



UFSM



ISSN 2179-460X

OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 47, esp.1, e90599, 2025 • <https://doi.org/10.5902/2179460X90599>

Submissão: 14/01/25 • Aprovação: 15/01/25 • Publicação: 14/02/25

IV Jornada de Matematica e Matematica aplicada UFSM

Equações de águas rasas aplicado a análise de rompimento de barragens

Shallow water equations applied to dam break analysis

Gustavo Kurz ^{id}, Renato Vaz Linn ^{id}, Daniela Buske ^{id},
Leonidas Alejandro Arias Baltazar ^{id}, Régis Sperotto de Quadros ^{id}

^I Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil

^{II} Universidade Federal de Pelotas, RS, Brasil

^{III} Universidade Federal de Lavras, MG, Brasil

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se a equação de águas rasas, que leva em consideração as variações das grandezas (altura da água e velocidade do fluxo). Essa equação será utilizada para modelar problemas de rompimento de barragens em áreas onde a variação na direção lateral (y) é significativa, como em vales ou terrenos irregulares. Sendo esta uma simplificação das equações de Navier-Stokes, assume-se que a variação de profundidade na direção vertical (z) é muito menor em comparação com as dimensões horizontais do problema. Para a solução numérica desta equação, usa-se o método de elementos finitos na forma semi-implícita da formulação geral das variáveis características. Um estudo de caso será abordado, mostrando uma validação com resultados da literatura.

Palavras-chave: Águas rasas; Elementos finitos; Rompimento de barragens; Métodos numéricos; Modelagem matemática

ABSTRACT

This work presents the shallow water equation, which takes into account variations in quantities (water height and flow speed). This equation will be used to model dam failure problems in areas where the variation in the lateral direction (y) is significant, such as in valleys or uneven terrain. Since this is a simplification of the Navier-Stokes equations, it is assumed that the depth variation in the vertical (z) direction is much smaller compared to the horizontal dimensions of the problem. For the numerical solution of this equation, the finite element method is used in the semi-implicit form of the general formulation of the characteristic variables. A case study will be addressed, showing validation with results from the literature.

Keywords: Shallow waters; Finite elements; Dam break; Numerical methods; Mathematical modeling



1 INTRODUÇÃO

As limitações da mente humana são tais que não podemos compreender completamente o comportamento de ambientes complexos e criações em uma única operação (Abbott, 1979). Portanto, é natural para engenheiros, cientistas e economistas dividirem todos os sistemas em seus componentes individuais ou elementos cujo comportamento é facilmente compreensível e, em seguida, reconstruírem o sistema original a partir desses componentes para estudar seu comportamento (Li & Duffy, 2012). Em muitos casos, um modelo adequado pode ser obtido usando um número finito de componentes (Kocaman & Ozmen-Cagatay, 2015), que chamaremos de problemas discretos.

As simplificações adotadas na descrição do movimento em corpos d'água de pouca profundidade apresentam notáveis similaridades com as técnicas empregadas para modelar o fluxo de ar na atmosfera terrestre (Guo et al., 2011). Essa analogia entre os dois fenômenos físicos tem implicações significativas, ampliando a aplicabilidade desses métodos para além da hidrologia, adentrando também o campo da meteorologia. Ao reduzir a complexidade das equações de movimento, tais simplificações se tornam ferramentas indispensáveis na predição de eventos climáticos, contribuindo para a compreensão e prevenção de desastres naturais.

Essas simplificações não apenas facilitam a manipulação matemática das equações envolvidas, mas também tornam os modelos mais computacionalmente eficientes, o que é crucial em um contexto onde o tempo de processamento é uma preocupação constante. Especificamente, quando a profundidade da água é consideravelmente menor do que as dimensões horizontais da área em estudo, as simplificações nas equações de movimento se revelam ainda mais pertinentes e eficazes (Reddy, 2005). Essa condição é comumente encontrada em estudos de áreas costeiras, estuários e rios de planície, onde a variação vertical da profundidade é relativamente pequena em comparação com a extensão horizontal da região.

Além disso, a aplicação dessas simplificações não se restringe apenas à modelagem de fenômenos naturais, mas também encontra utilidade em projetos de engenharia costeira e gestão de recursos hídricos. Ao fornecer uma representação precisa e eficiente do comportamento das águas rasas, essas técnicas permitem a concepção e o planejamento de infraestruturas hídricas resilientes e sustentáveis,

capazes de lidar com desafios como enchentes, erosão costeira e intrusão salina. Portanto, a interseção entre a simplificação das equações de movimento e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento destaca a importância e a versatilidade desses métodos na compreensão e manejo dos recursos naturais.

A simulação numérica de escoamentos em águas rasas é uma ferramenta importante da modelagem computacional usada para prever e entender o comportamento da água em sistemas onde a profundidade da água é muito menor em comparação com outras dimensões da região, como rios, canais, lagos, estuários e áreas costeiras (Kawahara, 1980). Essas simulações são valiosas para uma variedade de aplicações, incluindo previsão de inundações (Hughes et al., 2012), gerenciamento de recursos hídricos (Silva, 2007), engenharia costeira e estudos ambientais (Thomas & Nithiarasu, 2005). Essas equações descrevem a conservação da massa e do momento em uma região de interesse. Para resolver as equações de águas rasas em situações do mundo real, é necessário usar métodos numéricos.

Um aspecto fundamental na simulação de escoamentos é a criação de uma malha computacional que divide a região de estudo em elementos menores (Rao, 2017). Essa malha é usada para calcular as variáveis do escoamento, como a altura da água e a velocidade (Donea & Huerta, 2003), em pontos discretos do espaço e do tempo (Zienkiewicz et al., 2013). Para simular escoamentos em águas rasas de forma realista, é necessário definir condições de contorno apropriadas, como níveis de água nas fronteiras da região de estudo (Akin, 2005). Isso pode envolver a modelagem de entradas de água, saídas, marés, chuvas e outros fatores relevantes as simulações de escoamentos em águas rasas podem incluir a modelagem de diversos processos físicos, como a propagação de ondas, a interação com o leito do canal, a erosão e sedimentação, a influência das correntes de marés, a difusão de poluentes, entre outros (Michel, 2022).

Atualmente, dispomos de dados e mapas de alta resolução das principais concentrações urbanas. Embora esses recursos permitam previsões ao nível urbano, sua aplicação em contextos operacionais frequentemente demanda consideráveis tempos de computação. Isso destaca a importância de contar com códigos de alto desempenho, geometricamente versáteis e altamente paralelos como componentes essenciais para tais aplicações (Linn, 2013).

Para modelar submersões e inundações, utilizamos as equações de águas rasas, também conhecidas como leis do equilíbrio médio de profundidade, as quais possuem uma natureza inerentemente hiperbólica (Szmelter & Smolarkiewicz, 2010). Essas equações oferecem uma precisão notável na representação da quebra e elevação das ondas, tendo um grande potencial para modelar a propagação de ondas de longo alcance, como as ondas de tempestade e tsunamis (Szmelter & Smolarkiewicz, 2011). Além disso, esse modelo encontra aplicações valiosas em áreas como hidrologia e meteorologia (Caleffi et al., 2003).

Neste trabalho, apresentam-se as equações que descrevem o comportamento da água e discutimos sua discretização usando o método de elementos finitos triangulares (Kolman et al., 2017), isso é feito desenvolvendo-se um programa na linguagem Fortran. Além disso, no domínio do tempo, o termo advectivo emprega-se o método CBS (*Characteristic Based Split*) (Zienkiewicz et al., 2014), para visualizar a simulação utiliza-se o software Tecplot 360 (Tecplot, Inc., 2024) e para a discretização da malha do domínio o software GiD (International Center for Numerical Methods in Engineering, 2024). O método das características oferece uma solução eficaz para mitigar as oscilações espúrias em escoamentos com advecção dominante (Ruas, 2013).

2 METODOLOGIA

As equações de águas rasas podem ser escritas na forma compacta como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \quad (1)$$

onde,

$$\Phi = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{u}_1 \\ h\bar{u}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} h\bar{u}_i \\ h\bar{u}_1\bar{u}_i + \delta_{1i}\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) \\ h\bar{u}_2\bar{u}_i + \delta_{2i}\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

e

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\hat{f}\bar{u}_2 - g(h-H)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho}\tau_{31}^s + \frac{g\bar{u}_1|\bar{\mathbf{u}}|}{Ch^2} \\ h\hat{f}\bar{u}_1 - g(h-H)\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_2} - \frac{1}{\rho}\tau_{32}^s + \frac{g\bar{u}_2|\bar{\mathbf{u}}|}{Ch^2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

com $i = 1, 2$, sendo ρ a densidade, h a profundidade, u_i a velocidade, \bar{u}_i a velocidade média, p a pressão, apresentada na forma $\frac{1}{2}(h^2 - H^2)$, C o coeficiente de Manning e g a gravidade.

A fórmula $\frac{1}{2}(h^2 - H^2)$ para a pressão na equação de águas rasas surge da integração da pressão hidrostática ao longo da profundidade da água e representa a variação da pressão causada pela elevação ou depressão da superfície da água em relação à profundidade de equilíbrio H .

A forma conservativa das equações para águas rasas foi apresentada pela primeira vez nas referências (Abbott, 1979) e (Peraire, 1986). No entanto, muitas variantes das equações para águas rasas existem na literatura, introduzindo várias aproximações.

Neste artigo, usando o sistema cartesiano ortogonal, as equações de águas rasas serão reescritas na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2}g(h^2 - H^2) \right] + Q_i &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

onde $U_i = h\bar{u}_i$. As demais variáveis são as mesmas descritas anteriormente. A extensão da solução efetiva por elementos finitos será a forma semi-implícita da formulação geral do CBS¹ que fornece uma resposta crítica para o passo de tempo dependendo apenas da velocidade atual do escoamento U (para convecção pura):

$$\Delta t \leq \frac{d}{|\mathbf{U}|} \quad (6)$$

onde d é o tamanho do elemento, em vez de um intervalo de tempo crítico em termos

¹O algoritmo *Characteristic-Based-Split* é um método numérico utilizado na resolução de equações diferenciais parciais hiperbólicas, particularmente em simulações de dinâmica de fluidos computacional (CFD) e problemas de transporte de solutos

da velocidade da onda $c = \sqrt{gh}$:

$$\Delta t \leq \frac{d}{c + |\mathbf{U}|} \quad (7)$$

o que coloca uma restrição severa em métodos totalmente explícitos, como a aproximação de Taylor-Galerkin e outros, particularmente para a análise de propagação de ondas longas em águas rasas e, em geral, para problemas de baixo número de Froude (Zienkiewicz et al., 2013). Através de uma mudança de coordenadas ao longo das linhas características, os termos advectivos das equações fundamentais do escoamento são removidas, tornando estas equações auto-adjuntas, sobre as quais a aplicação do método de Galerkin Convencional (Bubnov-Galerkin) leva a um procedimento de discretização espacial otimizado. Tendo em vista essas observações, para diminuir as restrições, utilizaremos o método semi-implícito. As três etapas essenciais do esquema CBS podem ser escritas em sua forma semi-discreta como

Passo 1:

$$\Delta U_i^* = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j U_i) - Q_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j U_i) + Q_i \right) \right]^n \quad (8)$$

Passo 2:

$$\Delta h = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i} \right) \right] \quad (9)$$

Passo 3:

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t^2}{2} \bar{u}_k \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_k \partial x_i} \quad (10)$$

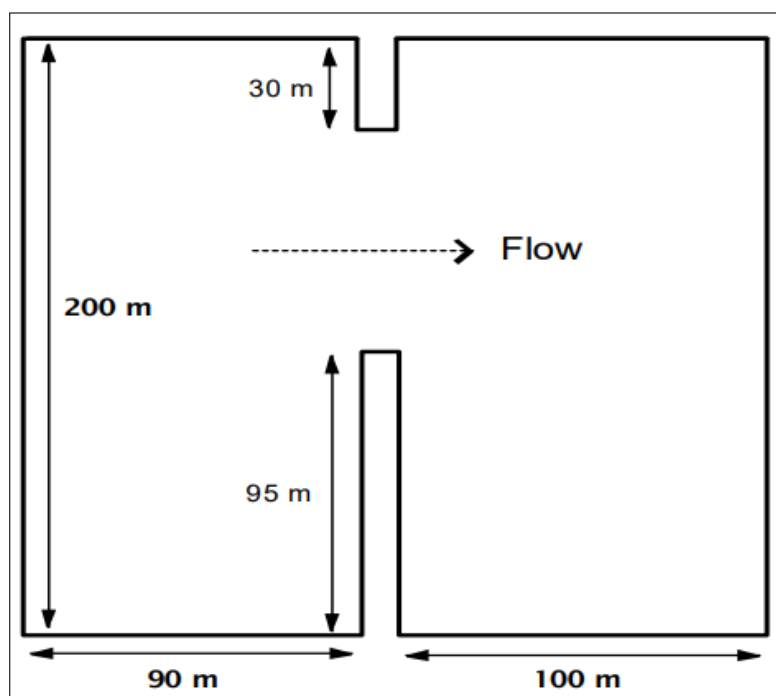
com $p = 1/2g(h^2 - H^2)$. Nas equações acima, $0,5 \leq \theta_1 \leq 1,0$ e $\theta_2 = 0,0$ para o esquema explícito e $0,5 \leq \theta_1 \leq 1,0$ e $\theta_2 = 1,0$ para o esquema semi-implícito.

3 RESULTADOS

A área de estudo é uma barragem de 200 metros de largura, 200 metros de comprimento e possui fundo plano. A água é retida na parte esquerda da barragem. Supõe-se que, no instante $t = 0s$, ocorre subitamente uma ruptura parcial no

reservatório da barragem, que é assimétrica ao longo de um comprimento de $75m$. A espessura da barragem é de $10m$ na direção do fluxo. A Fig. (1) fornece uma descrição geométrica desse problema. Deve-se observar que não há uma solução analítica para esse problema bidimensional, mas os resultados podem ser comparados com os de outros esquemas numéricos, como (Lakhlifi et al., 2018).

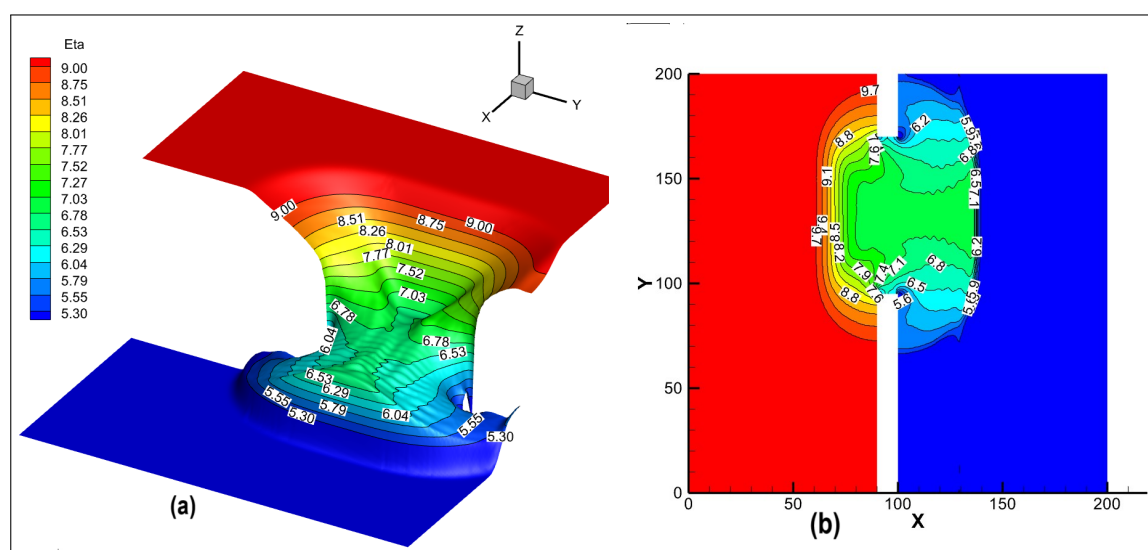
Figura 1 – Rompimento parcial da barragem: Geometria utilizada (Lakhlifi et al., 2018)



Fonte: autores (2025)

Figura 2 – (a) Perfil da superfície 3D

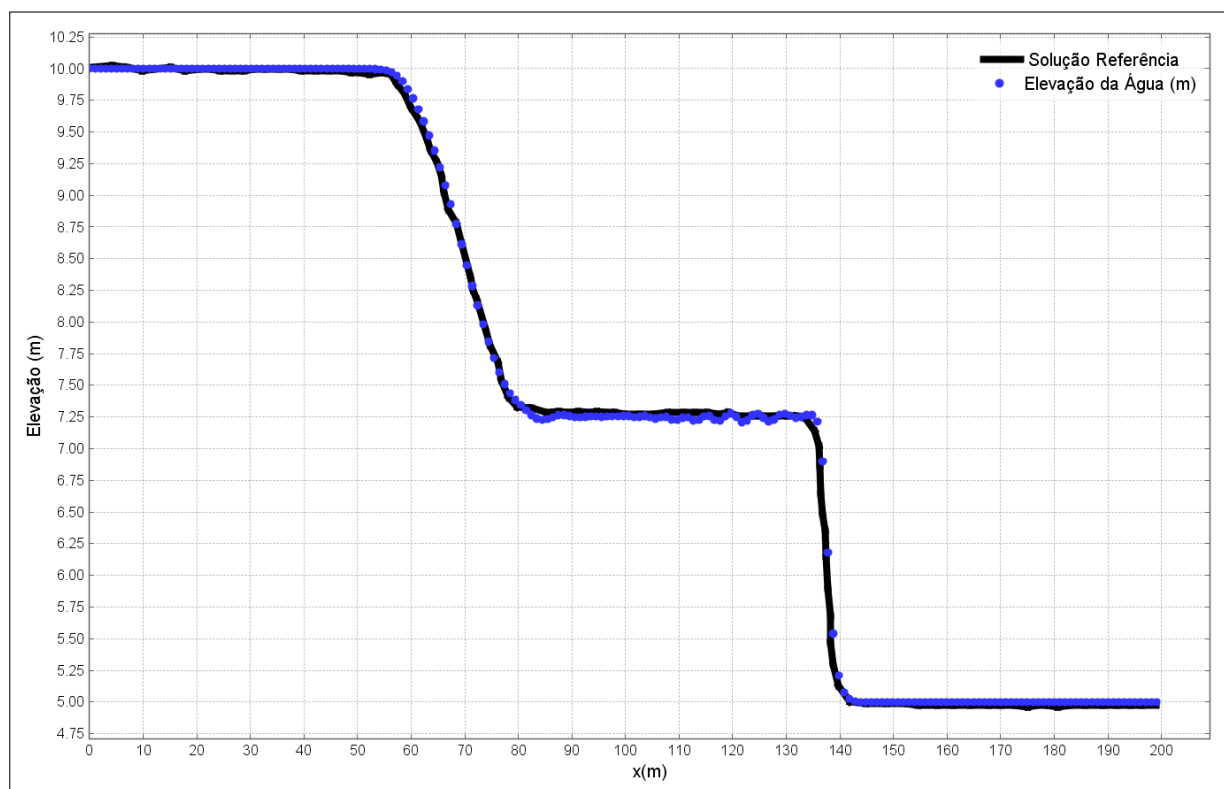
(b) Curvas de nível, em $t = 4,0s$



Fonte: autores (2025)

Uma razão de $\frac{h_2}{h_1} = 0,5$ é inicialmente fixada, com $h_1 = 10m$ sendo a altura da água no reservatório e $h_2 = 5m$ a altura da água a jusante da barragem. O rompimento ocorre em $x = 100m$ e assume-se que a água na barragem está em repouso no estado inicial. Nesta simulação, o atrito da parede e do fundo é levado em consideração ajustando o número de Manning para $0,03s/m^{1/3}$. A malha computacional foi gerada com 44.877 pontos e 88.702 elementos triangulares, tendo a condição de contorno fechada em todas as fronteiras.

Figura 3 – Comparação com a literatura (Lakhlifi et al., 2018), em $t = 4,0s$



Fonte: autores (2025)

Com o colapso parcial da barragem, a água flui em direção à área circundante, gerando ondas descendentes onde ocorre um fenômeno de refluxo devido à configuração do terreno e à gradual redução do nível do reservatório. As Figuras 2 e 3 exibem os resultados da simulação para o perfil da superfície e as curvas de nível correspondentes da região em $t = 4,0s$. Especificamente, na Fig. 2, são mostradas as superfícies livres tridimensionais e as linhas de contorno da altura da água. É possível observar que o fluxo direcionado para a direita se expande verticalmente. Além disso, uma onda de rarefação se propaga rio acima, enquanto dois vórtices assimétricos de baixa intensidade se formam nos flancos externos da barragem. É evidente que, ao

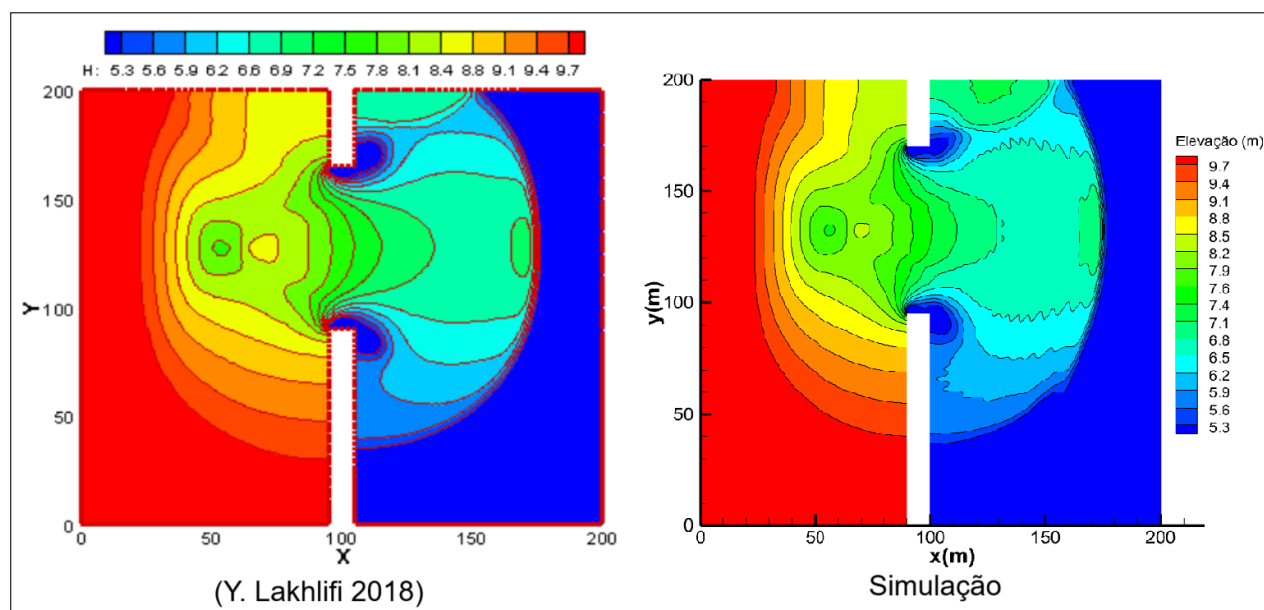
empregar malhas refinadas, a alta resolução é automaticamente alcançada em áreas onde os gradientes de profundidade da água são pronunciados, como nas frentes de choque móveis. Aparentemente, o padrão de fluxo geral neste exemplo é mantido sem apresentar excessiva difusão numérica nos resultados.

Na Fig. 3, toma-se uma linha unidimensional no centro do rompimento, em $x = 135m$ ao longo da barragem. Este tipo de simulação é de difícil captação devido ao desvio e também à formação de refluxo, que acaba formando zonas de descontinuidade próximas de $x = 55m$ e $x = 140m$.

Os resultados gerados neste trabalho, são muito semelhantes aos apresentados pela literatura existente e mencionados anteriormente. Nota-se também um ligeiro encolhimento da superfície livre na frente de onda. Este aumento também é observado nos resultados apresentados por (Clebsch, 1883), sem viscosidade artificial, ver (Zienkiewicz & Ortiz, 1998). Na Fig. 3, mostra-se uma comparação com a literatura (Lakhlifi et al., 2018).

Outra comparação é feita com o mesmo número de elementos, porém em $t = 8s$, como pode ser observado na Fig. 4. Verifica-se que o fluxo em movimento para a direita se propaga para cima e para baixo, a onda de rarefação se propaga para montante e dois vórtices fracos assimétricos são desenvolvidos em ambos os lados na violação.

Figura 4 – Referência e simulação em $t = 8,0s$



Fonte: autores (2025)

4 CONCLUSÕES

A ocorrência frequente de inundações representa um desafio persistente para a sociedade, sendo necessário um aprofundamento nas pesquisas nessa área. Tais estudos desempenham um papel crucial na avaliação dos recursos hídricos, fornecendo entendimentos valiosos para previsões sobre o aumento do nível da água na área urbana da cidade de Pelotas.

A utilização de simulações numéricas em cenários de águas rasas apresenta-se como uma abordagem robusta para investigar inundações. Estas simulações são capazes de capturar o comportamento bidimensional do fluxo de água e, simultaneamente, o deslocamento do nível da água. Ademais, é viável incorporar métodos de controle e modelos de dispersão de poluentes às equações governantes, possibilitando o gerenciamento do volume interno de água e a análise da contaminação ambiental na região aquática.

Essa abordagem possibilita uma gestão abrangente das inundações e a preservação dos ecossistemas aquáticos. No presente estudo, foi alcançada uma previsão precisa da superfície livre com conservação correta das propriedades físicas envolvidas no sistema.

Destaca-se, também, que as características do programa computacional, desenvolvido pelos autores, incluem a capacidade de prever com precisão a superfície livre: com conservação adequada das propriedades físicas e termodinâmicas do fluido em movimento, tais como conservação de massa, momento linear, angular e energia; assim como um bom comportamento de convergência em relação ao refinamento computacional e a implementação em malhas triangulares que podem ser facilmente geradas para o estudo hidrodinâmico em geometrias complexas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao GDISPEN, Grupo de Dispersão de Poluentes e Engenharia Nuclear da UFPel, pelas contribuições, bem como ao apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da CAPES, pelo fomento à pesquisa. Além da estrutura cedida pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

REFERÊNCIAS

- Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows*. Pitman Pub.
- Akin, J. (2005). *Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann.
- Caleffi, V., Valiani, A., & Zanni, A. (2003). Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research*, 41(2):167–177. <https://doi.org/10.1080/00221680309499959>.
- Clebsch, R. (1883). *Theorie de l'élasticité des corps solides*. Dunod.
- Donea, J. & Huerta, A. (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons.
- Guo, W., Lai, J., Lin, G., Lee, F., & Tan, Y. (2011). Finite-volume multi-stage scheme for advection-diffusion modeling in shallow water flows. *Journal of Mechanics*, 27(3):415–430.
- Hughes, T. J., Wing Kam Liu, D., & Zimmermann, T. K. (2012). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Courier Corporation.
- International Center for Numerical Methods in Engineering (2024). *GiD: The Personal Pre and Post Processor*. Versão 16.1.3. <https://www.gidhome.com/>.
- Kawahara, M. (1980). On finite-element methods in shallow-water long-wave flow analysis. In Oden, J., editor, *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*. (pp. 261–287). North-Holland.
- Kocaman, S. & Ozmen-Cagatay, H. (2015). Investigation of dam-break induced shock waves impact on a vertical wall. *Journal of Hydrology*, 525:1–12. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169415002115>.

- Kolman, R., Okrouhlík, M., Berezovski, A., Gabriel, D., Kopačka, J., & Plešek, J. (2017). B-spline based finite element method in one-dimensional discontinuous elastic wave propagation. *Applied Mathematical Modelling*, 46:382–395. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X17300835>.
- Lakhlifi, Y., Daoudi, S., & Boushaba, F. (2018). Dam-break computations by a dynamical adaptive finite volume method. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 11(6):1543–1556.
- Li, S. & Duffy, C. J. (2012). Fully-coupled modeling of shallow water flow and pollutant transport on unstructured grids. *Procedia Environmental Sciences*, 13:2098–2121.
- Linn, R. V. (2013). *Simulação computacional de escoamentos compressíveis utilizando adaptação de malhas anisotrópica*. [Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. Repositório Digital Lume UFRGS.
- Michel, S. (2022). *Finite Element Methods for Shallow Water Equations: Analysis, Modeling and Applications to Coastal Hydrodynamic*. [Doutorado em matemática e Ciências da Computação Matemática Aplicada e aplicação da matemática, Universidade de Bordéu]. Portal de teses HAL.
- Peraire, J. (1986). *A Finite Element Method for Convection Dominated Flows*. University College of Swansea.
- Rao, S. (2017). *The Finite Element Method in Engineering*. Elsevier Science. <https://books.google.com.br/books?id=XN0kDwAAQBAJ>.
- Reddy, J. (2005). *Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- Ruas, V. (2013). Hermite finite elements for second order boundary value problems with sharp gradient discontinuities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 246:234–242. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042712003494>.

- Silva, C. S. (2007). *Inundações em Pelotas/RS: o uso de geoprocessamento no planejamento paisagístico e ambiental*. [Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Santa Catarina]. Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.
- Szmelter, J. & Smolarkiewicz, P. K. (2010). An edge-based unstructured mesh discretization in geospherical framework. *Journal of Computational Physics*, 229(13):4980–4995. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110001270>.
- Szmelter, J. & Smolarkiewicz, P. K. (2011). An edge-based unstructured mesh framework for atmospheric flows. *Computers & Fluids*, 46(1):455–460.
- Tecplot, Inc. (2024). *Tecplot 360*. Versão 2024R1. <https://www.tecplot.com/products/tecplot-360/>.
- Thomas, C. G. & Nithiarasu, P. (2005). Effect of variable smoothing and stream line direction on the viscous compressible flow calculations. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 15:420–428.
- Zienkiewicz, O. & Ortiz, P. (1998). The characteristic based split algorithm in hydraulic and shallow-water flows. keynote lecture. In Jayawardena, A., Lee, J., & Wang, Z., editors, *2nd International Symposium on Environmental Hydraulics*. CRC Press.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Nithiarasu, P. (2013). *The finite element method for fluid dynamics*. (6th ed.). Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Nithiarasu, P. (2014). *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. (7th ed.). Elsevier Butterworth-Heinemann.

Contribuições dos autores

1 – Gustavo Kurz (Corresponding Author)

Matemático

<https://orcid.org/0000-0002-8774-2394> • gustavobrk@gmail.com

Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Redação – Preparação do Rascunho Original

2 – Renato Vaz Linn

Engenheiro, Professor

<https://orcid.org/0000-0003-0843-2396> • renatolinn@ufrgs.com

Contribuição: Revisão de literatura, análise de dados, redação – revisão e edição

3 – Daniela Buske

Matemática, Professora

<https://orcid.org/0000-0002-4573-9787> • danielabuske@gmail.com

Contribuição: Revisão de literatura, análise de dados, redação – revisão e edição

4 – Leonidas Alejandro Arias Baltazar

Engenheiro, Professor

<https://orcid.org/0000-0001-6258-250X> • leonidasariasb@gmail.com

Contribuição: Revisão de literatura, análise de dados, redação – revisão e edição

5 – Régis Sperotto de Quadros

Matemático, Professor

<https://orcid.org/0000-0002-9720-8013> • quadros99@gmail.com

Contribuição: Revisão de literatura, análise de dados, redação – revisão e edição

Como citar este artigo

Kurz, G. B., Linn, R. V., Buske, D., Baltazar, L. A. A., & Quadros, R. S. (2025). Equações de águas rasas aplicado a análise de rompimento de barragens. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 47, esp. 1, e90599. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X90599>.