

IV Jornada de Matemática e Matemática aplicada UFMSM

Comportamento vibratório de vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica: condições de contorno não-clássicas, ortogonalidade e força externa

Vibratory behavior of Euler-Bernoulli beams on elastic foundation: non-classical boundary conditions, orthogonality and external force

Rubiara Petermann¹ , Rosemaira Dalcin Copetti² 

¹Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil

²Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a teoria de vigas Euler-Bernoulli, também conhecida como teoria clássica, para uma viga sobre fundação elástica e com as condições de contorno não-clássicas. O nosso objetivo é ampliar a classe de problemas que usa a teoria da solução fundamental para obter a equação característica, as frequências naturais, os modos de vibração e a resposta forçada de problemas que envolvem vibrações. Como o problema considerado é não-clássico, devido as condições de contorno consideradas, é necessário obter uma condição de ortogonalidade que envolve a massa anexada no extremo da viga para desacoplar as equações e escrever a resposta forçada.

Palavras-chave: Análise modal; Condições de contorno não-clássicas; Força externa; Fundação elástica; Ortogonalidade; Solução fundamental; Viga Euler-Bernoulli

ABSTRACT

In this work we present the Euler-Bernoulli beam theory, also known as classical theory, for a beam on an elastic foundation and with non-classical boundary conditions. Our objective is to expand the class of problems that use fundamental solution theory to obtain the characteristic equation, natural frequencies, modes of vibration and the forced response of problems involving vibrations. As the problem considered is non-classical, due to the boundary conditions considered, it is necessary to obtain an orthogonality condition that involves the mass attached to the end of the beam to decouple the equations and write the forced response.

Keywords: Modal analysis; Non-classical boundary conditions; External force; Elastic foundation; Orthogonality; Fundamental solution; Euler-Bernoulli beam

1 INTRODUÇÃO

A teoria da viga de Euler-Bernoulli é de fundamental importância em engenharia estrutural e mecânica das estruturas e é amplamente utilizada para analisar o comportamento de vigas submetidas a cargas externas. Neste trabalho, utilizamos esta teoria para estimar o comportamento dinâmico de uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, com condições de contorno não-clássicas e sob o efeito de uma força externa. Esta teoria é aplicável em uma variedade de campos, desde a construção de edifícios, análise de estruturas do solo, como trilhos ferroviários, pavimentos, lajes, até a fabricação de peças mecânicas, (Basu and Rao, 2012). O problema considerado neste trabalho é caracterizado como não-clássico devido as condições de contorno consideradas, que diferem daquelas geralmente utilizadas, como por exemplo apoios fixos, livres ou simplesmente apoiados. Em particular, consideramos uma viga sobre fundação elástica fixa em uma extremidade e na outra extremidade estão anexados um elemento de massa e uma mola na conexão entre a viga e o apoio.

Determinar a resposta forçada é de extrema importância para garantir a estabilidade do sistema. Aqui, ela é escrita em termos da solução fundamental e da força externa. Para obter a solução fundamental de um problema com condições de contorno não-clássicas, escrevemos a solução em termos dos modos de vibração e de uma função que depende do tempo. Os modos de vibração são obtidos através da análise modal, que gera uma equação característica associada ao problema cuja solução são as frequências naturais. Para determinar a função que depende do tempo, é preciso desacoplar as equações. Para isto, precisamos determinar uma relação de ortogonalidade entre os modos de vibração da viga sobre fundação elástica e com condições de contorno não-clássicas. A relação de ortogonalidade obtida envolve a massa anexada em um dos extremos da viga, (Petermann, 2023).

Realizamos simulações para obtermos as frequências naturais, os modos de vibração e a resposta forçada. As frequências naturais e os modos de vibração foram comparados para $K = K_f$, para diversos valores da fundação elástica k_f . Observamos o efeito da força externa aplicada em quatro pontos da viga.

2 VIGA EULER-BERNOULLI SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA

A teoria de Euler-Bernoulli, ou teoria clássica de vigas, descreve o movimento transeversal destas estruturas, negligenciando os efeitos de inércia rotacional e deformação por cisalhamento, por meio de uma equação diferencial parcial de quarta ordem. A equação da viga Euler-Bernoulli uniforme, sobre uma fundação elástica e com força externa é dada por (Rao, 2007)

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(t, x) + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) + k_f w(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

onde E é o Módulo de Elasticidade de Young, I é o momento de inércia, EI é a rigidez de flexão, ρ é a densidade linear de massa, A é a área da seção transversal da viga, ρA é a constante de massa por unidade de comprimento, k_f é o módulo de fundação elástica, $f(t, x)$ é a força externa aplicada à viga, $w(t, x)$ é o deslocamento da viga no instante t e na posição x , t é a unidade temporal, $t > 0$, x é a unidade espacial, $0 < x < L$ e L é o comprimento da viga.

As condições de contorno para uma viga Euler-Bernoulli são determinadas a partir de $w(t, x)$ que indica o deslocamento da viga; $\frac{\partial}{\partial x} w(t, x)$ o giro; $EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x)$ o momento fletor; e $EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, x)$ a força de cisalhamento da viga, (Rao, 2007).

Dizemos que a viga Euler-Bernoulli possui condições de contorno clássicas quando dois dos efeitos de deslocamento, giro, momento fletor ou cisalhamento aplicados em cada uma das extremidades da viga são iguais a zero. Dessa forma, vigas que combinam duas das extremidades livre, fixa, apoiada ou deslizante, podendo ser a mesma em ambas extremidades, possuem condições de contorno clássicas.

Quando uma viga possui, por exemplo, dispositivos de massa M e de mola K anexados em um, ou nos dois de seus extremos dizemos que a viga possui condições de contorno não-clássicas. Ao sofrer um deslocamento transversal e uma inclinação, esses dispositivos exercem uma certa resistência equilibrada pela força de cisalhamento na extremidade. O momento fletor, neste caso, é zero.

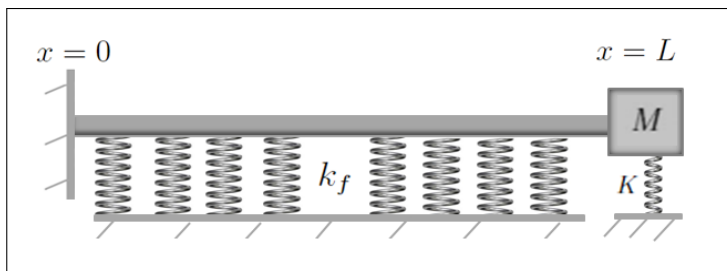
Neste trabalho, consideramos uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, fixa em $x = 0$ e com dispositivos de mola e massa anexados em $x = L$, conforme a Figura 1. Assim as condições de contorno são

$$w(t, 0) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, 0) = 0 \text{ em } x = 0, \quad (2)$$

e

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \text{ e } EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, L) + K w(t, L), \text{ em } x = L. \quad (3)$$

Figura 1 – Viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, fixa em uma extremidade e com dispositivos de massa e mola anexados na outra



Fonte: Autora

3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução para a equação homogênea associada a eq. (1) pode ser encontrada utilizando o método da análise modal. Supondo uma solução da forma

$$w(t, x) = e^{\lambda t} W(x), \quad \lambda = I\omega, \quad (4)$$

onde I é a unidade imaginária e ω a frequência natural. Substituindo a eq. (4) em eq. (1) resulta uma equação diferencial ordinária de quarta ordem, denominada equação modal, dada por

$$EI W^{(iv)}(x) + (\lambda^2 \rho A + k_f) W(x) = 0, \quad (5)$$

onde $W(x)$ são os modos de vibração associados ao sistema.

A solução da eq. (5) pode ser escrita em termos da solução fundamental $h(x)$, (Claeysen J. R. and Jung, 1999), isto é,

$$W(x) = c_1h(x) + c_2h'(x) + c_3h''(x) + c_4h'''(x), \tag{6}$$

onde $\phi = \{h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)\}$ é uma base de soluções para a eq. (5), $c_i, i = 1, \dots, 4$, são constantes determinadas a partir das condições de contorno da viga e $h(x)$ satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} h^{(iv)}(x) - \beta^4h(x) &= 0, \quad \beta^4 = -\frac{\lambda^2\rho A + k_f}{EI}, \\ h(0) = h'(0) = h''(0) &= 0, \quad h'''(0) = 1, \end{aligned} \tag{7}$$

de modo que

$$h(x) = h(x, \lambda) = \frac{\sinh \beta x - \sin \beta x}{2\beta^3}. \tag{8}$$

As condições de contorno para a equação modal, eq. (5), da viga dada na Figura 1 são, em $x = 0$ e em $x = L$, são, respectivamente

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0,$$

$$EIW''(L) = 0 \text{ e } EIW'''(L) = \lambda^2MW(L) + KW(L).$$

Substituindo essas condições de contorno na eq. (6), obtemos a equação característica para o problema considerado, dada por

$$\det \begin{bmatrix} EIh''(L) & EIh'''(L) \\ EIh'''(L) - \lambda^2Mh(L) - Kh(L) & EIh^{(iv)}(L) - \lambda^2Mh'(L) - Kh'(L) \end{bmatrix} = 0. \tag{9}$$

As soluções da eq. (9) geram as frequências naturais $\omega_i, i = 1, 2, 3, \dots$, pois $h(L) = h(\lambda, L)$ e $\lambda = I\omega$.

4 ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAÇÃO E A RESPOSTA FORÇADA

A vibração transversal forçada de vigas, devido a cargas constantes e móveis, é um tópico de pesquisa muito importante em todos os ramos da engenharia. Considerar uma possível força transversal distribuída transmitida à viga é fundamental para garantir a estabilidade da estrutura (Abu-Hilal, 2003).

A resposta forçada de um sistema linear correspondente a uma viga Euler-Bernoulli com condições de contorno clássicas para o qual as frequências naturais, os modos de vibração e uma relação de ortogonalidade entre os modos são conhecidos, pode ser resolvida pela análise modal clássica para uma excitação arbitrária, como é demonstrado por (Bergman and Nicholson, 1985). No entanto, para estruturas mais complexas, como por exemplo, sistemas de vigas duplas com amortecimento, quando o amortecimento não é proporcional, ou condições de contorno não-clássicas onde o teorema dos modos normais não é aplicável, é necessário obtermos uma nova condição de ortogonalidade que permita desacoplar as equações do sistema.

Para isso, consideramos que cada solução $\lambda_i = I\omega_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, da eq. (9) gera um modo de vibração $W_i(x)$.

Sejam dois autovalores λ_i^2 e λ_j^2 , distintos, correspondentes as autofunções $W_i(x)$ e $W_j(x)$, respectivamente, temos da eq. (5)

$$EIW_i^{(iv)}(x) - \beta_i^4 W_i(x) = 0 \text{ e } EIW_j^{(iv)}(x) - \beta_j^4 W_j(x) = 0. \quad (10)$$

Multiplicando a primeira equação em eq. (10) por $W_j(x)$, a segunda por $W_i(x)$, integrando ambas as equações de $x = 0$ até $x = L$ e usando as condições de contorno não-clássicas, obtemos depois de algumas manipulações algébricas

$$(\lambda_j^4 - \lambda_i^4) \left(\int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx + M W_i(L) W_j(L) \right) = 0. \quad (11)$$

Se $i \neq j$, então a expressão dentro dos parênteses deve ser igual a zero. Assim, temos

$$\int_0^L \rho A W_i(x) W_j(x) dx + M W_i(L) W_j(L) = \delta_{ij} \gamma_i, \quad (12)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, e

$$\gamma_i = \int_0^L \rho AW_i^2(x) dx + MW_i^2(L), \quad (13)$$

é a constante de normalização para os modos de vibração.

A eq. (12) é a relação de ortogonalidade da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno não-clássicas, em particular com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$. Observe que a relação de ortogonalidade envolve a condição de contorno não-clássica.

Para condições iniciais nulas, a solução da eq. (1) pode ser escrita em termos da solução fundamental $h(t, x, \xi)$ (Claeysen J. R. and Jung (1999)), como

$$w(t, x) = \int_0^L \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (14)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é a solução fundamental associada ao problema definido pela eq. (1).

Para encontrarmos a solução fundamental $h(t, x, \xi)$, assumimos a solução da eq. (1) como uma combinação dos modos de vibração com uma função que depende de t , ou seja,

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(t). \quad (15)$$

Substituindo a eq. (15) na eq. (1), e usando as condições de contorno, depois de algumas manipulações segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] \rho AW_i(x) = f(t, x) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)] MW_i(L) = 0. \quad (16)$$

Multiplicando a primeira equação em (16) por $W_j(x)$, segunda por $W_j(L)$, integrando ambas de 0 a L , e depois somando as equações resultantes, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t)) \left[\int_0^L \rho AW_i(x) W_j(x) dx + MW_i(L) W_j(L) \right] = \int_0^L f(t, x) W_j(x) dx. \quad (17)$$

Usando a condição de ortogonalidade, eq. (12), e a constante de normalização, γ_i , a eq. (17) pode ser reescrita como

$$\ddot{\eta}_i(t) - \lambda_i^2 \eta_i(t) = Q_i(t), \quad (18)$$

onde

$$Q_i(t) = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^L f(t, x) W_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (19)$$

A solução da eq. (18), para condições iniciais nulas, é dada por

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) Q_i(\tau) d\tau, \quad (20)$$

onde $h_i(t)$ é a solução fundamental temporal dada por $h_i(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i}$.

Portanto,

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^L \frac{\sin \omega_i(t - \tau)}{\omega_i \gamma_i} W_i(x) W_i(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (21)$$

Em termos da solução fundamental, $h(t - \tau, x, \xi)$, sabemos que a resposta forçada é dada pela eq. (14). Assim, comparando as eqs. (21) e (14), segue que

$$h(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_i} h_i(t) W_i(x) W_i(\xi), \quad (22)$$

é a solução fundamental da viga Euler-Bernoulli sobre uma fundação elástica, fixa em $x = 0$ e com massa e mola anexadas em $x = L$ quando consideramos uma força externa atuando sobre a viga.

5 SIMULAÇÕES

Realizamos simulações, utilizando o software Maple 13, com o propósito de estimar o comportamento vibratório de uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa e mola anexados em $x = L$, e sob o efeito de uma força externa. Para as simulações, consideramos os valores apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados nas simulações

Parâmetro	Símbolo	Valor numérico	Unidade
Comprimento da viga	L	18	m
Densidade linear de massa	ρ	7860	kg m^{-3}
Momento de inércia	I	$6,11 \times 10^{-5}$	m^4
Módulo de elasticidade de Young	E	$2,01 \times 10^{11}$	N m^{-2}
Área da seção transversal	A	$1,538 \times 10^{-2}$	m^2

Fonte: (Xu and Wang, 2020)

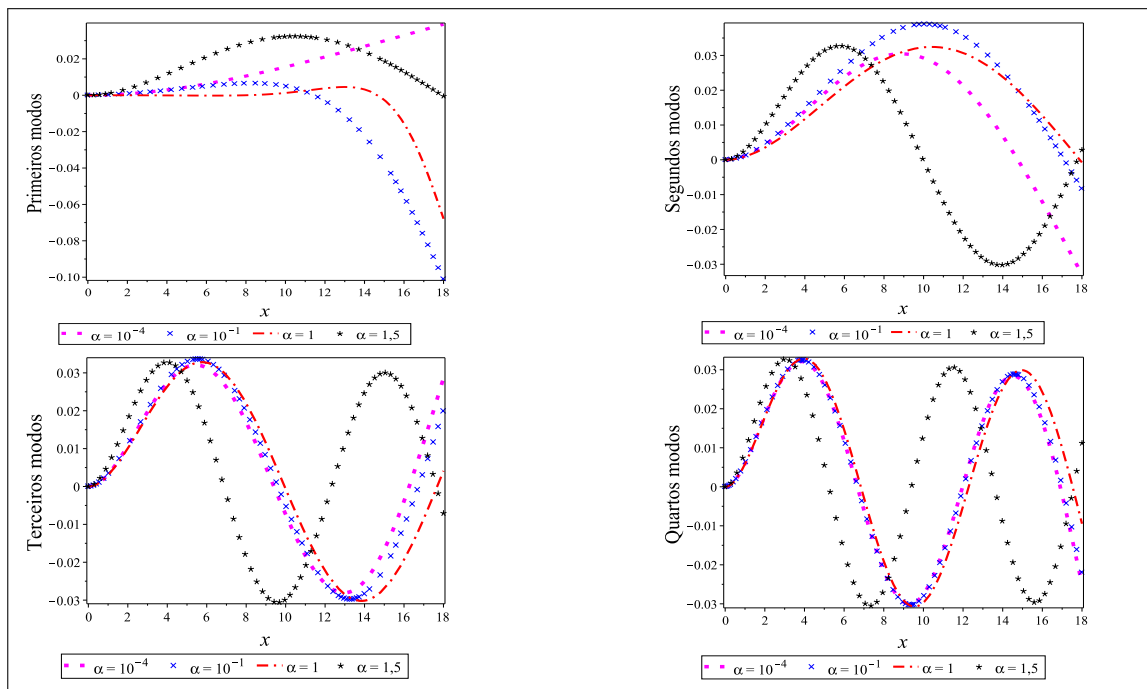
Usando a equação característica, eq. (9), e, para as condições de contorno não-clássicas, fixamos o valor da massa, $M = \rho A$, anexada na extremidade $x = L$ e consideramos o coeficiente da mola igual a constante da fundação elástica, isto é, $K = k_f$, e variamos o valor de k_f , para diversos valores de α , isto é, tomamos $k_f = \alpha \cdot 2,6 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$. O valor da constante da fundação elástica igual a $2,6 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$, foi tomado de (Xu and Wang, 2020). Na Tabela 2, são expressas as oito primeiras frequências naturais da viga, para os valores de α considerados. Quando observamos as frequências correspondentes, isto é, a primeira frequência para todos os casos, a segunda frequência para todos os casos, e assim por diante, podemos observar que as maiores alterações ocorrem nas primeiras frequências.

Tabela 2 – Frequências naturais (rad/s) da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa ($M = \rho A$) e mola ($K = k_f$) anexados em $x = L$, $k_f = \alpha \cdot 2,5 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}$

ω_i	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-1}$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1,2$	$\alpha = 1,5$
ω_1	3,3296	11,3697	26,9959	24,6608	158,2688	176,7843
ω_2	19,9379	23,6168	48,2161	144,61458	165,2622	183,0325
ω_3	56,3426	57,7954	70,4001	152,28229	189,4899	204,992
ω_4	111,3744	112,1536	119,1452	178,46374	239,8156	252,0042
ω_5	185,4218	185,9081	190,3041	231,39638	317,3378	326,5163
ω_6	278,6046	278,9369	281,9497	311,10678	419,6345	426,5868
ω_7	391,0070	391,2484	393,4395	414,95376	544,5938	549,9774
ω_8	522,6838	522,8670	524,5308	540,98363	690,9380	695,2072

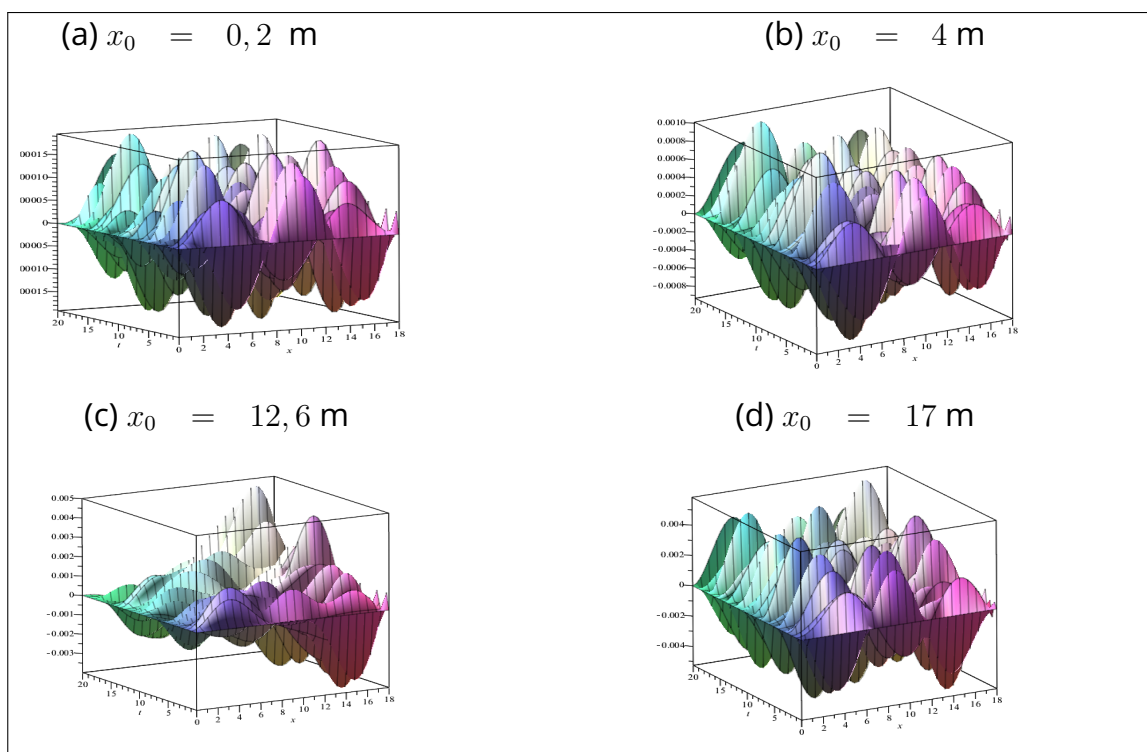
Fonte: Autora

Figura 2 – Primeiros quatro modos de vibração da viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa ($M = \rho A$) e mola ($K = k_f$) anexados em $x = L$.
 $k_f = \alpha \cdot 2,5 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$



Fonte: Autora

Figura 3 – Resposta forçada da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica fixa em $x = 0$ e com dispositivos de massa M e mola K anexados na outra extremidade com $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$



Fonte: Autora

Na Figura 2, apresentamos os quatro primeiros modos de vibração para $\alpha = 10^{-4}, 10^{-1}, 1$ e $\alpha = 1,5$. Podemos observar, nas simulações apresentadas, que para $\alpha = 10^{-4}$, pequeno, o primeiro modo de vibração representa, conforme esperado, o comportamento do primeiro modo de uma viga fixa $x = 0$ e com massa $M = \rho A$, anexada em $x = L$. Para os segundos e terceiros modos de vibração o comportamento deles se assemelha, para todos os valores de α apresentados. Já para $\alpha = 1,5$, os modos se aproximam aos de uma viga fixa-fixa ou fixa apoiada.

Na Figura 3, apresentamos a resposta forçada para uma força externa do tipo $f(t, x) = x^2 \sin \omega_0 t \delta(x - x_0)$, onde a frequência de entrada é $\omega_0 = 200$ rad/s, $M = \rho A$, $K = k_f = 3,0 \times 10^6$ Nm⁻² e aplicamos a força externa em quatro pontos ao longo do comprimento da viga, $x_0 = 0,2$ m, $x_0 = 4$ m, $x_0 = 12,6$ m e $x_0 = 17$ m. Podemos observar na Figura 3 c) a mudança de comportamento da resposta forçada quando a força externa é aplicada em $x_0 = 12,6$ m. Em $x_0 = 17$ m, os dispositivos de massa e mola anexados em $x_0 = 18$ m, atenuam o efeito da força externa aplicada, assim como em $x_0 = 0,2$ m e $x_0 = 4$ m, pontos próximos da condição de contorno em que a viga é fixa. Todas as simulações para a resposta forçada foram realizadas no intervalo de tempo $0 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estendemos o uso da solução fundamental a um problema dado por uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno não-clássicas. A solução da equação modal e a equação característica foram escritas em termos da solução fundamental. Para obtenção da resposta forçada, devido as condições de contorno não-clássicas, obtivemos uma condição de ortogonalidade entre os modos de vibração cuja constante de normalização é escrita em termos da massa anexada na extremidade da viga. Nas simulações apresentadas, observamos o efeito da constante da fundação elástica e do dispositivo de mola anexado no extremo da viga sobre as frequências naturais e os modos de vibração.

REFERENCES

- Abu-Hilal, M. (2003). Forced Vibration of Euler-Bernoulli Beams by Means of Dynamic Green Functions. *Journal of Sound and Vibration*, 267:191–207.
- Basu, D. & Rao, N. S. V. K. (2012). Analytical Solutions for Euler-Bernoulli Beam on Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Load. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(8):945–960.
- Bergman, L. A. & Nicholson, J. W. (1985). Forced Vibration of a Damped Combined Linear System. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107(275):1–7.
- Claeysen J. R., Canahualpa, G. & Jung, C. (1999). A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30:65–78.
- Petermann, R. (2023). A solução fundamental no cálculo da resposta forçada de uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica e com condições de contorno não-clássicas. (Dissertação de Mestrado) Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.
- Rao, S. S. (2007). *Vibration of Continuous Systems*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Xu, Y. & Wang, N. (2020). Transverse Free Vibration of Euler-Bernoulli Beam with Preaxial Pressure Resting on a Variable Pasternak Elastic Foundation Under Arbitrary Boundary Conditions. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 17(7):1–17.

Contribuições dos autores

1 – Rubiara Petermann

Aluna do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada em nível de doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Trabalho realizado enquanto aluna do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFSM

<https://orcid.org/0009-0003-7891-673X> • rubiara.petermann@ufrgs.br

Contribuição: Revisão de Literatura, Análise de Dados, Redação – Elaboração de Rascunho Original

2 – Rosemaira Dalcin Copetti

Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria

<https://orcid.org/0000-0002-1893-6136> • rosemaira.copetti@ufsm.br

Contribuição: Orientação; Metodologia; Redação – Revisão e Edição

Como citar este artigo

Petermann, R., & Copetti, R. D. (2025). Comportamento vibratório de vigas Euler-Bernoulli sobre fundação elástica: condições de contorno não-clássicas, ortogonalidade e força externa. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.47, esp. 1, e89806. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X89806>.