

IV Jornada de Matematica e Matematica aplicada UFSM

Conjugação entre subshifts de tipo finito nas árvores e subshifts de Markov nas árvores em exemplos

Conjugation between tree-subshifts of finite type and Markov tree-subshifts in examples

Andressa Paola Cordeiro ¹ , Alexandre Tavares Baraviera ¹ 

¹Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

RESUMO

Shifts nas árvores são uma classe de sistemas dinâmicos discretos, sob certo ponto de vista, intermediária entre a dinâmica simbólica unidimensional e a multidimensional. O conceito de conjugação entre subshifts nas árvores tem grande relevância nesse contexto, uma vez que permite relacionar sistemas dinâmicos distintos. É possível, por exemplo, obter várias propriedades de um subshift de tipo finito nas árvores a partir do subshift de Markov nas árvores conjugado a ele, para o qual se encontram vários resultados na literatura. Entretanto, devido à ausência de exemplos que explorem tais propriedades, nesse trabalho nos dedicamos a apresentar dois exemplos de conjugação entre um subshift de tipo finito nas árvores e um subshift de Markov nas árvores dado por matrizes de transição e obter descrições sobre valor da entropia, irreduzibilidade, mixing, densidade de pontos periódicos e caos no sentido de Devaney do primeiro a partir do segundo.

Palavras-chave: Árvores; Shifts nas árvores; Conjugação; Sistemas dinâmicos

ABSTRACT

Tree-shifts are a class of discrete dynamical systems, from a certain point of view, intermediate between one-dimensional and multidimensional symbolic dynamics. The concept of conjugation between tree-subshifts has great relevance in this context, since it allows different dynamical systems to be related. It is possible, for example, to obtain several properties of a tree-subshift of finite type from the Markov tree-subshift conjugated to it, for which several results can be found in the literature. However, due to the lack of examples that explore such properties, in this work we present two examples of conjugation between a tree-subshift of finite type and a Markov tree-subshift given by transition matrices and obtain descriptions about the value of entropy, irreducibility, mixing, density of periodic points and chaos in the sense of Devaney of the first from the second.

Keywords: Trees; Tree-shifts; Conjugation; Dynamical systems

1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos discretos é relevante e encontra aplicações em diversas áreas do conhecimento. Do ponto de vista da matemática pura, busca-se compreender, por exemplo, propriedades topológicas, assintóticas e de (im)previsibilidade.

Mesmo ainda havendo diversas perguntas a serem respondidas, muito já se conhece sobre sistemas dinâmicos discretos no espaço simbólico de dimensão 1 sobre um alfabeto finito. Entretanto, quando se trata do caso em dimensão dois, com grande interesse na física, por exemplo, a situação é bem diferente, uma vez que a generalização de propriedades conhecidas no caso unidimensional não é simples de ser feita para dimensões mais altas. Tal dificuldade não favorece o entendimento completo de muitos exemplos de interesse prático e teórico em dimensão maior que um.

Nesse contexto, justifica-se o estudo de subshifts nas árvores, uma vez que essa classe de sistemas dinâmicos discretos possui propriedades relativas tanto ao caso unidimensional quanto ao multidimensional. Tal tema de pesquisa tem recebido considerável atenção recentemente. Trabalhos de Aubrun & Béal (2012, 2013) têm papel destacado nesse contexto, estabelecendo diversos conceitos e notações, mantidas nesse trabalho. Ban & Chang (2017a,b) estudam, dentre outros tópicos, propriedades topológicas para subshifts nas árvores e definem uma noção de entropia topológica inspirada no caso simbólico unidimensional. Petersen & Salama (2018, 2020), por sua vez, definem uma nova noção de entropia topológica que permite distinguir subshifts na árvore cuja entropia de Ban e Chang é a mesma.

A classe de subshifts de Markov nas árvores recebeu maior atenção na literatura até o momento (especialmente os casos em que os elementos do conjunto podem ser descritos por matrizes de transição), quando comparamos com outras classes de subshifts nas árvores. Entretanto, especialmente no que tange ao cálculo da entropia de um subshift na árvore, apesar da existência de múltiplas direções, maior foco foi dado, pelos autores acima citados, para o caso em que apenas uma matriz de transição determina todas as transições admissíveis em qualquer direção da árvore. Explorando uma situação mais geral, Baraviera et al. (2024) estudam subshifts de Markov nas árvores com múltiplas matrizes de transição, uma para cada direção,

determinando propriedades topológicas e um método para calcular o valor (ou uma aproximação para ele) das duas entropias presentes na literatura, definidas por Ban & Chang (2017b) e Petersen & Salama (2018).

Todo subshift de tipo finito na árvore é conjugado a um subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição (Baraviera et al., 2024; Ban & Chang, 2017a) e algumas informações podem ser obtidas para o primeiro a partir de sua conjugação com o segundo. Tendo em vista a relevância desse resultado e a ausência de exemplos na literatura, esse trabalho tem por objetivo apresentar dois casos concretos de subshifts nas árvores que são de tipo finito mas não de Markov e suas respectivas conjugações com subshifts de Markov nas árvores dados por matrizes de transição. Ainda, utilizamos o método apresentado em Baraviera et al. (2024) para determinar a entropia dos subshifts nas árvores proposta por Petersen & Salama (2018) de ambos os exemplos, e consequências presentes em Ban & Chang (2017a) para obter informações sobre propriedades topológicas para os dois casos apresentados, a saber, irredutibilidade, mixing e caos no sentido de Devaney.

2 PRIMEIRAS DEFINIÇÕES

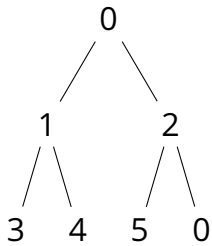
Nos restringiremos, neste trabalho, aos subshifts nas árvores binárias. Os conceitos aqui abordados podem ser encontrados, de maneira mais geral, em Baraviera et al. (2024) e Petersen & Salama (2020).

Denote por Σ^* o monoide livre gerado pelo conjunto $\Sigma = \{a, b\}$ com a operação de concatenação. Seus elementos são as combinações (palavras) finitas de seus geradores e a palavra vazia ϵ , isto é,

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \dots\}.$$

Seja também $\mathcal{A} = \{0, \dots, d-1\}$ um alfabeto finito. Uma *árvore* é uma função $t : \Sigma^* \rightarrow \mathcal{A}$. Cada palavra $x \in \Sigma^*$ é dita *nó* de t , cuja imagem será denotada por t_x , e ϵ é a *raiz* de t . O *comprimento* de um nó é dado pelo número de letras que o compõe, e definimos o comprimento da palavra vazia como $|\epsilon| = 0$. Os nós xa e xb são chamados *filhotes* do nó x . Um *bloco* de tamanho n é a sub-árvore formada pelos nós x de tamanho menor ou igual a n . O bloco abaixo possui tamanho 2 e seus nós são associados a elementos do

alfabeto $\mathcal{A} = \{0, \dots, 5\}$: $t_\epsilon = 0$, $t_a = 1$, $t_b = 2$, $t_{aa} = 3$, $t_{ab} = 4$, $t_{ba} = 5$ e $t_{bb} = 0$.



Definimos por $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as árvores sobre o alfabeto \mathcal{A} . Este é um espaço métrico, com $d(t, t) = 0$ e $d(t, t') = \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $t, t' \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ distintos, onde n é o comprimento da menor palavra $x \in \Sigma^*$ satisfazendo $t_x \neq t'_x$. A topologia induzida por essa métrica coincide com a topologia produto usual, o que torna $(\mathcal{T}(\mathcal{A}), d)$ compacto.

Seja $\sigma_a : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A})$ definido de maneira que $\sigma_a(t)$ é a árvore cuja raiz coincide com t_a , isto é, $\sigma_a(t)_x = t_{ax}$ para todo $x \in \Sigma^*$. De maneira análoga definimos $\sigma_b : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A})$ por $\sigma_b(t)_x = t_{bx}$ para todo $x \in \Sigma^*$. O espaço métrico compacto $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ juntamente com as funções σ_a e σ_b é chamado *shift completo na árvore* sobre o alfabeto \mathcal{A} .

Dado \mathcal{F} um conjunto qualquer de blocos, denotamos por $X_{\mathcal{F}}$ o conjunto de todas as árvores de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ que não contém nenhum bloco de \mathcal{F} em nenhuma parte da árvore. Dizemos que $X_{\mathcal{F}}$, munido das funções σ_a e σ_b (e fechado para as mesmas) é um *subshift na árvore*. Perceba que o shift completo na árvore satisfaz $\mathcal{F} = \emptyset$. Todo bloco que não possui nenhum sub-bloco em \mathcal{F} será dito um *bloco admissível*. Se o conjunto \mathcal{F} possuir finitos elementos, dizemos que $X_{\mathcal{F}}$ é um *subshift de tipo finito na árvore*, e podemos assumir que todos os blocos possuem o mesmo tamanho. Se todos os blocos de \mathcal{F} tiverem tamanho um e puderem ser descritos por duas matrizes de transição (cujas entradas são zero ou um), uma relativa à direção do gerador a do monoide Σ^* e outra na direção de b , chamamos $X_{\mathcal{F}}$ de *subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição*. Dada uma matriz M , denotaremos por $M(i, j)$ a entrada de M na linha i e coluna j .

Suponha, por exemplo, que um subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição esteja definido sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$. Nesse caso, as matrizes A e B , que determinam as transições admissíveis nas direções de a e de b , respectivamente, devem ser matrizes quadradas com três colunas (pois esta é a quantidade de letras do alfabeto \mathcal{A}). Denotaremos $X = (A, B)$ para enfatizar que X é determinado por A e B

como exposto acima. O bloco de tamanho 1



é admissível se $A(2, 3) = 1$ (ou seja, a transição de 1 para 2 é permitida na direção de a) e $B(2, 1) = 1$ (isto é, a transição de 1 para 0 na direção de b é permitida). Tal bloco é proibido se $A(2, 3) = 0$ ou $B(2, 1) = 0$. Assim, sempre que $A(i, j) = 1$, é permitida a transição de $i - 1$ para $j - 1$ na direção de a e, se $A(i, j) = 0$, essa transição não é admissível. Interpretamos a matriz B de maneira análoga.

Denote o conjunto de todos os blocos admissíveis de tamanho n de um subshift na árvore X por $\mathcal{L}_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Se $X = X_{\mathcal{F}}$ é um subshift de tipo finito na árvore e m é o tamanho dos blocos de \mathcal{F} , o conjunto de blocos em $\mathcal{L}_m(X)$ determina totalmente as árvores de X , ou seja, qualquer árvore em X é formada por blocos de $\mathcal{L}_m(x)$ "encaixados" apropriadamente.

Defina então $\phi : \mathcal{L}_m(X) \rightarrow \mathcal{A}'$ bijetora, de maneira que \mathcal{A}' seja um alfabeto de mesma cardinalidade de $\mathcal{L}_m(X)$, e, para cada $t \in X$, seja $b(x) \in \mathcal{L}_m(X)$ o bloco de t de tamanho m com raiz em $x \in \Sigma^*$. Dizemos que $\Phi : X \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ é uma *conjugação* entre X e $Y := \Phi(X)$ se $\Phi(t)_x = \phi(b(x))$ para quaisquer $x \in \Sigma^*$ e $t \in X$. Mais ainda, Y é um subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição. Em cada exemplo construído nesse texto explicitaremos a função ϕ correspondente e como a função Φ age localmente. Considere agora $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $p(n) = \#\mathcal{L}_n(X)$, conhecida como *função de complexidade* de X , isto é, $p(n)$ é o número de blocos admissíveis de tamanho n em X . Petersen & Salama (2018) definem a *entropia* de X por

$$h_{PS}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} \log p(n).$$

Um *conjunto completo de prefixos* P é um subconjunto finito de palavras em Σ^* satisfazendo o seguinte: nenhuma palavra de P é prefixo de outra, isto é, dados $x, y \in P$, não existe $w \in \Sigma^*$ tal que $x = yw$; toda palavra $x \in \Sigma^*$ com comprimento maior do que $|P|$ possui um prefixo em P , onde $|P|$ representa o comprimento da maior palavra do conjunto completo de prefixos P .

Para compreender um conjunto como o acima descrito, imagine que você possa “andar” por uma árvore binária: você começa na raiz, e então escolhe uma direção (a ou b) para seguir adiante; no nó para o qual você andou, você escolhe novamente uma direção (a ou b) para seguir, e você continua dessa maneira infinitamente (uma vez que toda árvore possui infinitos níveis), sem nunca poder voltar para um nó já visitado. O conjunto de nós pelos quais você passa será chamado de *caminho*. A ideia por trás de um conjunto completo de prefixos P é a de que, não importa por qual caminho você escolha “andar” na árvore, sempre existirá um, e apenas um, nó de P nesse caminho, e existe uma “distância” máxima a se percorrer nesse caminho para encontrar tal nó.

Para cada $x = x_1x_2 \cdots x_{k-1}x_k \in \Sigma^*$, denote por σ_x a composição de funções σ_a e σ_b de modo que $\sigma_x = \sigma_{x_k} \circ \sigma_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ \sigma_{x_2} \circ \sigma_{x_1}$. Por exemplo, se $x = aaba$ temos $\sigma_x = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_a$, e, se $x = bba$, então $\sigma_x = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_b$. Uma árvore $t \in X$ é dita *periódica* se existir um conjunto completo de prefixos P de maneira que $\sigma_x(t) = t$ para todo $x \in P$.

Dizemos que um subshift na árvore X é *irredutível* se, para cada par de blocos $u, v \in \mathcal{L}_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$ fixo qualquer, existirem uma árvore $t \in X$ e um conjunto completo de prefixos P , cujas palavras têm comprimento pelo menos n , de modo que u é o bloco de t cuja raiz coincide com a raiz de t e o bloco v aparece a partir de cada nó x , para todo $x \in P$, isto é, o bloco de tamanho n cuja raiz é o nó x é justamente o bloco v .

O subshift na árvore X é *mixing* se existirem P_a e P_b conjuntos completos de prefixos de maneira que, dados u e v blocos admissíveis de qualquer tamanho, $|u| = n > 0$, existir uma árvore $t \in X$ na qual u é o bloco que aparece a partir da raiz de t e v é o bloco cuja raiz coincide com wx , para quaisquer $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^n$ e $x \in P_{w_n}$.

Um último conceito a ser introduzido é o de caos no sentido de Devaney. Dizemos que o subshift na árvore X é *caótico no sentido de Devaney* se três propriedades forem satisfeitas: pontos periódicos de X são densos em X , existe dependência sensível nas condições iniciais e X é topologicamente transitivo. Nesse trabalho, será suficiente provarmos que pontos periódicos são ou não densos em X . Sugerimos ao leitor interessado nas demais propriedades que consulte Ban & Chang (2017a). As definições de conjunto completo de prefixos, irredutibilidade, mixing, árvore periódica e caos no sentido de Devaney para subshifts em árvores, aqui apresentadas, foram retiradas de Ban & Chang (2017a), enquanto que a definição de conjugação foi primeiro introduzida por Aubrun & Béal (2012).

3 ALGUNS RESULTADOS DA LITERATURA

Essa seção é dedicada a apresentar o método de cálculo da entropia de um subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição, e como, a partir disso, obter a entropia de um subshift de tipo finito na árvore conjugado a este. Ainda, expomos resultados relacionados a propriedades topológicas de subshifts nas árvores que serão necessários para a construção dos exemplos apresentados nas seções seguintes.

3.1 Cálculo da entropia de shifts nas árvores

Desejamos expor o método apresentado em Baraviera et al. (2024) para calcular a função de complexidade de um subshift de Markov na árvore determinado por matrizes de transição. Nos restringiremos ao caso da árvore binária, tema de interesse nesse trabalho.

Considere o subshift de Markov na árvore $X = (A, B)$ definido sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, \dots, d-1\}$ (lembre que essa notação significa que as transições admissíveis na direção do gerador a são dadas pela matriz A e as transições admissíveis na direção de b são determinadas pela matriz B , onde A e B são matrizes $d \times d$ cujas entradas são 0 ou 1). Denote por \mathbb{R}_+^d o subconjunto de \mathbb{R}^d dos pontos em que todas as coordenadas são positivas e seja $*$ o produto coordenada a coordenada entre dois pontos de \mathbb{R}_+^d , isto é, $(x_1, \dots, x_d) * (y_1, \dots, y_d) = (x_1y_1, \dots, x_dy_d)$. Defina então a função $f : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ por

$$f(x) = (Ax) * (Bx).$$

Perceba que f é, por si só, um sistema dinâmico.

A imagem de x por f , $f(x) = (f(x)_1, \dots, f(x)_d)$, satisfaz, para cada $1 \leq i \leq d$,

$$f(x)_i = (Ax)_i(Bx)_i = \left(A(i, 1)x_1 + \dots + A(i, d)x_d \right) \left(B(i, 1)x_1 + \dots + B(i, d)x_d \right). \quad (1)$$

A função f é homogênea de grau 2. Logo, se identificarmos dois pontos $x, y \in \mathbb{R}_+^d$ sempre que existir $\lambda > 0$ tal que $x = \lambda y$, é possível provar que f preserva tais classes de equivalência, e podemos observar o comportamento de f no espaço quociente.

Considere então, para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$, a mudança de coordenadas $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{d-1}, \eta_d) = \left(\frac{x_1}{x_d}, \dots, \frac{x_{d-1}}{x_d}, \frac{x_d}{x_d}\right)$ e defina as funções $N : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $F : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ por

$$N(\eta) = (A(d, 1)\eta_1 + A(d, 2)\eta_2 \cdots + A(d, d)\eta_d)(B(d, 1)\eta_1 + B(d, 2)\eta_2 \cdots + B(d, d)\eta_d) \quad (2)$$

e

$$F(\eta)_i = \frac{f(x)_i}{f(x)_d} = \frac{(A(i, 1)\eta_1 + \cdots + A(i, d)\eta_d)(B(i, 1)\eta_1 + \cdots + B(i, d)\eta_d)}{N(\eta)}. \quad (3)$$

Perceba que, por definição, $\eta_d = 1$ e $F(\eta) = (F(\eta)_1, \dots, F(\eta)_{d-1}, 1)$.

Definindo $\mathbb{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^d$, é possível provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(\mathbb{1}) = N(\mathbb{1})^{2^{n-1}} N(F(\mathbb{1}))^{2^{n-2}} N(F^2(\mathbb{1}))^{2^{n-3}} \cdots N(F^{n-1}(\mathbb{1})) F^n(\mathbb{1}). \quad (4)$$

A equação acima é útil para calcular a função de complexidade de X , uma vez que, como é provado em Baraviera et al. (2024), para todo $n \geq 1$,

$$p(n) = \|f^n(\mathbb{1})\| := \sum_{j=1}^d f^n(\mathbb{1})_j. \quad (5)$$

Podemos, portanto, reescrever a definição de entropia definida por Petersen & Salama (2018) como

$$h_{PS}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|f^n(\mathbb{1})\|}{2^{n+1}}. \quad (6)$$

Agora, suponha que um subshift de Markov na árvore dado por matrizes X seja conjugado a um subshift de tipo finito Y cuja função ϕ associa blocos de tamanho m de Y a letras no alfabeto \mathcal{A} no qual X está definido. É possível verificar que, se p_X denota a função de complexidade associada a X e p_Y a função de complexidade associada a Y , vale que

$$p_Y(n + m) = p_X(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, utilizando o método acima descrito para determinar a

entropia de X , podemos obter a entropia de Y a partir da seguinte relação:

$$h_{PS}(X) = 2^m h_{PS}(Y). \quad (7)$$

3.2 Propriedades topológicas de subshifts nas árvores

No que segue, expomos uma seleção de resultados apresentados por Ban & Chang (2017a). O leitor atento pode notar que alguns deles são válidos para casos mais gerais do que aqueles considerados nesse trabalho. O primeiro resultado corresponde à Observação 3.5 do resultado supracitado.

Observação 1. *Se um subshift na árvore é mixing, então este também é irredutível.*

Em seguida, apresentamos uma reescrita para o Teorema 3.8 e o Corolário 3.10 do trabalho de Ban e Chang.

Teorema 1. *Se o subshift na árvore X é mixing, então os pontos periódicos de X são densos em X .*

Corolário 1. *Se o subshift na árvore X é mixing, então X é caótico no sentido de Devaney.*

Suponha agora que as transições admissíveis no subshift na árvore X são determinadas pelas matrizes de transição A e B nas direções dos geradores a e b , respectivamente, isto é, $X = (A, B)$. Para cada $x \in \Sigma^*$ distinto da palavra vazia, denotaremos por M_x o produto das matrizes A e B de acordo com as entradas de x . Por exemplo, se $x = aab$, então $M_x = AAB$, e, se $x = babba$, teremos $M_x = BABBA$. Essa notação é necessária para o último resultado dessa seção, que corresponde a uma adaptação do Teorema 4.3 de Ban & Chang (2017a).

Teorema 2. *Seja X um subshift de Markov na árvore dado por matrizes de transição.*

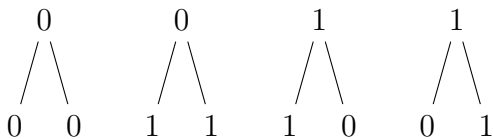
- i. X é irredutível se, e somente se, para cada $i, j \in \mathcal{A}$ existir um conjunto completo de prefixos P de maneira que, para todo $x \in P$, vale $M_x(i, j) > 0$;*
- ii. X é mixing se, e somente se, existir um conjunto completo de prefixos P tal que, para quaisquer $x \in P$ e $i, j \in \mathcal{A}$, vale $M_x(i, j) > 0$.*

Lembremos ainda que, como pontuam Ban e Chang, conjugação preserva irredutibilidade. Ou seja, se X e Y são conjugados e um deles é irredutível, então o

outro também será. Consequentemente, um deles não ser irredutível implica que o outro também não será.

4 EXEMPLO 1: BLOCOS PERMITIDOS DE TAMANHO 1

O primeiro exemplo que trazemos é inspirado no shift na árvore introduzido por Aubrun & Béal (2012), e, em seguida, abordado em Ban & Chang (2017a). Entretanto, o desenvolvimento aqui feito não foi explorado em nenhum desses trabalhos, sendo, portanto, inédito. Considere X o subshift na árvore definido sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ e determinado pelo conjunto de blocos admissíveis de tamanho 1 em que a soma dos elementos do alfabeto que aparecem em seus nós é par:

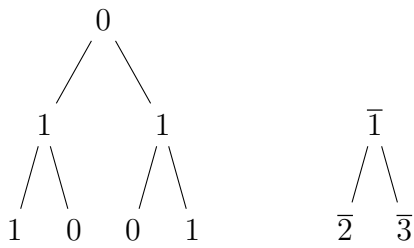


Como nos trabalhos acima citados, para facilitar a notação vamos denotar tais blocos por $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$, respectivamente. Apesar de ser determinado por blocos de tamanho 1, os mesmos não podem ser descritos por duas matrizes de transição. Considere então $\mathcal{A}_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, alfabeto de mesma cardinalidade do número de blocos admissíveis em X , e defina

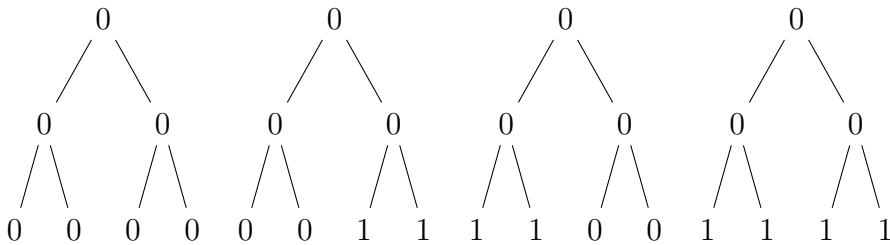
$$\phi((0, 0, 0)) = \bar{0}, \phi((0, 1, 1)) = \bar{1}, \phi((1, 1, 0)) = \bar{2} \text{ e } \phi((1, 0, 1)) = \bar{3}.$$

Assim, $Y = \Phi(X)$ é o subshift de Markov nas árvores sobre o alfabeto \mathcal{A}_1 e conjugado a X pela função Φ , definida a partir de ϕ . Mostraremos que as transições admissíveis em Y são dadas por duas matrizes.

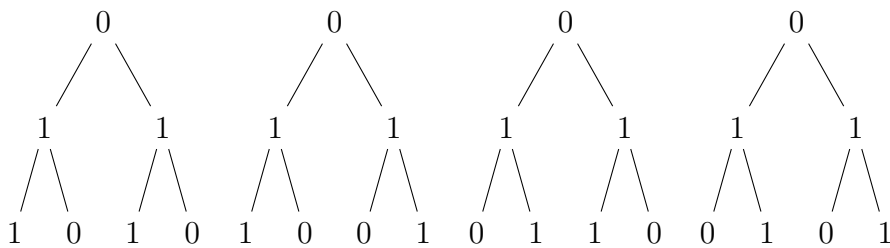
Todo bloco de tamanho n em X é associado a um bloco de tamanho $n - 1$ em Y , $n \in \mathbb{N}$. Abaixo, o bloco à esquerda é admissível em X e, à direita, seu bloco correspondente (via ϕ) em Y . Esse exemplo mostra, para um caso específico, como a função Φ age localmente em uma árvore.



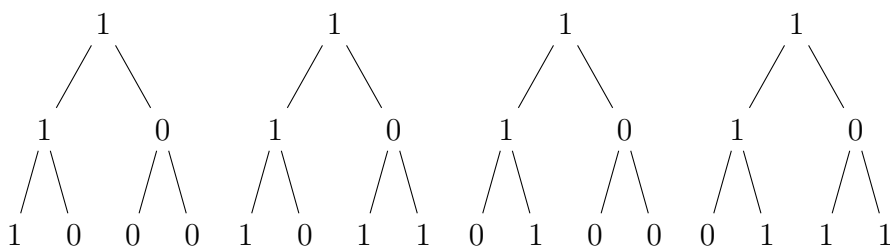
Queremos agora encontrar as matrizes A e B que determinam Y . Perceba, por exemplo, que o bloco $(1, 1, 0)$ não pode ser ligado ao bloco $(0, 0, 0)$ nem na direção de a nem na de b , pois os nós no último nível de $(0, 0, 0)$ são diferentes da raiz do bloco $(1, 1, 0)$. Seguindo esse raciocínio, construímos todos os blocos admissíveis de tamanho 2 em X . Aqueles que começam com o bloco $(0, 0, 0)$ são os seguintes:



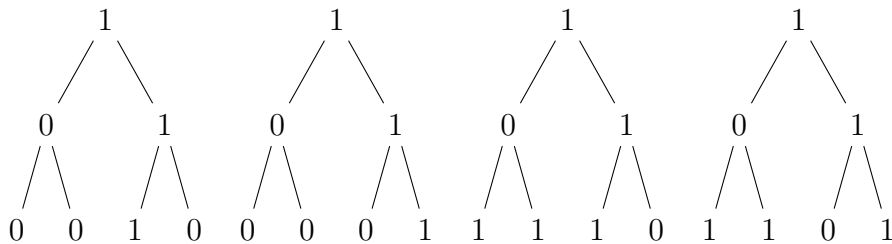
Os que começam com o bloco $(0, 1, 1)$ são



Por fim, os que começam com o bloco $(1, 1, 0)$ são



e os que começam com o bloco (1, 0, 1) são



A partir dos blocos acima, somos capazes de determinar todas as transições entre letras do alfabeto \mathcal{A}_1 admissíveis em Y . Desse modo, as matrizes A e B que determinam Y nas direções dos geradores a e b , respectivamente, são

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Até aqui, explicitamos a função ϕ que associa cada bloco de tamanho 1 admissível em X a uma letra do alfabeto \mathcal{A}_1 (que pode ser vista como um bloco de tamanho zero) e que, portanto, determina uma conjugação entre X e o subshift de Markov Y , e as matrizes de transição A e B de Y . Queremos agora calcular a entropia de X usando o método para shifts de Markov nas árvores determinados por matrizes de transição.

4.1 Entropia do subshift na árvore X

Para $Y = (A, B)$, onde A e B são definidas acima, obtemos, da equação (1),

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left((x_1 + x_2)^2, (x_3 + x_4)^2, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \right).$$

Considerando então $\eta_i = \frac{x_i}{x_4}$ e escrevendo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, 1)$, segue da equação (2) que

$$N(\eta) = (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + 1)$$

e, por meio da equação (3), obtemos

$$F(\eta)_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3 + 1}, \quad F(\eta)_2 = \frac{1}{F(\eta)_1} \text{ e } F(\eta)_3 = F(\eta)_4 = 1.$$

Com todas as informações acima, percebemos que $F^n(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $N(F^n(1)) = 4$. Pela equação (4) e da definição de norma de f posta na equação (5), obtemos, para todo $n \geq 0$,

$$\|f^n(1)\| = 4^{2^{n-1}} 4^{2^{n-2}} 4^{2^{n-3}} \cdots 4(1 + 1 + 1 + 1) = 2^{2^n} 2^{2^{n-1}} 2^{2^{n-2}} \cdots 2^2 4.$$

Assim, calculando a entropia de Y por meio da equação (6), obtemos

$$\begin{aligned} h_{PS}(Y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2^2} \log 2 + \frac{1}{2^3} \log 2 + \cdots + \frac{1}{2^n} \log 2 + \frac{1}{2^{n+1}} \log 4 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log 2 = \log 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Da equação (7) obtemos $h_{PS}(X) = \frac{1}{2} h_{PS}(Y) = \frac{1}{2} \log 2$ (pois, nesse caso, $m = 1$).

4.2 Propriedades topológicas de X

Tendo determinado a entropia de X por meio do subshift de Markov na árvore a ele conjugado, queremos, por fim, usar essa conjugação para determinar propriedades topológicas de X , como irreduzibilidade, mixing, densidade de pontos periódicos e caoticidade no sentido de Devaney.

Primeiro, mostremos que Y é mixing usando o Teorema 2. Com cálculos simples, percebemos que A^2 é a matriz cujas entradas são todas iguais a 1 e, mais ainda, $A^2 = B^2 = AB = BA$. É consequência direta do resultado citado que Y é mixing, ou seja, existem P_a e P_b conjuntos completos de prefixos satisfazendo a definição de mixing. Para esse caso particular, podemos tomar $P = P_a = P_b = \{aa, ab, ba, bb\}$.

Provaremos agora que X é mixing usando a definição dessa propriedade e o fato acima mostrado que Y o é. Em linhas gerais, queremos garantir que, dados u e v blocos admissíveis quaisquer em X , para o conjunto completo de prefixos P apresentado acima, que tomará novamente lugar de P_a e P_b na definição para X , existe uma árvore $t \in X$ na qual u é o bloco inicial de t , isto é, os $|u|$ primeiros níveis de t correspondem exatamente ao bloco u , e a partir de cada nó waa, wab, wba e wbb , com

w nó de comprimento $|u|$, observaremos o bloco v . Para provar isso, usaremos a conjugação entre X e Y a fim de obtermos os blocos \tilde{u} e \tilde{v} associados a u e v por ϕ , e construiremos uma árvore em Y com a propriedade acima descrita, mas considerando os novos blocos \tilde{u} e \tilde{v} . Por fim, retornaremos a X via conjugação para garantirmos a propriedade desejada em X .

Sejam então u e v blocos admissíveis quaisquer em X e \tilde{u} e \tilde{v} os blocos correspondentes em Y por ϕ , isto é, $\phi((u_x, u_{xa}, u_{xb})) = \tilde{u}_x$ para todo $x \in \Sigma^*$ satisfazendo $0 \leq |x| < |u| - 1$ e $\phi((v_y, v_{ya}, v_{yb})) = \tilde{v}_y$ para todo $y \in \Sigma^*$ com $0 \leq |y| < |v| - 1$. Uma vez que Y é mixing, existe $\tilde{t} \in Y$ tal que \tilde{u} é o bloco que aparece nos $|\tilde{u}|$ primeiros níveis de \tilde{t} e \tilde{v} é o bloco que aparece em \tilde{t} a partir de cada nó da forma wz , para todo $w = w_1 \cdots w_{|\tilde{u}|} \in \Sigma^*$ e $z \in P = \{aa, ab, ba, bb\}$.

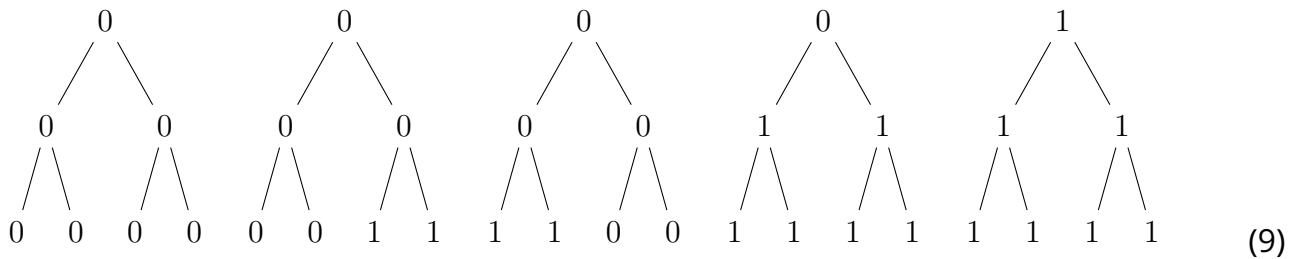
Perceba que $t = \Phi^{-1}(\tilde{t})$ é uma árvore em X de maneira que u é o bloco que aparece em seus $|u|$ primeiros níveis (note que $|u| = |\tilde{u}| + 1$) e que, em cada nó no nível $|u| + 2$, haverá a raiz de v e, abaixo, o próprio bloco v . Como os blocos u e v foram tomados de maneira arbitrária, isso significa que P é um conjunto completo de prefixos que satisfaz a propriedade de mixing para X , com $P_a = P_b = P$ na definição.

Uma vez provado que Y é mixing, podemos usar a Observação 1, o Teorema 1 e o Corolário 1, respectivamente, para garantir que X é irredutível, o conjunto de seus pontos periódicos é denso e, ainda, X é caótico no sentido de Devaney.

5 EXEMPLO 2: BLOCOS PERMITIDOS DE TAMANHO 2

O segundo exemplo tem por objetivo mostrar como todo o processo descrito anteriormente é feito no caso em que os blocos que definem totalmente o subshift na árvore têm tamanho dois. Dessa forma, enfatizamos os pontos principais para a generalização no caso em que um subshift na árvore é totalmente descrito por blocos de tamanho n qualquer. Ainda, diferentemente do caso anterior, nenhuma das propriedades topológicas analisadas será satisfeita nesse exemplo, e o subshift de Markov nas árvores definido por matrizes de transição novamente facilitará nossas conclusões.

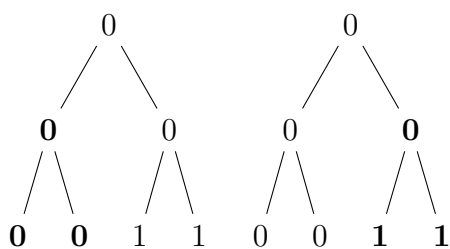
Considere então Z o subshift na árvore sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ totalmente determinado pelos seguintes blocos admissíveis:



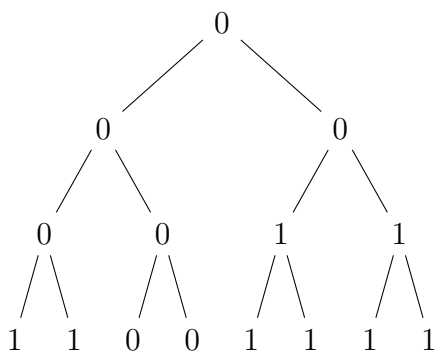
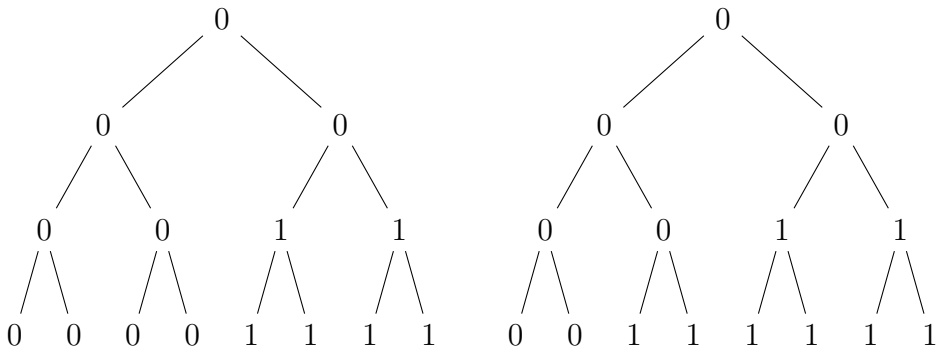
Uma vez que existem cinco blocos admissíveis, precisamos de um alfabeto com cinco elementos para construir a conjugação entre Z e um subshift de Markov nas árvores. Denotaremos $\mathcal{A}_2 = \{\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}\}$ e definiremos a função ϕ que associa o primeiro bloco apresentado acima com a primeira letra de \mathcal{A}_2 , o segundo bloco com a segunda letra do alfabeto, e assim por diante, de maneira análoga ao que foi feito no primeiro exemplo.

Desse modo, por meio de uma conjugação Φ , determinada pela função ϕ , associamos Z a um subshift de Markov na árvore, que denotaremos por W . A construção das transições admissíveis em W é um pouco mais delicada do que no caso de Y no Exemplo 1: naquela situação, bastava que o filhote de um bloco admissível de tamanho 1 em X coincidisse com a raiz de outro bloco admissível para que a transição fosse permitida. Aqui será necessária uma “sobreposição” maior entre os blocos.

Para compreendermos melhor como esse processo é feito, comecemos por analisar os blocos admissíveis em Z que começam com o segundo bloco apresentado (aquele associado a $\boxed{1}$ por ϕ), que denotaremos por C . Um bloco em (9) pode ser “encaixado” em C na direção de a se a raiz e seus filhotes coincidirem com os nós destacados abaixo, no bloco à esquerda. De maneira semelhante, um bloco pode ser “encaixado” em C na direção de b se a raiz e seus filhotes coincidirem com os nós destacados no bloco à direita.



A partir dessa condição de “sobreposição” de blocos, construímos os únicos três blocos de tamanho 3 admissíveis em Z a partir de C :



Via função ϕ , obtemos que são permitidas as transições do bloco $\boxed{1}$ para os blocos $\boxed{0}$, $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ na direção do gerador a , enquanto que, na direção de b , apenas a transição de $\boxed{1}$ para $\boxed{3}$ é possível. Descrevendo os demais blocos admissíveis de tamanho 3 em Z e associando-os a blocos de tamanho 1 em W , obtemos as matrizes A e B que determinam W :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perceba que, de acordo com a construção feita, cada bloco de tamanho n em Z será associado a um bloco de tamanho $n - 2$ em W . Nossos próximos passos, como no Exemplo 1, serão determinar a entropia de Z por meio da entropia de W e algumas de suas propriedades topológicas.

5.1 Entropia do subshift na árvore Z

Vamos determinar a entropia de $W = (A, B)$ para, então, obtermos a entropia de Z . Pela equação (1), a expressão de $f(x)$, para $x \in \mathbb{R}_+^5$, é dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left((x_1 + x_2 + x_3)^2, x_4(x_1 + x_2 + x_3), x_4(x_1 + x_2 + x_3), x_5^2, x_5^2 \right). \quad (10)$$

Fazendo então a mudança de coordenadas $\eta_i = \frac{x_i}{x_5}$ e definindo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, 1)$, obtemos, da equação (2), que $N(\eta) = 1$, isto é, a função N é constante. Isso significa, pela equação (4) e a definição de norma de f apresentada na equação (5), que

$$\|f^n(1)\| = F^n(1)_1 + F^n(1)_2 + F^n(1)_3 + F^n(1)_4 + 1.$$

Além disso, via equação (3) obtemos

$$F(\eta)_1 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2, F(\eta)_2 = F(\eta)_3 = \eta_4(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \text{ e } F(\eta)_4 = F(\eta)_5 = 1. \quad (11)$$

Seria interessante, então, que pudéssemos determinar uma expressão geral para as iteradas da função F no vetor $\mathbb{1} = (1, 1, 1, 1, 1)$ (nem sempre é possível fazê-lo de maneira explícita, entretanto). A estratégia natural é começar calculando esse número para alguns valores de n e tentar reconhecer algum padrão (perceba que é suficiente obtermos a expressão para $F^n(1)_2$, mas, como essa coordenada depende recursivamente das demais, também precisaremos calculá-las). Usando as relações apresentadas em (11), obtemos, para $F(\mathbb{1})$, $F^2(\mathbb{1})$ e $F^3(\mathbb{1})$,

$$F(\mathbb{1}) = (9, 3, 3, 1, 1), \quad F^2(\mathbb{1}) = (225, 15, 15, 1, 1) \text{ e } F^3(\mathbb{1}) = (65025, 255, 255, 1, 1).$$

Perceba que tentar encontrar um padrão entre os valores 3, 15, 255 e $F^4(1)_2 = 65535$ (calculado a partir de $F^3(\mathbb{1})$) em função do valor de n , que corresponde à iterada de F associada a cada um, não é uma tarefa fácil.

Em situações como essa, podemos nos favorecer do uso da Enciclopédia On-line de Sequências de Inteiros (OEIS Foundation Inc, 2024), que armazena informações sobre mais de 317 mil sequências cujos termos são números inteiros. É possível, assim, procurar por uma sequência recursiva a partir de seus primeiros termos, e, se esta estiver em sua base de dados (ou seja, houver literatura acerca da mesma), as informações presentes podem ser úteis para os nossos cálculos. Pesquisando pelos valores 3, 15, 255, 65535 na enciclopédia, obtemos a sequência A051179, que fornece como termo geral a expressão $2^{2^n} - 1$, com $n = 1$ para o termo 3, $n = 2$ para 15, e assim por diante. Assim, teríamos $F^n(1)_2 = F^n(1)_3 = 2^{2^n} - 1$ e $F^n(1)_1 = (2^{2^n} - 1)^2$.

Perceba que é necessário verificar se a expressão fornecida de fato corresponde à sequência com a qual estamos trabalhando (uma vez que sabemos, até o momento, que ambas coincidem apenas nos primeiros termos). Suponha então que, para algum valor de $n \geq 1$ valha $F^n(1) = \left((2^{2^n} - 1)^2, 2^{2^n} - 1, 2^{2^n} - 1, 1, 1 \right)$ (o que é verdadeiro para $n = 1, 2, 3, 4$). Usando as relações em (11) e simplificando expressões, obtemos

$$F^{n+1}(1)_2 = (2^{2^n} - 1)^2 + 2^{2^n} - 1 + 2^{2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1,$$

o que de fato corresponde com o valor que deveríamos obter para $F^{n+1}(1)_2$, garantindo assim que a expressão obtida é útil para descrever $F^n(1)$ para todo $n \geq 1$.

Do desenvolvimento acima e da equação (10) obtemos finalmente que

$$\|f^n(1)\| = (2^{2^n} - 1)^2 + 2^{2^n} - 1 + 2^{2^n} - 1 + 1 + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1,$$

e, conseqüentemente, usando a equação (6), segue que

$$h_{PS}(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} \log(2^{2^{n+1}} + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} \log 2^{2^{n+1}} = \log 2.$$

Como consequência da equação (7), segue que $h_{PS}(Z) = \frac{1}{2^2} \log 2 = \frac{1}{4} \log 2$ (pois, nesse caso, $m = 2$).

5.2 Propriedades topológicas de Z

Novamente, vamos nos aproveitar do fato de Z ser conjugado a um subshift de Markov na árvore definido por matrizes de transição (descrito acima) para descrevermos com mais facilidade algumas de suas propriedades topológicas.

Começemos por verificar que $W = (A, B)$ não é irredutível usando o Teorema 2: basta mostrar que existe uma entrada (i, j) na matriz A de maneira que esta seja igual a zero em toda matriz A^n , $n \geq 1$. Provaremos que $A(5, 1)$ satisfaz essa condição, isto é, $A^n(5, 1) = 0$ para todo $n \geq 1$ (esta não é a única, entretanto).

Para $n = 1$ basta olharmos para a matriz A . Para vermos o que acontece com A^2 , notamos que $A(5, 1) = A(5, 2) = A(5, 3) = A(5, 4) = 0$ e $A^2(5, 1) = \sum_{i=1}^5 A(5, i)A(i, 1)$, logo, temos $A^2(5, 1) = 0$. Mais ainda, essas mesmas igualdades são verdadeiras para A^2 , isto é, $A^2(5, 1) = A^2(5, 2) = A^2(5, 3) = A^2(5, 4) = 0$. Supondo então que tais relações ocorram para A^n , com $n \geq 2$, isto é, que $A^n(5, 1) = A^n(5, 2) = A^n(5, 3) = A^n(5, 4) = 0$, segue que

$$A^{n+1}(5, 1) = \sum_{i=1}^5 A^n(5, i) A(i, 1) = 0.$$

Por indução segue portanto que $A^n(5, 1) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Como já mencionado, conjugação preserva irredutibilidade, isto é, como W não é irredutível e é conjugado a Z , segue que Z não é irredutível. Logo, pela contrapositiva da Observação 1 temos ainda que Z não é mixing. Por fim, quando buscamos entender o conjunto de pontos periódicos de Z , percebemos que existem apenas dois: a árvore t_0 , em que todos os nós são associados a 0, e a árvore t_1 , cujos nós são todos associados a 1. Essas duas árvores não formam um conjunto denso em Z , e, portanto, este não é caótico no sentido de Devaney por definição.

6 CONCLUSÃO

O estudo de subshifts nas árvores é relativamente recente e tem sido bastante explorado nos últimos anos. Nesse trabalho, examinamos exemplos que pudessem evidenciar como subshifts de Markov definidos por matrizes de transição podem ser usados a fim de se obter propriedades topológicas e entropia para subshifts de tipo finito que não são do mesmo tipo. As construções aqui expostas são inéditas e

inspiradas, especialmente, na ausência de exemplos que se percebe na literatura sobre o assunto.

Muitas vezes, saber a definição de um conceito matemático não é suficiente para que se tenha o entendimento do mesmo, independentemente do nível de conhecimento matemático da pessoa que o estuda. Nesse sentido, acreditamos que exemplos são de grande relevância nos processos de pesquisa e de aprendizagem: o pesquisador que constrói exemplos tem a oportunidade de visualizar explicitamente certos comportamentos em casos específicos, o que pode aumentar sua familiaridade com o objeto matemático e sua intuição para conjecturar leis gerais e, então, tentar prová-las; o estudante, por outro lado, ao observar explicitamente propriedades gerais em casos específicos, pode ser capaz de atribuir maior significado do conceito matemático em si e possíveis implicações do mesmo.

REFERÊNCIAS

- Aubrun, N. & Béal, M.-P. (2012). Tree-shifts of finite type. *Theoretical Computer Science, Elsevier*, 459:16–25.
- Aubrun, N. & Béal, M.-P. (2013). Sofic tree-shifts. *Theoretical Computer Science, Elsevier*, 53(4):621–644.
- Ban, J.-C. & Chang, C.-H. (2017a). Tree-shifts: Irreducibility, mixing, and the chaos of tree-shifts. *Transactions of the American Mathematical Society*, 469(12):8389–8407.
- Ban, J.-C. & Chang, C.-H. (2017b). Tree-shifts: the entropy of tree-shifts of finite type. *Nonlinearity*, 30(7):2785–2804.
- Baraviera, A. T., Becker, A. J., & Cordeiro, A. P. (2024). Entropy for k -trees defined by k transition matrices. *Arxiv Preprint arXiv:2307.05850 [math.DS]*.
- OEIS Foundation Inc (2024). The online encyclopedia of integer sequences. Published electronically at <https://oeis.org>.
- Petersen, K. & Salama, I. (2018). Tree shift topological entropy. *Theoretical Computer Science*, 743:64–71.

Petersen, K. & Salama, I. (2020). Entropy on regular trees. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 40(7):4445–4477.

Contribuições dos autores

1 – Andressa Paola Cordeiro (Autor correspondente)

Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<https://orcid.org/0000-0002-5080-845X> • paola.cordeiro@ufrgs.br

Contribuição: Conceituação, Investigação, Escrita - primeira redação e edição

2 – Alexandre Tavares Baraviera

Doutor em Matemática, Professor Adjunto do Instituto de Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<https://orcid.org/0000-0003-0893-6746> • baravi@mat.ufrgs.br

Contribuição: Escrita - revisão

Como citar este artigo

Cordeiro, A. P., & Baraviera, A. T. (2025). Conjugação entre subshifts de tipo finito nas árvores e subshifts de Markov nas árvores em exemplos. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 47, esp. 1, e90142. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X90142>.