(z) \frac{\partial C_N}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z,t) \frac{\partial C_{N-1}}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (4)$$

As soluções homogêneas destas equações são obtidas pelo método GILTT [1]. O primeiro problema do conjunto recursivo satisfaz a condição inicial, as condições de contorno e de fonte do problema (1), enquanto que os demais problemas satisfazem condições homogêneas, ou seja, condição nula. Uma vez que o conjunto de problemas (4) é resolvido, utilizando a solução do método GILTT, a solução do proble-

ma (1) é bem determinada utilizando a equação (3) e a precisão dos resultados é controlada pelo número de termos do somatório da série.

### 3. Resultados e conclusões

Para a obtenção dos resultados numéricos utilizamos os dados do experimento de Copenhagen, perfil de vento potência e coeficiente de difusão algébrico descrito em [3]. Na Figura 1 é apresentado o gráfico de espalhamento entre os dados medidos experimentalmente ( $C_o$ ) e os preditos pelo modelo ( $C_p$ ) ao nível do solo. Na Tabela 1 são apresentados os resultados estatísticos. Podemos observar uma boa concordância dos resultados obtidos. Recordando a aptidão do método da decomposição para resolver problemas não-lineares analiticamente, podemos afirmar que a metodologia apresentada é uma aproximação promissora para resolver problemas não-lineares da dispersão de poluentes na atmosfera.

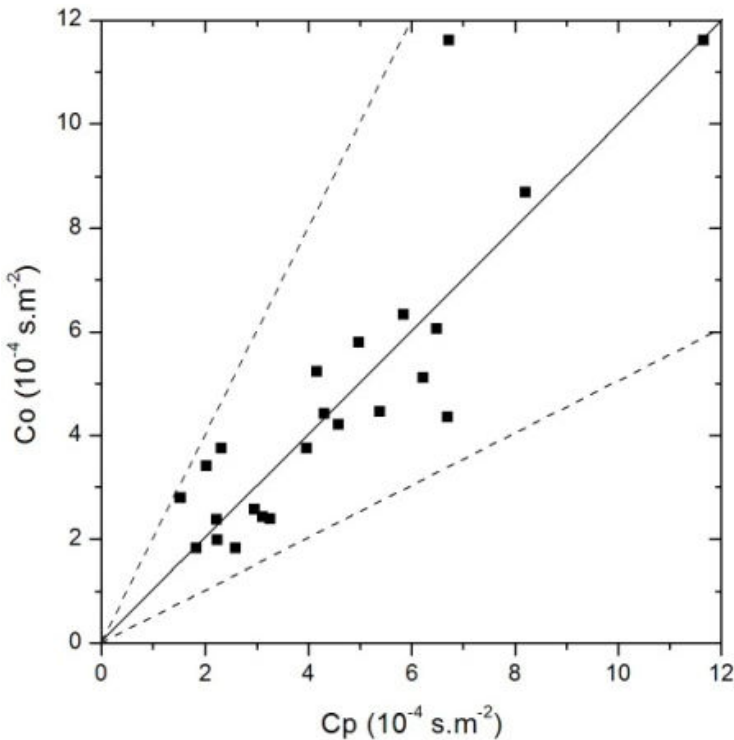


Figura 1. Diagrama de espalhamento.

**Tabela 1.** Dados estatísticos obtidos pelo modelo GILTT.

NMSE	0.09
COR	0.87
FA2	1.00
FB	-0.04
FS	-0.13

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e a Fapergs pelo auxílio financeiro.

## Referências

- [1] Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D., Tirabassi, T., 2009. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmos. Research* 92, 1-17.
- [2] Adomian, G., 1988. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. *J. Math. Anal. Appl.* 135, 501-544.
- [3] Degrazia, G.A., Moreira, D.M., Campos, C.R.J., Carvalho, J.C., Vilhena, M.T., 2002. Comparison between an integral and algebraic formulation for the eddy diffusivity using the Copenhagen experimental dataset. *N. Cimento* 25C, 207-218.