



UFSC

CIÊNCIA e NATURA



ISSN 2179-460X
OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 47, esp. 1, e90584, 2025 • <https://doi.org/10.5902/2179460X90584>
Submissão: 12/01/25 • Aprovação: 14/01/25 • Publicação: 10/03/25

IV Jornada de Matematica e Matematica aplicada UFSM

Aplicação de transformada difeomorfa para resolução de EDPs com domínios curvilíneos

Application of diffeomorphic transform to solve PDEs with curvilinear domains

Joel Junqueira de Moraes¹ , André Meneghetti¹

¹Universidade Federal do Rio Grande, RS, Brasil

RESUMO

A compreensão dos fenômenos naturais muitas vezes exige a aplicação de modelos matemáticos complexos. Em diversos casos, para capturar de maneira precisa e abrangente esses fenômenos, é essencial recorrer às equações diferenciais parciais (EDPs), que são ferramentas poderosas na descrição de processos físicos e naturais. As EDPs abrangem uma ampla variedade de fenômenos e possuem diferentes características, exigindo abordagens diversas para sua resolução. Contudo, as técnicas tradicionais de resolução de EDPs muitas vezes operam sob a suposição de que o domínio onde estão definidas é retangular. Essa suposição simplifica significativamente o processo de solução das equações, facilitando o uso de técnicas matemáticas tradicionais. No entanto, tal pressuposto pode ser limitante quando lidamos com fenômenos que ocorrem em domínios com geometrias mais complexas, como domínios curvilíneos. Este estudo se concentra, portanto, na resolução de EDPs definidas em domínios curvilíneos, visando expandir as possibilidades de aplicação das técnicas clássicas. Para alcançar esse objetivo, recorremos aos princípios da Geometria Diferencial. Sob condições específicas, é possível desenvolver uma transformação difeomorfa, que estabelece um novo sistema de coordenadas. Essa transformação permite que o domínio curvilíneo seja representado de forma equivalente em um domínio retangular, permitindo a aplicação das técnicas clássicas de resolução de EDPs.

Palavras-chave: Escoamento; Numérico; Curvilíneo; Difusão; Simulação

ABSTRACT

Understanding natural phenomena often requires the application of complex mathematical models. In many cases, to accurately and comprehensively capture these phenomena, it is essential to resort to partial differential equations (PDEs), which are powerful tools in describing physical and natural processes. PDEs cover a wide variety of phenomena and have different characteristics, requiring different approaches for their resolution. However, traditional PDE solving techniques often operate under the assumption that the domain in which they are defined is rectangular. This assumption



Artigo publicado por Ciência e Natura sob uma licença CC BY-NC-SA 4.0.

significantly simplifies the process of solving equations, facilitating the use of traditional mathematical techniques. However, such an assumption can be limiting when we deal with phenomena that occur in domains with more complex geometries, such as curvilinear domains. This study therefore focuses on solving PDEs defined in curvilinear domains, aiming to expand the possibilities of applying classical techniques. To achieve this objective, we resort to the principles of Differential Geometry. Under specific conditions, it is possible to develop a diffeomorphic transformation, which establishes a new coordinate system. This transformation allows the curvilinear domain to be represented in an equivalent way in a rectangular domain, allowing the application of classical PDE resolution techniques.

Keywords: Flow; Numerical; Curvilinear; Diffusion; Simulation

1 INTRODUÇÃO

A aplicação das Transformadas Difeomorfas pode ser utilizada para resolver equações diferenciais parciais (EDPs) em domínios curvilíneos. Inicialmente, a transformação ocorre no domínio, porém, consequentemente, a mudança de variáveis atinge as equações diferenciais que modelam o problema estudado. Após a transformação, a equação resultante precisa ser resolvida. No nosso estudo, adotamos o método numérico de diferenças finitas para a resolução das equações. Como em qualquer método numérico, buscamos uma solução aproximada que se assemelhe à solução real. Enfrentamos vários desafios, incluindo a validação do modelo. A equação transformada contém coeficientes diferenciais dependentes das variáveis espaciais, tornando inviável a aplicação do tradicional método de Von Neumann Hirsch (2007) para validação. Outro método muito utilizado para validação é a comparação com experimentos, mas todos os experimentos conhecidos pelos autores são realizados em domínios retangulares.

Portanto, adotamos o seguinte procedimento de validação: primeiro, aplicamos nosso modelo a duas equações diferenciais diferentes. A primeira é a equação de advecção-difusão em coordenadas curvilíneas, que simula a dispersão de poluentes liberados por uma fonte elevada. Para validar essa solução, empregamos o teste residual, detalhado nas próximas seções. Em seguida, aplicamos nosso modelo à equação de difusão do calor. Utilizamos coordenadas curvilíneas novamente e realizamos o teste residual. Como essa equação tem solução analítica em coordenadas retangulares, consideramos as fronteiras como retas para fins de comparação. Assim, comparamos a solução encontrada pelo nosso modelo com a solução analítica para este caso particular. Todos os modelos são bidimensionais.

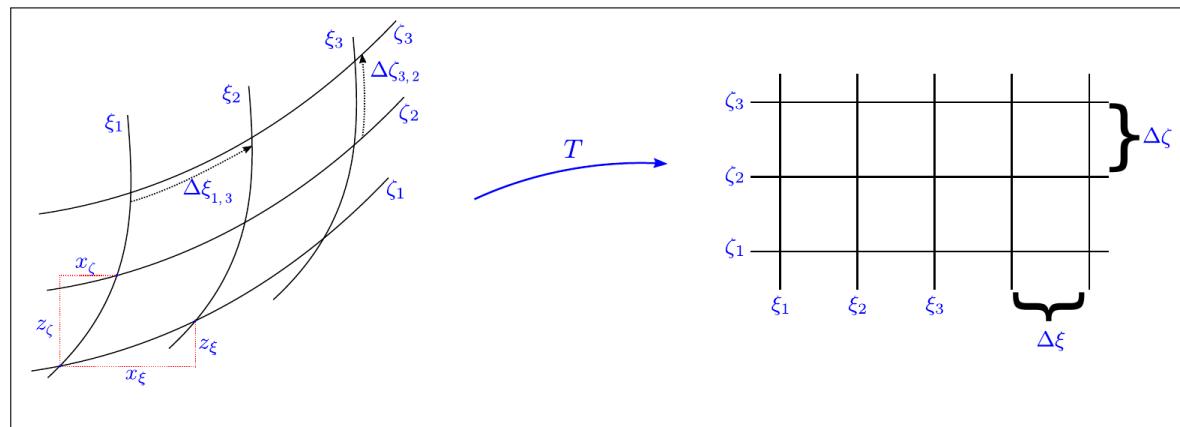
Na seção 2, detalhamos o processo de transformação do sistema de coordenadas e dos operadores diferenciais. Na seção 3, discutimos o problema da dispersão, o modelo aplicado à equação de advecção-difusão, os resultados obtidos e a validação por meio do teste residual. Por fim, na seção 4, repetimos o processo para a equação do calor e incluímos o caso do domínio retangular para contribuir na validação do modelo.

2 TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

A Equação 1 apresenta a transformação difeomorfa de coordenadas T , que efetua a conversão do domínio curvilíneo original, definido no sistema de coordenadas cartesiano $x \times z$, para um domínio retangular no novo sistema de coordenadas denominado $\xi \times \zeta$, como explicado por Meneghetti (2018).

$$T(x,z) = (\xi(x,z), \zeta(x,z)). \quad (1)$$

Figura 1 – Dependência entre as malhas



Fonte: Meneghetti (2018)

Com base na Equação 1 é possível notar a dependência das variáveis generalizadas $\xi \times \zeta$ com as variáveis originais $x \times z$. Esta relação é apresentada de forma mais clara na Figura 1.

Quando lidamos com um domínio curvilíneo conhecido, seja por meio de equações ou por uma malha construída, as variáveis x e z do sistema de coordenadas cartesianas estão intrinsecamente relacionadas às variáveis ξ e ζ do sistema de

coordenadas curvilíneas. Podemos entender ξ e ζ como funções que dependem de x e z , e vice-versa. Assim, as funções $\xi(x,z)$ e $\zeta(x,z)$ são conhecidas, assim como todas as suas derivadas.

2.1 Transformação dos Operadores Diferenciais

Considere uma função real $\psi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que depende das variáveis $(x,z) \in A$, onde A é um conjunto aberto. Ao realizar a transformação do sistema de coordenadas, as variáveis x e z passam a depender das novas variáveis ξ e ζ . Essa relação de dependência reflete nos operadores diferenciais. As Equações 2, 3, 4 e 5 ilustram essas relações.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (\xi_x)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \zeta_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} + (\zeta_x)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \zeta_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (\xi_z)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\xi_z \zeta_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} + (\zeta_z)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \xi_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \zeta_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \quad (5)$$

2.2 Método Numérico

Para resolver as equações diferenciais, utilizamos o método numérico de diferenças finitas explícitas. Os detalhes sobre a metodologia empregada podem ser encontrados na literatura, especialmente em obras como Hoffman (2001) e/ou Ruggiero & Rocha Lopes (1996). É relevante ressaltar que esse método possui uma ordem de precisão de 2. Para lidar com as fronteiras do domínio, seguimos o método descrito por Strikwerda (2007), o qual mantém a ordem de precisão em 2. Os operadores diferenciais necessários para resolver as equações de advecção-difusão e a equação do calor são apresentados na Equação 6, juntamente com suas respectivas aproximações.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi_{i,k}^{n+1} - \psi_{i,k}^n}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \xi} &\approx \frac{\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i,k}^n}{\Delta \xi}, \\
\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} &\approx \frac{\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k}^n}{\Delta \zeta}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &\approx \frac{\psi_{i+1,k}^n - 2\psi_{i,k}^n + \psi_{i-1,k}^n}{\Delta \xi^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &\approx \frac{\psi_{i,k+1}^n - 2\psi_{i,k}^n + \psi_{i,k-1}^n}{\Delta \zeta^2}; \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} &\approx \frac{\psi_{i+1,k+1}^n - \psi_{i-1,k+1}^n - \psi_{i+1,k-1}^n + \psi_{i-1,k-1}^n}{4\Delta \xi \Delta \zeta}.
\end{aligned} \tag{6}$$

3 EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

O exemplo da equação de advecção-difusão, que descreve a dispersão de poluentes liberados por fontes elevadas em uma atmosfera estaticamente neutra, é mencionado Stull (1988).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \tag{7}$$

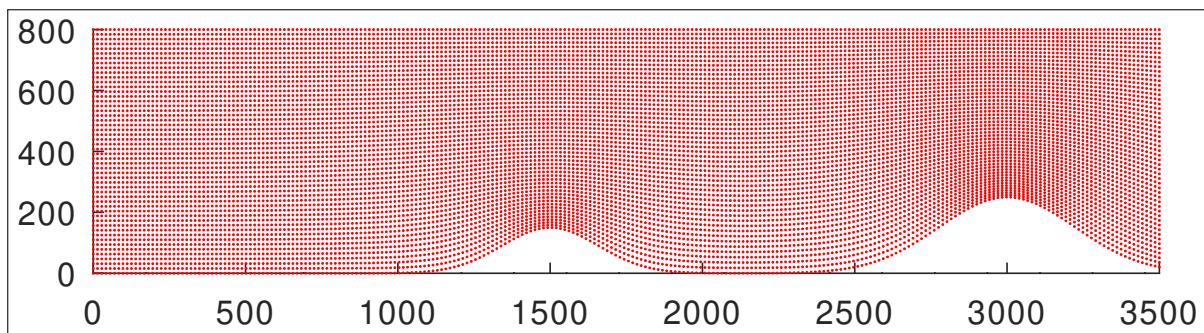
A função C representa a concentração de contaminantes em unidades de $[g/m^2]$. Neste estudo, os coeficientes de difusão são constantes e definidos como $K_x = 0,1[m^2/s]$ e $K_z = 5[m^2/s]$. O campo de velocidade é caracterizado por $u = 1,5[m/s]$ na direção horizontal e $w = 0[m/s]$ na direção vertical. O modelo é definido no regime transitório. As condições de contorno e a condição inicial foram aplicadas conforme descritas na Equação 8.

$$\begin{aligned}
C(x,g(x),t) &= 0, \\
C_x(3500,z,t) &= 0, \\
C_z(x,800,t) &= 0, \\
uC(0,z,t) &= Q\delta(z - 200), \\
C(x,z,0) &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

na qual $Q = 600\text{g/s}$ é a taxa de emissão e δ representa o funcional Delta de Dirac. O domínio curvilíneo Ω é delimitado pelas seguintes fronteiras: as retas verticais em $x = 0[\text{m}]$ e $x = 3500[\text{m}]$, a reta horizontal em $z = 800[\text{m}]$, e pela curva definida na seguinte Equação 9.

$$g(x) = 150 \exp\left(-\frac{(x-1300)^2}{50000}\right) + 250 \exp\left(-\frac{(x-3000)^2}{100000}\right). \quad (9)$$

Figura 2 – Domínio Curvilíneo Ω



Fonte: autores (2025)

Considerando $\psi = C$ nas Equações 2, 3, 4 e 5, substituindo na Equação 7, obtemos a Equação 10.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \left(-u\xi_x \frac{\partial C}{\partial \xi} - u\zeta_x \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) + \left(-w\xi_z \frac{\partial C}{\partial \xi} - w\zeta_z \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + K_x \left(\xi_x \xi_x \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \zeta_x \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \zeta} + \zeta_x \zeta_x \frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial C}{\partial \xi} + \zeta_{xx} \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial K_x}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial K_x}{\partial \zeta} \zeta_x \right) \left(\xi_x \frac{\partial C}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + K_z \left(\xi_z \xi_z \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + 2\xi_z \zeta_z \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \zeta} + \zeta_z \zeta_z \frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2} + \xi_{zz} \frac{\partial C}{\partial \xi} + \zeta_{zz} \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial K_z}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial K_z}{\partial \zeta} \zeta_z \right) \left(\xi_z \frac{\partial C}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Reordenamos a Equação 10, de modo que os operadores diferenciais comuns fiquem em evidência. A Equação 10 pode ser reescrita conforme a Equação 11.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \zeta} + D_3 \frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2} + D_4 \frac{\partial C}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial C}{\partial \zeta}, \quad (11)$$

no qual os coeficientes D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5 , são apresentados pela Equação 12.

$$D_1 = (K_x \xi_x \xi_x + K_z \xi_z \xi_z),$$

$$D_2 = 2(K_x \xi_x \zeta_x + K_z \xi_z \zeta_z),$$

$$D_3 = (K_x \zeta_x \zeta_x + K_z \zeta_z \zeta_z),$$

$$\begin{aligned} D_4 = & - (u \xi_x + w \xi_z) + (K_x \xi_{xx} + K_z \xi_{zz}) \\ & + \left(\frac{\partial K_x}{\partial \xi} \xi_x^2 + \frac{\partial K_z}{\partial \xi} \xi_z^2 \right) + \left(\frac{\partial K_x}{\partial \zeta} \xi_x \zeta_x + \frac{\partial K_z}{\partial \zeta} \xi_z \zeta_z \right), \\ D_5 = & - (u \zeta_x + w \zeta_z) + (K_x \zeta_{xx} + K_z \zeta_{zz}) \\ & + \left(\frac{\partial K_x}{\partial \xi} \xi_x \zeta_x + \frac{\partial K_z}{\partial \xi} \xi_z \zeta_z \right) + \left(\frac{\partial K_x}{\partial \zeta} \zeta_x^2 + \frac{\partial K_z}{\partial \zeta} \zeta_z^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Assume-se que, para qualquer ponto $(x, z) \in \Omega$, o determinante da matriz Jacobiana é diferente de zero. Essa condição assegura a existência de uma transformação inversa, como demonstrado por Grinfeld (2013). Na Equação 11, os coeficientes D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5 variam em função das coordenadas ξ e ζ . Após a transformação do sistema de coordenadas, o novo domínio Ω' é retangular. Para resolver numericamente a Equação 11, utilizamos os operadores diferenciais discretizados da Equação 6. Os coeficientes D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5 também são discretizados. Isso nos leva à Equação 13.

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,k}^{n+1} - C_{i,k}^n}{\Delta t} = & D_{i,k}^1 \frac{C_{i+1,k}^n - 2C_{i,k}^n + C_{i-1,k}^n}{\Delta \xi^2} + D_{i,k}^2 \frac{C_{i+1,k+1}^n - C_{i-1,k+1}^n - C_{i+1,k-1}^n + C_{i-1,k-1}^n}{4\Delta \xi \Delta \zeta} \\ & + D_{i,k}^3 \frac{C_{i,k+1}^n - 2C_{i,k}^n + C_{i,k-1}^n}{\Delta \zeta^2} + D_{i,k}^4 \frac{C_{i+1,k}^n - C_{i,k}^n}{\Delta \xi} + D_{i,k}^5 \frac{C_{i,k+1}^n - C_{i,k}^n}{\Delta \zeta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Um dos aspectos vantajosos do método numérico apresentado é sua manipulação algébrica simplificada, uma vez que apenas um dos termos discretizados está no tempo avançado, ou seja, $n + 1$. Ao reorganizarmos a Equação 13, isolando o termo C^{n+1} , obtemos a Equação 14.

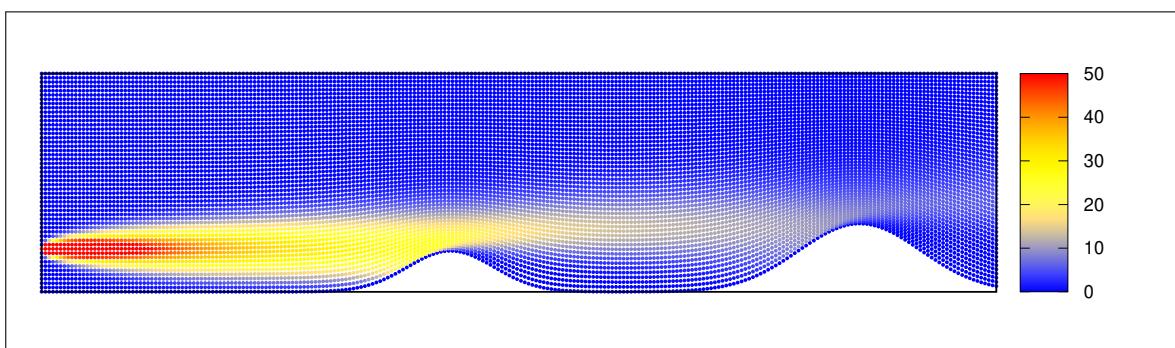
$$\begin{aligned}
 C_{i,k}^{n+1} = & \Delta t \left[D_{i,k}^1 \frac{C_{i+1,k}^n - 2C_{i,k}^n + C_{i-1,k}^n}{\Delta\xi^2} + D_{i,k}^2 \frac{C_{i+1,k+1}^n - C_{i-1,k+1}^n - C_{i+1,k-1}^n + C_{i-1,k-1}^n}{4\Delta\xi\Delta\zeta} \right] \quad (14) \\
 & + \Delta t \left[D_{i,k}^3 \frac{C_{i,k+1}^n - 2C_{i,k}^n + C_{i,k-1}^n}{\Delta\zeta^2} + D_{i,k}^4 \frac{C_{i+1,k}^n - C_{i,k}^n}{\Delta\xi} + D_{i,k}^5 \frac{C_{i,k+1}^n - C_{i,k}^n}{\Delta\zeta} \right] + C_{i,k}^n.
 \end{aligned}$$

3.1 Resultados

A implementação da resolução numérica foi desenvolvida em C++. Os gráficos foram gerados utilizando o programa GNU Octave, versão 6.4.0.

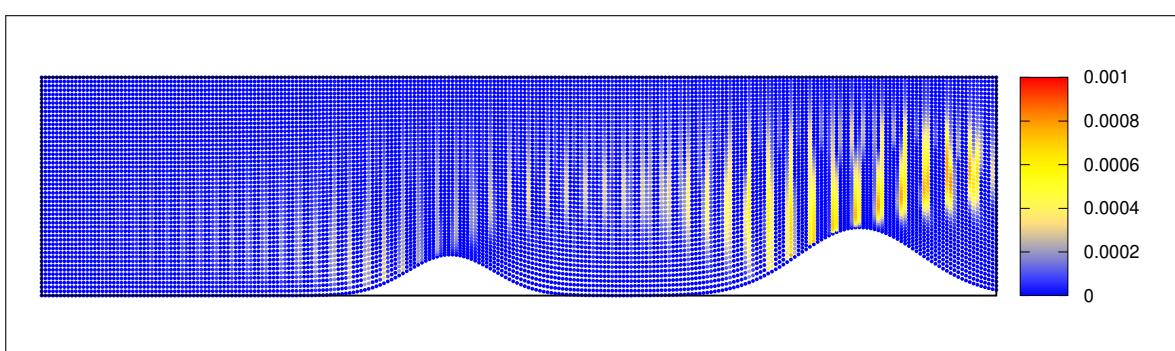
Na Figura 3, os resultados são representados em um gráfico com eixos $x \times z$. Aqui, a inversão já foi realizada, e os resultados estão apresentados em um sistema de coordenadas cartesianas. O eixo x (horizontal) abrange valores de 0 a 3500, enquanto o eixo z varia de $g(x)$ a 800. Essa representação permite visualizar a interação da pluma com as características topográficas da área, proporcionando uma compreensão da dispersão do poluente em terrenos mais complexos. Os resultados obtidos estão de acordo com as expectativas.

Figura 3 – Solução numérica referente à Equação 11



Fonte: autores (2025)

Figura 4 – Solução numérica referente à Equação 15



Fonte: autores (2025)

Para verificar o resultado obtido, implementamos o teste residual. Conforme apresentado na Equação 15, o teste residual é construído a partir da Equação 11. O operador residual é o módulo da diferença entre os termos do lado direito e o termo do lado esquerdo. Para uma solução exata, o resultado deveria ser uma função nula. Para uma solução numérica, que é uma aproximação da solução exata, espera-se encontrar valores muito próximos de zero.

$$R(\xi, \zeta, t) = \left| D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi \partial \zeta} + D_3 \frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2} + D_4 \frac{\partial C}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial C}{\partial \zeta} - \frac{\partial C}{\partial t} \right|. \quad (15)$$

O resultado do teste residual é exibido na Figura 4. Entre todos os nós da malha, o maior valor registrado é $0,00080673[g/m^2]$. Os autores consideram esse resultado excelente.

4 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE CALOR

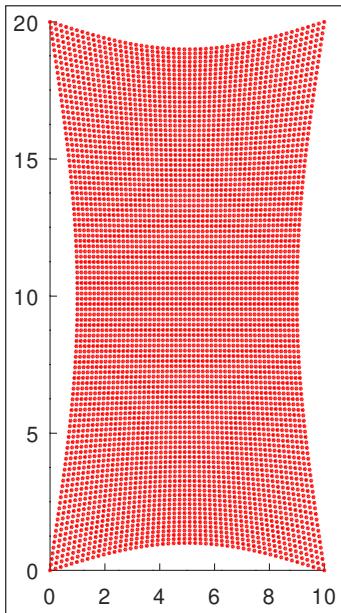
A equação diferencial que modela a difusão de calor bidimensional, considerando um regime transiente e sem termo fonte, é representada na Equação 16.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (16)$$

Nesta equação, α representa a condutividade térmica do material, e foi definida igual a 1. Para a primeira simulação, utilizamos um domínio curvilíneo Ω , apresentado na Figura 5.

Esse domínio é delimitado pelas funções vetoriais:

$$\begin{aligned} g_s(x) &= \left(x, \operatorname{sen} \left(x, \frac{x\pi}{10} \right) \right), \\ g_n(x) &= \left(x, \operatorname{sen} \left(x, 20 - \frac{x\pi}{10} \right) \right), \\ g_o(z) &= \left(\operatorname{sen} \left(z, \frac{z\pi}{20} \right), z \right), \\ g_l(z) &= \left(\operatorname{sen} \left(z, 10 - \frac{z\pi}{20} \right), z \right). \end{aligned}$$

Figura 5 – Domínio curvilíneo Ω 

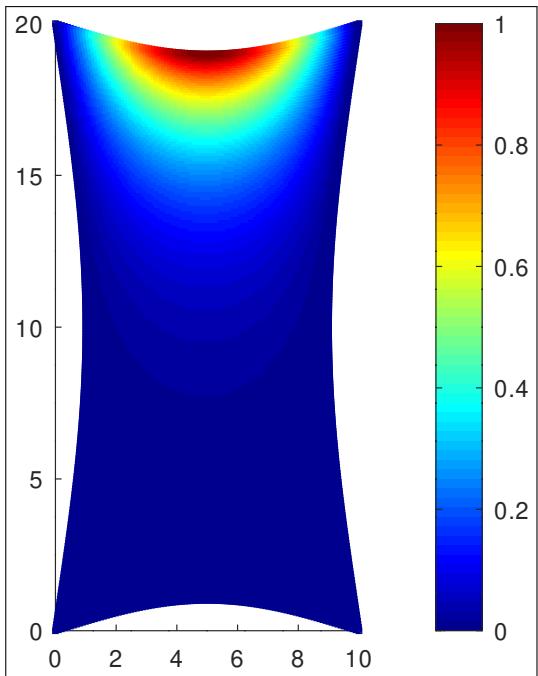
Fonte: autores (2025)

A equação de difusão do calor, Equação 16, é um caso particular da equação de advecção-difusão, Equação 7. Basta substituir C por u e escolher $u = 0$, $w = 0$, $K_x = \alpha$ e $K_z = \alpha$. Então, tanto a transformação quanto a discretização da equação são feitas de maneira similar ao que vimos anteriormente. Além disso, utilizamos as condições de contorno e condição inicial descritas na Equação 17, nos quais $x \in [0,10]$, $z \in [0,20]$ e $t \in [0,\infty)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(g_s(x),t) = 0, \\ u(g_l(z),t) = 0, \\ u(g_n(x),t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right), \\ u(g_o(z),t) = 0, \\ u(x,z,0) = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

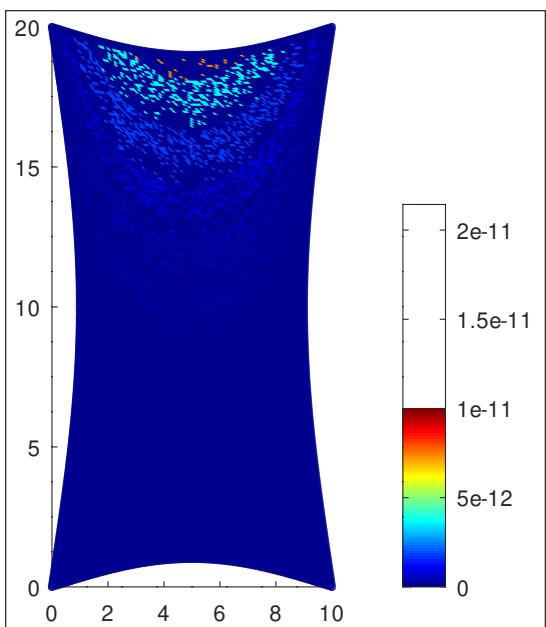
A solução numérica para este problema é apresentada na Figura 6. Na Figura 7 é apresentado o resultado do teste residual aplicado ao problema estudado. Novamente, observamos que o teste residual mostra valores muito próximos a zero em todos os nós. O maior valor encontrado foi de $7,276 \times 10^{-12}$.

Figura 6 – Solução numérica



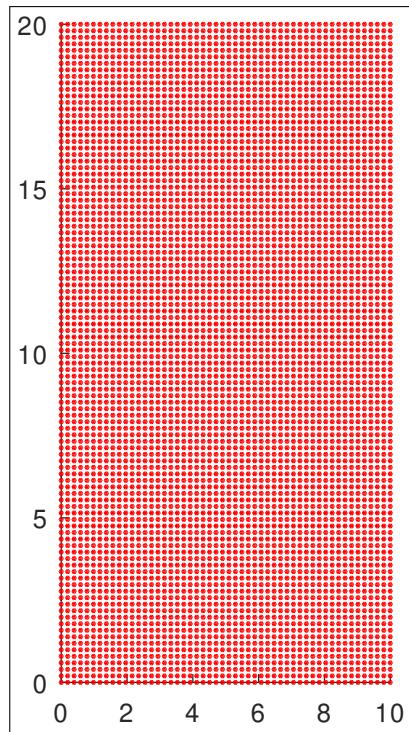
Fonte: autores (2025)

Figura 7 – Solução numérica do teste residual



Fonte: autores (2025)

Agora retornamos à Equação 16 e consideramos domínio retangular Ω' , conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Domínio retangular Ω' .

Fonte: autores (2025)

Esse domínio é delimitado pelas funções vetoriais:

$$g_s(x) = (x, 0),$$

$$g_n(x) = (x, 20),$$

$$g_o(z) = (0, z),$$

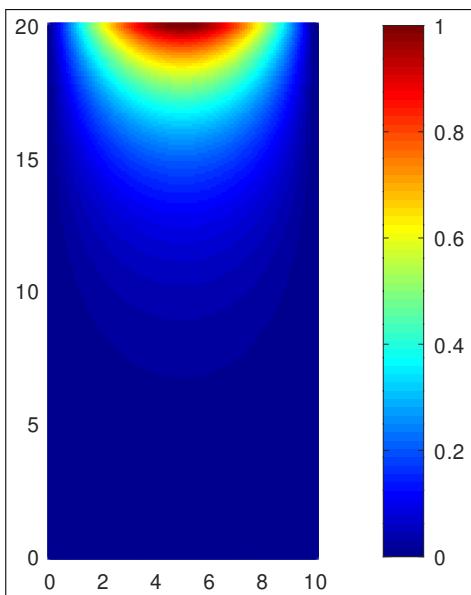
$$g_l(z) = (10, z).$$

Além disso, suponhamos as condições de contorno e condição inicial descritas na Equação 18.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0, t) = 0, \\ u(10, z, t) = 0, \\ u(x, 20, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right), \\ u(0, z, t) = 0, \\ u(x, z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

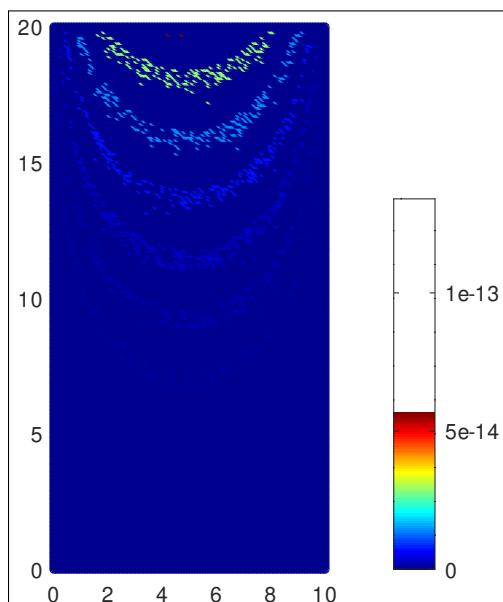
O modelo utilizado para a resolução do problema transiente é o mesmo, sendo alteradas apenas as curvas que definem os contornos. A Figura 9 apresenta a solução numérica, enquanto ao lado, a Figura 10 apresenta os resultados obtidos pelo teste residual. Mais uma vez, constata-se que os resultados do teste residual são muito próximos de zero, com o valor máximo alcançando apenas $7,1054 \times 10^{-15}$.

Figura 9 – Solução numérica, domínio retangular



Fonte: autores (2025)

Figura 10 – Solução numérica do teste residual



Fonte: autores (2025)

A equação de difusão do calor, Equação 16, condicionada às condições de contorno e inicial descritas na Equação 18 é uma equação transiente que se estabiliza com a passagem do tempo. Isso significa que, para t suficientemente grande, o termo $\frac{\partial u}{\partial t}$ passa a ser desprezível. Portanto, para obter a solução no regime permanente, podemos resolver a equação de Laplace 19.

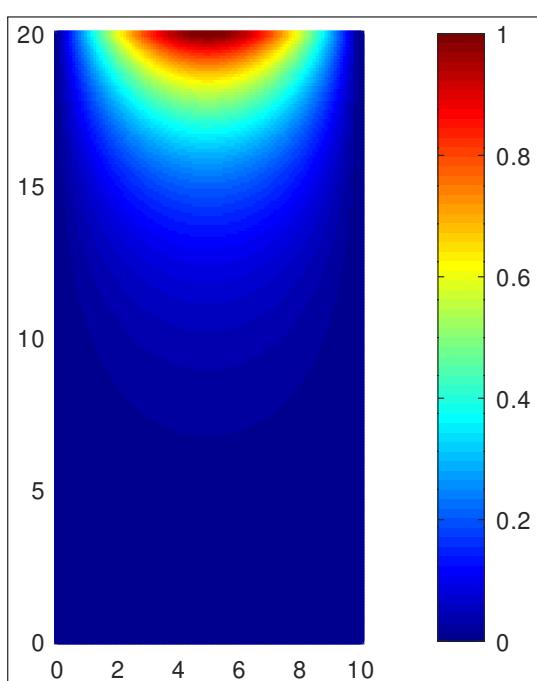
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (19)$$

A Equação 19 possui uma solução analítica conhecida, cujo detalhamento pode ser encontrado em Boyce & DiPrima (2001). A função que descreve essa solução analítica é apresentada na Equação 20.

$$u(x,y) = \frac{1}{\operatorname{senh}(2\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{10}\right) \quad (20)$$

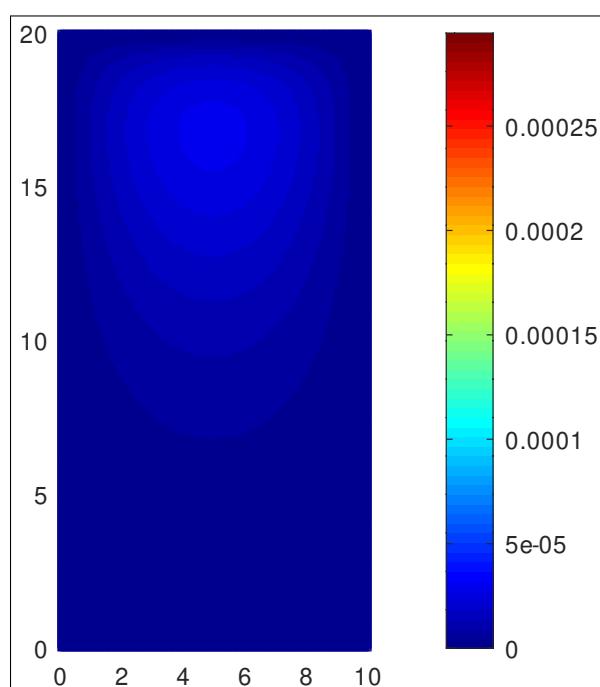
A convergência da solução numérica, definida no regime transitório, é observada quando as variações em relação ao tempo se tornam insignificantes. O modelo transitório tende a estabilizar e a convergir para o mesmo resultado obtido pelo modelo em regime estacionário. Portanto, é possível comparar os resultados obtidos por ambos os modelos, já que devem apresentar aproximadamente a mesma solução. A Figura 19 exibe a solução descrita na Equação 20.

Figura 11 – Equação 20



Fonte: autores (2025)

Figura 12 – Diferença da solução numérica e analítica



Fonte: autores (2025)

Por fim, construímos uma função que representa a diferença entre a solução numérica, apresentada pela Figura 9, e a solução analítica, apresentada na Figura 11. Essa função de diferença pode ser visualizada na Figura 12. Analisando os dados apresentados na Figura 12, podemos observar que o erro associado ao modelo numérico é ínfimo. A discrepância máxima identificada entre os valores numéricos e os valores de referência é de apenas $2,9453 \times 10^{-5}$. Isso sugere que o modelo numérico está em excelente concordância com os resultados esperados, com uma margem de erro extremamente reduzida, o que fortalece a confiança na precisão e na confiabilidade das previsões obtidas através deste método.

5 CONCLUSÕES

Ao longo deste estudo, exploramos a resolução de equações diferenciais parciais em domínios curvilíneos, empregando a transformada difeomorfa para alterar o sistema de coordenadas. Este método se mostrou eficaz para lidar com equações diferenciais em geometrias complexas, permitindo uma abordagem mais direta e simplificada para problemas que envolvem domínios curvilíneos.

As aplicações desse tema são diversas e abrangem áreas como engenharia, física, biologia e geociências. Por exemplo, na engenharia, a resolução de problemas de transferência de calor em dutos curvos pode ser simplificada utilizando a transformada difeomorfa. Da mesma forma, na física, a modelagem de fenômenos de difusão em meios com geometrias irregulares pode se beneficiar dessas técnicas avançadas de resolução de equações diferenciais parciais.

Os testes de validação realizados neste trabalho foram muito bem-sucedidos, confirmando a eficácia do método utilizado. Para trabalhos futuros, planejamos explorar outros métodos numéricos de resolução, incluindo métodos de diferenças finitas implícitos e o método de volumes finitos. Essa diversificação de métodos nos permitirá avaliar diferentes abordagens e suas respectivas vantagens e limitações.

Em resumo, a aplicação da transformada difeomorfa em domínios curvilíneos oferece novas possibilidades para resolver problemas complexos em diversas áreas do conhecimento. Com o sucesso dos testes de validação e a perspectiva de explorar outros métodos numéricos, estamos confiantes de que podemos avançar ainda mais na análise e modelagem de fenômenos físicos e naturais.

REFERÊNCIAS

- Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. (7th ed.). Wiley.
- Grinfeld, P. (2013). *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces*. Springer.
- Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows*. (2nd ed.). Elsevier Science and Technology.

Hoffman, J. D. (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. (2nd ed.). MARCEL DEKKER.

Meneghetti, A. (2018). *Soluções para problemas de dispersão e escoamento com condições de contornos curvilíneos por transformações difeomorfas conformes*. PhD thesis, [Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul]. LUME, Repositório Digital da UFRGS.

Ruggiero, M. A. G. & Rocha Lopes, V. L. (1996). *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. (2nd ed.). Pearson.

Strikwerda, J. (2007). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. (2nd ed.). SIAM.

Stull, R. B. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Ac. Publ.

Contribuições dos autores

1 – Joel Junqueira de Moraes (Corresponding Author)

Graduating in mechanical engineering

<https://orcid.org/0009-0004-5393-0671> • moraesjoel14@gmail.com

Contribuição: Literature Review; Data Analysis; Writing – Original Draft Preparation

2 – André Meneghetti

Mathematician

<https://orcid.org/0000-0002-4682-8263> • andre.imef@gmail.com

Contribuição: Conceptualization, Methodology, Writing – Review & Editing

Como citar este artigo

Moraes, J. J. de, & Meneghetti, A. (2025). Aplicação de transformada difeomorfa para resolução de EDPs com domínios curvilíneos. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 47, esp. 1, e90584. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X90584>.