

# Simplificando a equação da dispersão de poluentes por métodos de perturbação

Cláudio C. Pellegrini<sup>1</sup>, Marco T. M. B. Vilhena<sup>2</sup>,  
Daniela Buske<sup>3</sup>, Bardo E. J. Bodmann<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UFSJ, Depto. Ciências Térmicas e dos Fluidos

<sup>2</sup>UFRGS, Prog. Pós-graduação Engenharia Mecânica

<sup>3</sup>UFPEL, Depto. Matemática e Estatística

e-mail: pelle@ufs.edu.br

## 1. Introdução

Métodos perturbativos de primeira ordem têm sido utilizados no estudo dos termos dominantes das equações de governo da camada limite atmosférica (Pellegrini, 2006, p.ex.). Neste trabalho aplicamos esta análise para o estudo dos termos dominantes da equação de advecção-difusão aplicada à modelagem da dispersão de poluentes em atmosfera neutra.

## 2. Análise matemática

A equação para a dispersão de um poluente passivo em atmosfera turbulenta é (Stull, 1997):

$$\frac{D\bar{c}}{Dt} = v_c \left[ \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \right] - \left[ \frac{\partial(\bar{u}\bar{c})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{c})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{c})}{\partial z} \right]$$

em que  $c$  é a concentração mássica,  $v_c$  é a difusividade mássica molecular (os outros símbolos têm o significado tradicional). Para adimensionalizá-la usamos o vento geostrófico,  $U_g$ , o tempo de resposta da atmosfera às forçantes superficiais,  $t_c$ , o comprimento da pluma,  $L$  (para a distância longitudinal) e sua largura,  $D$  (para as distâncias transversais), a concen-

tração na fonte,  $c_s$ , a velocidade de atrito,  $u_*$  e  $c_* = -\frac{\overline{(w'c')}}{u_*}$ . Resulta:

$$\varepsilon_t \frac{\partial C}{\partial T} + \left[ U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} + W \frac{\partial C}{\partial Z} \right] = \varepsilon_d \left[ U \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + V \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + W \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right]$$

$$- \varepsilon_* \varepsilon_{c*} \left[ \frac{\partial(U'C')}{\partial X} + V \frac{\partial(V'C')}{\partial Y} + W \frac{\partial(W'C')}{\partial Z} \right]$$

em que  $\varepsilon_t = \frac{L}{t_c U_g}$ ,  $\varepsilon_* = \frac{u_*}{U_g}$ ,  $\varepsilon_d = \frac{v_c}{U_g L}$ ,

Valores típicos para as variáveis envolvidas podem ser obtidos em Stull (1997), Holton (1992), Arya (1999) e Gryning *et al.* (1987) e  $c_*$

foi obtido supondo que  $\frac{c_*}{c_s} = \frac{q_*}{q_{\max}}$  Estiramos as coordenadas Y e Z com

$$\tilde{Y} = \frac{(1-Y)}{\varepsilon} \text{ e } \tilde{Z} = \frac{(1-Z)}{\varepsilon} \text{ com } 0 < \varepsilon \leq 1, 0 < Y < 1, 0 < Z < 1 \text{ Segue-se}$$

$$\varepsilon_t \frac{\partial C}{\partial T} + \left[ U \frac{\partial C}{\partial X} - \frac{1}{\varepsilon} \left( V \frac{\partial C}{\partial \tilde{Y}} - W \frac{\partial C}{\partial \tilde{Z}} \right) \right] = \varepsilon_d \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{Y}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{Z}^2} \right) \right]$$

$$- \varepsilon_* \varepsilon_{c*} \left[ \frac{\partial(U'C')}{\partial X} - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial(V'C')}{\partial \tilde{Y}} - \frac{\partial(W'C')}{\partial \tilde{Z}} \right) \right]$$

A chave superior indica termos de mesma ordem devido à eq. da conservação da massa de ar. Em notação simplificada

$$\underbrace{O(\varepsilon_t)}_{Ac} + \underbrace{O(1)}_{Adv} = \underbrace{O(\varepsilon_d)}_{Dif_x} + \underbrace{O\left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon^2}\right)}_{Dif_{y,z}} + \underbrace{O(\varepsilon_* \varepsilon_{c*})}_{T_x} + \underbrace{O\left(\frac{\varepsilon_* \varepsilon_{c*}}{\varepsilon}\right)}_{T_{y,z}}$$

com Ac: acúmulo, Adv: advecção, Dif: difusão e T: transporte turbulento. Permitindo que  $\varepsilon$  varie em  $]0,1]$  obtém-se os limites distintivos. Resultam dois limites: um em que domina Adv e  $T_{y,z}$  e outro em que domina  $T_x$  e  $Dif_{y,z}$ . A divisão vertical fica conforme Fig. 1

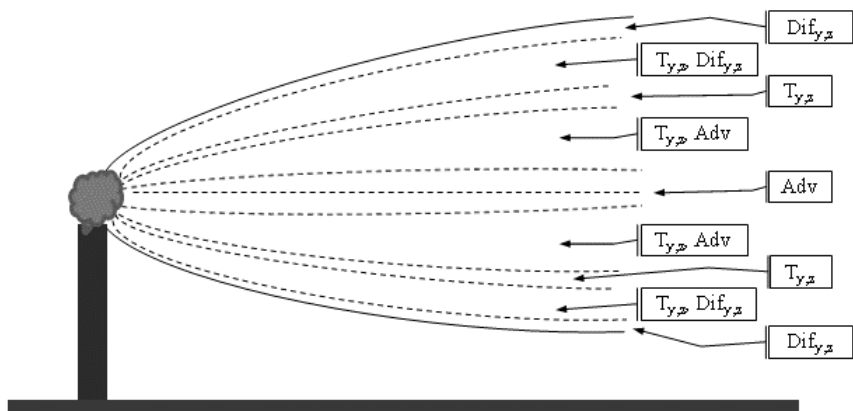


Figura 1. Predominância dos termos da eq. de governo.

### 3. Resultados e conclusões

A análise mostrou que a pluma de poluentes pode ser dividida em regiões onde predominam, em primeira ordem, menos termos do que na equação original. Não é possível realizar a comparação das equações obtidas com dados de experimentos, pela inexistência de campanhas experimentais que tenham registrado diretamente o valor dos termos da equação ou de suas variáveis que permitam o cálculo de todas derivadas.

No entanto, em trabalhos futuros pretendemos realizar a validação da análise de primeira ordem discutida com os resultados analíticos obtidos pelo método GILTT (Moreira *et al.*, 2009), considerando as simplificações apresentadas na Fig. 1.

### Agradecimentos

À FAPEMIG e ao CNPq.

## Referências

- ARYA, S.P.: 1999, *Air Pollution Meteorology and Dispersion*, Oxford Univ. Press, 320 pp.
- GRYNING, S., HOLTSLAG, A., IRWING, J., and SILVERSTEN, B., 1987. "Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters", *Atmos. Environ.*, vol. 21(1), pp. 79–89.
- HOLTON, J. R.: 1992, *An Introduction To Dynamic Meteorology*, Academic Press, London, 511 pp.
- MOREIRA, D. M., VILHENA, M. T., BUSKE, D., TIRABASSI, T., 2009. "The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere", *Atmos. Research*, vol. 92, pp. 1-17.
- PELLEGRINI, C.C.: 2006, 'A review on perturbation techniques applied to the study of the stratified atmospheric boundary layer', proc. of the XIV CBMet, Florianópolis, SC, Brasil, 27 Nov. to 01 Dec. 2006, in CD-ROM.
- STULL, R. B.: 1997, *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, 6th ed., Dordrecht, Kluwer Ac. Publ., 670 pp.