UFSM

CIÊNCIAeNATURA

ISSN 2179-460X
OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 46, e88519, 2024 • https://doi.org/10.5902/2179460X88519
Submitted: 07/08/2023 • Approved: 26/11/2024 • Published: 19/12/2024

Ensino

Engenharia Didática no estudo do Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias

Didactic Engineering in the study of the Theorem of Existence and Uniqueness of Ordinary Differential Equations

Ana Carla Pimentel Paiva[I], **Francisco Régis Vieira Alves**[I], **Helena Campos**[I], **Diego Silva**[I]

[I] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
[II] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Auto Douro, Portugal
[III] Universidade Estadual do Ceará, Iguatu, CE, Brasil

RESUMO

O Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) pode ser considerado um dos pilares fundamentais da teoria das equações diferenciais, pois estabelece condições sob as quais uma EDO possui uma solução única e determinada em um intervalo específico. A importância desse teorema em diversos campos da matemática e das ciências aplicadas decorre do fato de que ele assegura que as soluções de certas equações diferenciais sejam bem definidas e únicas. Esse teorema é essencial para garantir a consistência e aconfiabilidade dos modelos matemáticos utilizados para entender e prever o comportamento desistemas complexos. Este artigo descreve, duas etapas de investigação desse teorema previstas pela Engenharia Didática (ED): as fases de análise prévia e análise a priori. A fim de desenvolver atividades estruturadas com apoio da tecnologia, com o intuito de evitar determinados elementos que atuam como entraves a um entendimento amplo do teorema.

Palavras-chave: Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias; Engenharia Didática; Análises prévias; Análises a priori

ABSTRACT

The Theorem of Existence and Uniqueness of Ordinary Differential Equations (ODEs) can be considered one of the fundamental pillars of the theory of differential equations, as it establishes conditions under which an ODE has a unique and determined solution in a specific interval. The importance of this theorem in various fields of mathematics and applied sciences arises from the fact that it ensures that the solutions of certain differential equations are well-defined and unique. This theorem is essential to guarantee the consistency and reliability of the mathematical models used to understand and predict the behavior of these complex systems. This article describes two stages of investigation of this theorem foreseen by Didactic Engineering (DE): the phases of prior analysis and a priori analysis. In order to develop structured activities with the support of technology, with the aim of avoiding certain elements that act as obstacles to a broad understanding of the theorem.

Keywords: Theorem of Ordinary Differential Equations; Didactic Engineering; Prior analysis; A priori analysis

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho foi elaborado no âmbito de uma pesquisa preliminar em andamento para o Doutorado Acadêmico em Ensino de Matemática e consiste, de forma mais sucinta, em uma análise acerca do ensino de Equações Diferenciais Ordinárias. Neste artigo, apresenta-se uma investigação sobre um dos teoremas mais importantes desse campo matemático: o Teorema de Existência e Unicidade de Picard-Lindelöf.

Este teorema pode ser considerado essencial para garantir a solução única de certos tipos de equações diferenciais, tornando-se um pilar fundamental na teoria matemática que sustenta diversas aplicações práticas em ciência e engenharia.

Segundo Nagle (2012, p.15) "[...] na engenharia, modelos matemáticos são desenvolvidos para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos. Estes modelos frequentemente geram uma equação que contém algumas derivadas de uma função desconhecida"

Desse modo, garantir a existência de uma solução para essas equações assegura que o modelo desenvolvido é consistente e pode representar adequadamente o fenômeno estudado, além de permitir a previsibilidade dos resultados e controle da solução da equação para ajustar variáveis e obter o desempenho desejado.

No entanto, apesar de sua importância e aplicabilidade, o Teorema de Existência e Unicidade pode ser desafiador para os estudantes de matemática devido à sua natureza abstrata e às condições técnicas exigidas. Portanto, buscou-se realizar uma investigação sobre o ensino desse teorema com o intuito de elucidar os seus conceitos teóricos e torná-los mais acessíveis para os alunos.

Neste contexto, a investigação do Teorema da Existência e Unicidade de EDO's empregou uma metodologia denominada Engenharia Didática - ED. A Engenharia Didática, como metodologia, associa a teoria educacional e a prática pedagógica, oferecendo uma estrutura metodológica para investigar, desenvolver e implementar intervenções educacionais eficazes.

Desse modo, utilizando a abordagem proposta pela ED, buscou-se identificar as dificuldades específicas dos estudantes na compreensão do teorema, desenvolver materiais didáticos adequados às suas necessidades e aplicar estratégias de ensino que promovam uma assimilação dos conceitos matemáticos de forma mais significativa e duradoura.

Portanto, o intuito da aplicação da Engenharia Didática neste artigo, na investigação do Teorema de Existência e Unicidade, envolve a análise do conteúdo e o planejamento estratégico das atividades de ensino, com o objetivo de aprimorar continuamente a prática educativa.

2 INVESTIGANDO O TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS (EDO'S) COM A UTILIZAÇÃO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Inicialmente proposta por Yves Chevallard e Guy Brousseau em 1982 e posteriormente desenvolvida por Michèle Artigue em 1989, a Engenharia Didática foi apresentada como uma metodologia de pesquisa destinada a revelar fenômenos didáticos em condições que reproduzem de maneira fiel o funcionamento de uma sala de aula tradicional (Almouloud; da Silva, 2012).

Conforme Douady (1995), a ED é definida como um conjunto de sequências de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente, por um professor-engenheiro, com o objetivo de melhorar o entendimento de um assunto para uma população específica de alunos.

Em consonância, Almouloude Coutinho (2008, p.66) definem a ED como "um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino".

Ainda segundo os autores, a metodologia caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisa, denominadas análises a priori e análises a posteriori.

Este tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, que pode ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (Alves, 2018).

Em relação à sistematização prevista pela ED, se estabelece que a sua composição em quatro fases: análises prévias, análises a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

Na fase dialética das análises prévias, ocorre a identificação do problema didático, determinando qual seria o problema específico de ensino ou aprendizagem que será abordado. Portanto, essa fase pode incluir dificuldades comuns encontradas pelos alunos ao aprender um determinado conceito ou processo, além da definição de objetivos que se espera alcançar com o experimento didático (Almouloud, 2007).

Nessa etapa, o pesquisador pode realizar uma revisão da literatura e na definição do problema, formular hipóteses específicas sobre como diferentes abordagens didáticas podem afetar o aprendizado dos alunos (Almouloud, 2007).

Na segunda fase daED, denominada análise a priori, o pesquisador é incumbido de desenvolver e examinar uma série de situações didáticas. O objetivo é facilitar a superação dos obstáculos epistemológicos que os alunos possam enfrentar em relação ao assunto estudado. Essa abordagem visa não apenas aprimorar o entendimento dos alunos, mas também validar as hipóteses de pesquisa elaboradas na fase anterior (Almouloud, 2007).

A terceira fase dialética, a experimentação, consiste na implementação prática das situações didáticas planejadas durante a análise a priori. É o momento em que os resultados teóricos são colocados em prática, permitindo a obtenção de resultados empíricos que complementam a análise teórica (Almouloud, 2007). Durante essa fase, todo o dispositivo planejado é aplicado na sala de aula, proporcionando uma oportunidade para verificar a eficácia das estratégias pedagógicas propostas.

Na última etapa, a análise a posteriori e validação, ocorre uma investigação detalhada sobre a produção dos alunos, observando seu comportamento durante o desenvolvimento da sequência didática e utilizando os dados coletados ao longo da experimentação (Artigue,1996).

No contexto da Engenharia Didática (ED), a investigação sobre o Teorema da Existência e Unicidade envolveu apenas algumas etapas das análises prévias e a priori.

1. Análise prévia: nesta fase, realizou-se um estudo do conteúdo teórico e identificação dos principais conceitos, dificuldades e obstáculos que os alunos podem encontrar ao estudar o Teorema de Existência e Unicidade.

2. Análise a priori: nesta etapa, desenvolveu-se as atividades a fim de ajustar a abordagem didática de acordo com as possíveis dificuldades identificadas. O objetivo é a antecipação dos problemas de compreensão e um ajuste na metodologia de ensino para torná-la mais eficaz.

3 ANÁLISES PRÉVIAS ACERCA DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE EDO’S: HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DO TEOREMA

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento da primeira fase da Engenharia Didática, onde se examina a gênese desse campo matemático e os conhecimentos que fundamentam o Teorema de Existência e Unicidade, com o intuito de compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudá-lo.

3.1 O desenvolvimento do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais

A França foi um dos berços da revolução científica europeia, destacando-se no desenvolvimento de várias áreas da matemática. Entre suas contribuições, estão a geometria analítica com René Descartes (1596 - 1650) e o cálculo diferencial e integral com Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (Do Nascimento; Mendes, 2023).

Assim a gênese das equações diferenciais ocorreu com o estudo do cálculo por Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quando esses matemáticos alcançaram um entendimento suficiente e desenvolveram a notação para a derivada (Eves, 2004).

No entanto, conforme Eves (2004) encontrar soluções para essas equações não se tratava de uma tarefa acessível, dado que as manipulações simbólicas e as simplificações algébricas proporcionavam apenas um auxílio limitado. A integração e o Teorema Fundamental do Cálculo ofereciam assistência direta para casos específicos, em que as variáveis podiam ser separadas, sob circunstâncias bastante específicas. O método de separação de variáveis foi desenvolvido por Jakob Bernoulli (1654-1705) e generalizado por Leibniz.

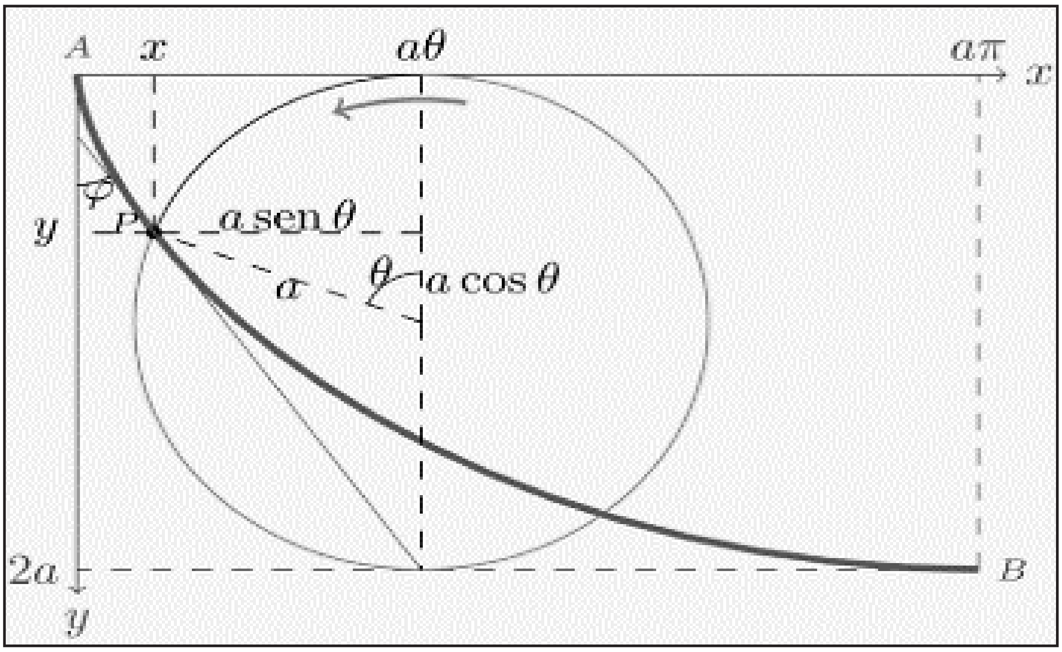
Conforme Eves (2004), apenas no final do século XVII e início do XVIII, com a aplicação de equações diferenciais a problemas de astronomia e ciências físicas que ocorreu o desenvolvimento mais amplo das teorias e técnicas de EDO.

Nesse período, o matemático Jakob Bernoulli estudou detalhadamente e formulou equações diferenciais para o movimento planetário, utilizando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. Enquanto Johann Bernoulli (1667-1748), desenvolveu estudos relativos ao cálculo de Leibniz e os princípios da mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos utilizando equações diferenciais e encontrar suas soluções (Eves, 2004).

> os problemas que vieram posteriormente a definição de equação diferencial, Johan Bernoulli, que tinha o viés epistemológico de Leibniz, resolveu o problema da braquistócrona, em 1696, uma cicloide invertida que verifica o caminho percorrido por uma curva em menos tempo, dados dois pontos cuja equação é dada por $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a-y}{y}$ (Do Nascimento; Mendes, 2023, p.7).

O problema da braquistócrona, perguntava qual seria a curva de descida mais rápida para um objeto sob a influência da gravidade, movendo-se de um ponto inicial a um ponto final em alturas diferentes, na Figura 1é apresentada a curva que resolve o problema.

Figura 1 – A braquistócrona trata-se da curva cicloide



Fonte: De Andrade e Ferreira Filho (p. 2309-2, 2015)

Portanto, pode-se verificar por meio do problema da braquistócrona que o desenvolvimento desse campo epistêmico continuava baseado nos pressupostos do cálculo infinitesimal, mesmo que aplicado a outros campos das ciências.

Apenas quando o matemático Brook Taylor (1685-1731) adotou uma abordagem diferente, utilizando séries para resolver equações diferenciais, é que outros matemáticos expandiram e aplicaram essas séries para diversos fins. O desenvolvimento das diferenças finitas por Taylor deu início a um novo ramo da matemática, estreitamente ligado ao progresso das equações diferenciais (Eves, 2004).

Conforme De Nascimento e Mendes (2023), no início do século XVIII, Taylor e muitos outros matemáticos acumularam uma variedade crescente de técnicas para analisar e resolver diferentes tipos de equações diferenciais. Contudo, muitas dessas equações ainda eram pouco conhecidas em termos de suas propriedades e métodos de solução.

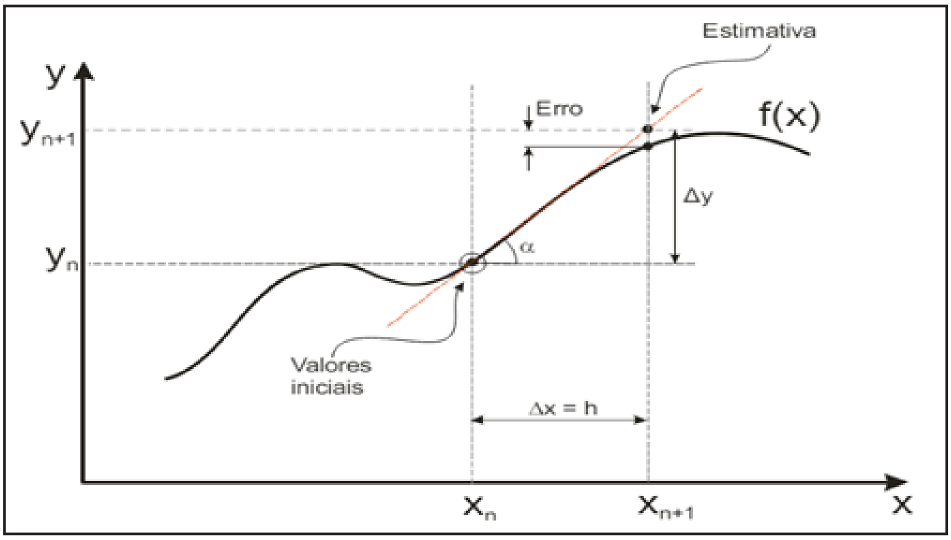
A consolidação geral da teoria que abrange esse campo epistêmico ocorreu quando Leonhard Euler (1707-1783) associou o entendimento de equações diferenciais à teoria das funções. Desse modo, Euler foi o responsável por desenvolver o Método da Variação de Parâmetros, após o estabelecimento das propriedades das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares (Eves,2004).

Um dos primeiros métodos apresentados para a resolução numérica de problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias foi proposto por Eulere sugeria uma forma de obter uma sucessão de aproximações para uma possível solução local do problema de valor inicial, definida em um intervalo fechado (Eves,2004).

Isto é, para provar a existência de uma solução sem determiná-la explicitamente, realizava-se o seguinte esquema geral: a obtenção de uma sucessão de aproximações para a possível solução, a demonstração de um limite para a sucessão e, por fim, a prova que o limite era solução da EDO. A Figura 2 ilustra o método proposto por Euler (Baratto,2007).

Ou seja, Euler utilizava a função ${dy}/_{dx} = f(x, y)$ com $y = y_n$ quando $x = x_n$, conforme Figura 2, e observava que o valor de y_{n+1}, em x_{n+1}, poderia ser dado por: $y_{n+1} = y_n + \Delta y$ ou $y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n).f(x_n, y_n)$. Assim, concluiu que, quanto menor o valor da diferença entre x_{n+1} e x_n (desprezando os erros causados pela representação finita dos números pelos computadores), menor seria o erro da estimativa para y_{n+1} (Barato, 2007).

Figura 2 – Ilustração do método de Euler



Fonte: Barato (2007, p.4)

Desse modo, infere-se que o método de Euler para provar a existência de uma solução para determinada equação diferencial era um trabalho árduo; ainda existia, portanto, a necessidade de um estudo qualitativo sobre as condições necessárias e suficientes para que as equações diferenciais apresentassem soluções.

No âmbito do estudo qualitativo das equações diferenciais, o matemático Cauchy, em 1842, provou a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais definidas por funções analíticas[1] (Eves,2004).

Outra importante descoberta nesse âmbito é a prova de existência de soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem[2] quando a função que a define a equação é contínua.

De acordo com Eves (2004), o matemático Peano demostrou inicialmente a prova da existência dessas soluções, para equações escalares em 1886 e para equações vetoriais[3]

[1] Uma função analítica trata-se de uma função que pode ser localmente expandida em séries de Taylor como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, sendo $a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ (Lima, 2004).

[2] Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita da seguinte forma: ${}^{dy}/_{dt} = f(t,y)$ (Boyce e Diprima, 2010).

[3] Um sistema de equações diferenciais com valor inicial $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) = y_{1,0}, \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) = y_{2,0}, \\ \dots & \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) = y_{n,0}, \end{cases}$ pode ser escrito de forma mais compacta como $Y' = F(x, Y)$, $Y(x_0) = Y_0$ em que $x \in \mathbb{R}$ e $Y(x,)$, $F(x,Y)$ e Y_0 são vetores de $\mathbb{R}^n$ escritos $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix}$, $Y' = F(x,Y) = \begin{bmatrix} f_1(x,Y) \\ f_2(x,Y) \\ \dots \\ f_n(x,Y) \end{bmatrix}$ e $Y_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \dots \\ y_{n,0} \end{bmatrix}$ (Boyce e Diprima, 2010).

em 1890, sempre empregando concepções e métodos fundamentados nos estudos de Cauchy em 1820 e de Lipschitz em 1876.

Assim, destaca-se que o desenvolvimento do Teorema de Existência e Unicidadede Picard-Lindelöf não ocorreu de maneira linear, refletindo a complexidade da formulação e da prova desse teorema. Na demonstração, foi utilizado o método de aproximações sucessivas, com às contribuições de Picard em 1890 e Lindelöf em 1894.

3.2 Estrutura do Teorema: Condições e Hipóteses do Teorema

Infere-se que o método de Euler para provar a existência de uma solução para uma determinada equação diferencial tratava-se de um trabalho árduo; desse modo, ainda existia a necessidade de um estudo qualitativo sobre as condições necessárias e suficientes para que as equações diferenciais apresentassem soluções.

A seguir, é analisado alguns conceitos necessários para a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais conforme De Figueiredo e Neves (2018, p.51):

Teorema$_1$ (Existência e Unicidade): Seja $f\colon \phi \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto de ϕ do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial com relação a segunda variável $f_y\colon \phi \to \mathbb{R}$ seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0)\ \epsilon \phi$, existem um intervalo aberto contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ com $(x, \omega(x)\,)\ \epsilon \phi$, para todo $x\ \epsilon\ I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I):

$$y' = f(x, y) \qquad eq.01$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad eq.02$$

A primeira etapa para demonstrar o teorema consiste na transformação do problema de valor inicial em um problema de resolução de uma equação integral, por meio do seguinte lema.

Lema: Seja $f\colon \phi \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto de ϕ do plano (x, y). Então, uma função diferenciável $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ é solução do problema de valor inicial (eq. 1 e eq. 02) se, e somente se, for solução da equação integral (De Figueiredo e Neves, 2018, p.51):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds, \quad x \epsilon I; \qquad eq. 03$$

A prova da equivalência do Teorema1(Existência e Unicidade) e o Lema são garantidas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo- TFC[4]. Assim, a demonstração do teorema passa a consistir na resolução da equação diferencial (eq. 03).

Para resolver a eq. 03 , De Figueiredo e Neves (2018) definem C o conjunto de todas as funções contínuas $g: [x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}] \to \mathbb{R}$ tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$, e estabelecem uma métrica g , tal que $d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)|: x\epsilon[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]\}$[5].

Portanto, utilizando-se do fato que C é um espaço métrico[6] completo e do Teorema do Ponto Fixo de Banach, descrito por De Figueiredo e Neves (2018, p.54):

"Seja C um espaço métrico completo. Suponha que $\phi: C \to C$ é uma contração[7], isto é, existe uma constante $0 \leq k < 1$, tal que

$$d\big(\phi(g_1), \phi(g_2)\big) \leq kd(g_1, g_2)$$

Para todos $g_1, g_2 \in C$. Então, existe um e somente um, $g \in C \; tal \; que \; g = \phi(g)$".

Desse modo, ao examinar os passos referentes a prova do teorema, pode-se verificar que o aluno deve dispor de conhecimentos de Cálculo de Várias Variáveis,

[4] **(Teorema Fundamental do Cálculo)** Se f for contínua em [a, b], então a função g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, com $a \leq x \leq b$ é contínua em [a, b] e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$ (Lima, 2004).
Se f for contínua em [a, b], então $\int_b^a f(x) = F(b) - F(a)$ onde F é qualquer primitiva de f isto é, umja função tal que $F'(x) = f(x)$ (Lima, 2004).

[5] **Conforme (Lima, 1983)** seja X um conjunto qualquer. Uma métrica sobre X é uma função $d: XxX \to \mathcal{R}$ que satisfaz para todo $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades:
$d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

[6] **Em matemática, um espaço métrico é um conjunto não-vazio onde as distâncias entre quaisquer de seus elementos é definida, estas distâncias formam a métrica do conjunto (Lima, 1983).**

[7] **Definição de Continuidade:** Uma função $f(P)$ é contínua em um ponto $P = P_0$ se, para qualquer sequência $\{P_n\}$ que converge P_0, temos que $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$ (Lima, 2004).

Topologia Geral, Espaços Métricos e conhecer alguns teoremas de Análise de uma função real e Espaços Métricos.

De modo consoante, Oliveira (2014) relata que os desafios encontrados no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) muitas vezes decorrem devido a utilização de conceitos de Cálculo de Várias Variáveis - CVV e Álgebra Linear, destacando-se a diferenciabilidade e a integrabilidade.

A fim, de trazer uma melhor elucidação do teorema, explicita-se as condições necessárias durante a prova e apresenta-se uma forma simplificada do Teorema de Existência e Unicidade.

Teorema: Seja $f(t,y)$ uma função contínua[8] em uma região $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ e Lipschitz[9] contínua em y em $\mathbb{R}$ então, para cada ponto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}$ existe um intervalo I contendo t_0 e uma única função $y(t)$ definida em I tal que $y(t_0) = y_0$ e $y'(t) = f(t, y(t))$ para todo $t \in I$ (Scárdua, 1999).

A versão simplificada do teorema estabelece de forma mais sucinta as condições suficientes para que a equação diferencial possa dispor de uma única solução, de modo que o aluno necessite de menos conhecimentos prévios (Alves,2020). Além disso, o intuito ao empregar tal versão consiste em auxiliar a compreensão do teorema, para que assim o aluno possa utilizá-lo e empregá-lo conforme a sua necessidade.

Ainda em relação a análise do ensino de EDO, estudos de Arslan e Laborde (2003), Dullius, Araujo e Veit (2011), Oliveira (2014), Alves (2016), Alves (2020), Silva (2022) relatam que a dificuldade apresentada pelos alunos, está intrinsicamente ligada abstração inerente as definições de derivadas e integrais. Portanto, tais dificuldades não se limitam apenas aos algoritmos operacionais que envolvem esses

[8] **Definição de Continuidade:** Uma função $f(P)$ é contínua em um ponto $P = P_0$ se, para qualquer sequência $\{P_n\}$ que converge P_0, temos que $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$ (Lima, 2004).

[9] Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada de **Lipschitz** se existe uma constante $L \geq 0$ tal que, para todos os pontos x e y em D, a seguinte desigualdade é satisfeita: $f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ em que $\|x - y\|$ denota a norma (geralmente a norma euclidiana) da diferença entre $x = y$. A constante L é chamada de **constante de Lipschitz**. Em outras palavras, uma função é Lipschitz contínua se a taxa de variação de função é limitada por uma constante L (Lima,2004).

conceitos, englobam também dificuldades em visualizar e compreender o significado de definições correlacionadas.

Arslan e Laborde (2003), Dullius, Araujo e Veit (2011), Oliveira (2014), Alves (2016), Alves (2020) e Silva (2022) também defendem que ferramentas de *software*podem desempenhar um papel crucial ao facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, ajudando na resolução de problemas ao oferecer a visualização dos conceitos através de recursos interativos que incentivam os alunos a se envolverem mais ativamente na construção do conhecimento sobre o conteúdo ensinado pelo professor em sala de aula.

Por essa razão, na próxima seção, é apresentado construir a transposição didática por meio da visualização e respaldado pela tecnologia, mais especificamente pelo *software* Geogebra. A escolha pelo Geogebra ocorreu devido a sua linguagem de comandos matemáticos acessível e por se tratar de um software livre, isto é, pode ser utilizado para qualquer propósito, como estudo ou compartilhamento de atividades desenvolvidas. Desse modo, *software* servirá como suporte metodológico, destacando nossa intenção de explorar ao longo da implementação das situações didáticas.

4 ANÁLISES PRELIMINARES ACERCA DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE EDO'S: HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DO TEOREMA

Nesta seção, é apresentado as atividades desenvolvidas com o suporte do Geogebra para facilitar a compreensão do teorema. Nas atividades, buscou-se permitir que os alunos visualizem graficamente as soluções das EDOs e compreendam suas propriedades qualitativas (gráfico-geométricas).

Além disso, espera-se que as atividades proporcionem um ambiente interativo onde os alunos possam manipular parâmetros e observar os efeitos nas soluções das EDOs.

Situação-Problema: Modelo de Crescimento Populacional

Considere a equação diferencial ordinária que modela o crescimento populacional de uma espécie de peixes em um lago. Sabe-se que a taxa de crescimento populacional é proporcional à população atual, um fenômeno descrito pela equação diferencial logística:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$$

onde:

- $P(t)$ é a população de peixes no tempo t,
- r é a taxa intrínseca de crescimento,
- k é a capacidade de suporte do ambiente (a população máxima que o lago pode sustentar).

Problema: Usando o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções de EDO's, demonstre que a equação diferencial logística acima possui uma solução única para uma condição inicial dada . Utilize o *software* GeoGebra para visualizar e analisar o comportamento da solução.

Solução: Para resolver a situação - problema, inicialmente deve-se revisar o teorema, que afirma que sob certas condições de continuidade e Lipschitz, uma EDO tem uma solução única para uma dada condição inicial.

Desse modo, deve-se verificar as seguintes condições:

- Se a função $f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ é contínua.

Para demonstrar que a função $f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ é contínua, é preciso verificar se a função satisfaz a condição de continuidade.

A função $f(P)$ é uma combinação linear de funções polinomiais simples, o que a torna intrinsecamente contínua em todo o seu domínio. No entanto, para ser formal, mostra-se a análise da continuidade de modo mais detalhado.

Como $f(P)$ é formada por operações contínuas (polinomiais e uma divisão), ela é contínua para todos os $P \neq 0$.

E para o ponto $P = 0$, observe que $f(P) = 0$. Nesse ponto específico, $f(P)$ é contínua.

- Mostrar que a função $f(p)$ satisfaz a condição de Lipschitz.

Como $f(p)$ é uma função polinomial de P, consequentemente é Lipschitz contínua em qualquer intervalo limitado. Entretanto, a seguir, apresenta-se protocolarmente que a função $f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ é Lipschitz.

Para isso, examina-se a existência de uma constante L tal que, para todos os P_1 e P_2, a diferença entre $f(P_1)$ e $f(P_2)$ é limitada por $L\|P_1 - P_2\|$, em que $\|P_1 - P_2\|$ representa a distância entre os pontos P_1 e P_2.

Ao calcular a derivada da função $f(P)$ em relação a função P, pode-se verificar se a função é limitada em um intervalo $[a,b]$ e encontrar uma constante de Lipschitz L. Pois, $f'(P) = r\left(1 - \frac{2P}{k}\right)$, e para determinar a constante de Lipschitz, podemos empregar o seguinte teorema:

Teorema de Weierstrass: Uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada e apresenta um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo (Lima, 2004).

Considerando P em um intervalo $[0,k]$ o valor máximo da derivada deve ocorrer em $P = 0$ ou $P = k$.

Para

$$P = 0 \Longrightarrow f'(0) = r.(1) = r\,;$$

$$P = k \Longrightarrow f'(k) = r.\left(1 - \frac{2k}{k}\right) = -r\,;$$

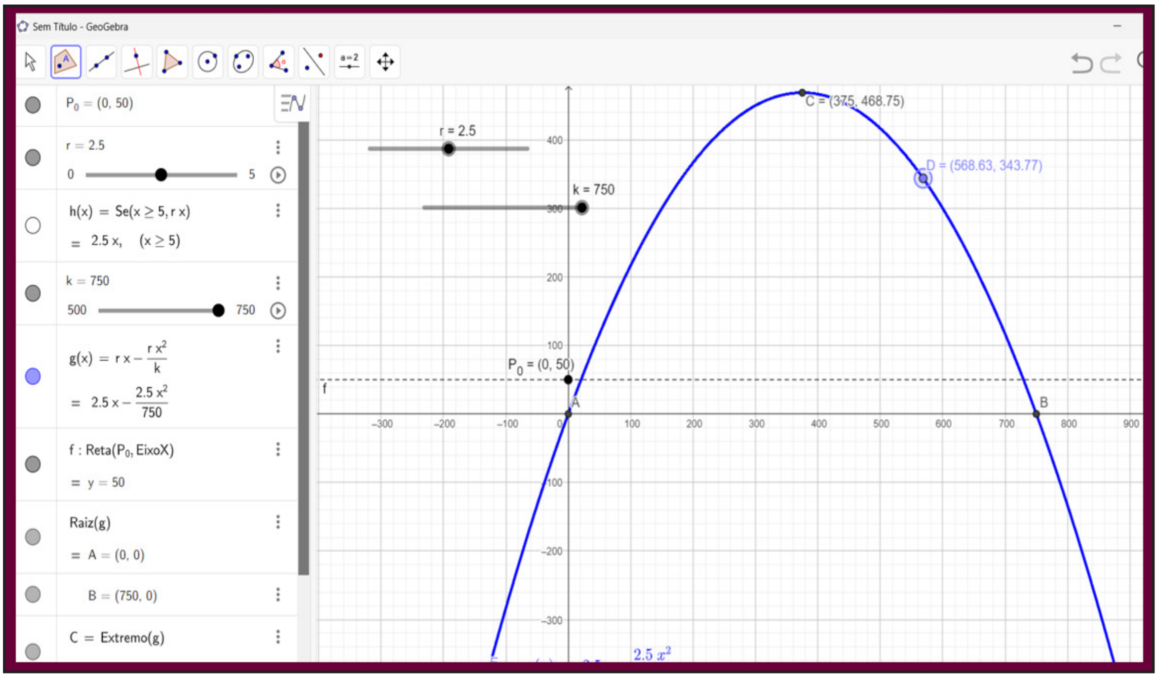
Portanto, a constante de Lipschitz será $L = |f'(0) - f'(k)| = |r - (-r)| = 2r$. Assim, verifica-se que a função é contínua e Lipschitz, cumprindo as condições necessárias para aplicar o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções de EDOs. Isso garante a existência de uma solução única para a equação diferencial logística dada uma condição inicial $P(0) = P_0$.

Desse modo, o modelo proposto que determina a população de peixes, conforme taxa de crescimento e capacidade de peixes no lago, é um modelo “ideal”, pois, de acordo com o Teorema de Existência e Unicidade, ele apresentará apenas um único valor e sempre terá uma solução.

Análise dos Resultados no *software*: Para um melhor entendimento do modelo é ilustrado exemplos com a população inicial de peixes no lago em 50, e criar controles deslizantes para a taxa de crescimento r e a capacidade máxima de peixes no lago k.

Na figura 3, temos r = 2.5 e capacidade máxima dos peixes do lago em 750.

Figura 3 – Análise do modelo que descreve o crescimento populacional

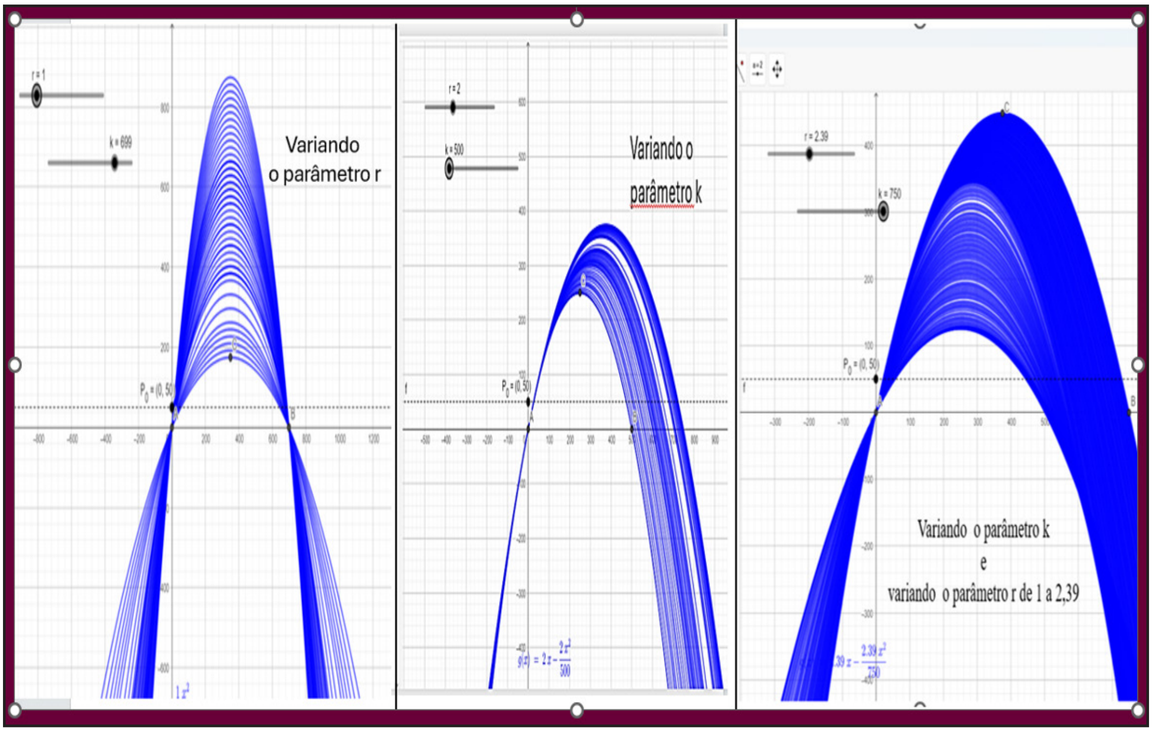


Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio da Figura 3, podemos interpretar a função que determina a quantidade de peixes e a partir da qual a população poderá diminuir. Isso é, embora a capacidade máxima do lago seja de 750 peixes, a partir de 469 peixes as condições do lago passam a ser insuficientes, e podemos observar o decrescimento da função.

Ainda, pode-se pedir aos alunos que observem como os parâmetros $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{k}$ no *software* influenciam a função que modela o crescimento dos peixes, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Representação de como o comportamento dos parâmetros influencia no modelo de crescimento de determinada população de peixes



Fonte: Elaborado pelos autores

Na Figura 4, apresenta-se por meio das ferramentas *controle deslizante* e *rastro* do *software* Geogebra exemplos de como a população de peixes evolui e se estabiliza em torno da capacidade de suporte k , e da velocidade de crescimento r.

Situação – Problema: O controle de temperatura em um processo industrial é governado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{amb})$$

Em que:

- $T(t)$ é a temperatura no tempo ;
- k é uma constante positiva que representa a taxa de resfriamento ou aquecimento;
- T_{amb} é a temperatura ambiente, considerada constante.

Utilizando o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções de EDOs, demonstre que a equação diferencial que modela o controle de temperatura possui uma solução única para uma condição inicial específica $T(0) = T_0$.

Para resolver a equação diferencial que governa o controle de temperatura em um processo industrial, o aluno deve seguir alguns passos: encontrar a solução analítica da equação diferencial, verificar as condições de existência e unicidade de soluções.

Desse modo, por se tratar de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes, pode-se resolvê-la usando métodos padrão para EDOs lineares, como **o método de separação de variáveis**.

Assim, reescrevendo a equação para separar as variáveis T e t :

$$\frac{dT}{(T - T_{amb})} = -k\,dt$$

$\int \frac{dT}{(T - T_{amb})} = \int -k\,dt \Rightarrow ln|T - T_{amb}| = -kt + C$, onde C é uma constante de integração.

$ln|T - T_{amb}| = -kt + C \Rightarrow |T - T_{amb}| = e^{-kt+C} \Rightarrow T - T_{amb} = \pm\, e^{C}.e^{-kt}$, substituindo a constante $\pm\, e^{C}$ por A , a expressão torna-se:

$$T - T_{amb} = A.e^{-kt} \Rightarrow T(t) = A.e^{-kt} + T_{amb}.$$

Utilizando-se da condição inicial $T(0) = T_o$

$$T(0) = T_o = A.1 + T_{amb} \Rightarrow A = T_o - T_{amb}$$

Portanto, a expressão final do modelo de controle de temperatura:

$$T(t) = T_{amb} + (T_o - T_{amb}).e^{-kt}$$

A fim de garantir a existência e unicidade da equação diferencial sobre determinadas circunstâncias, deve-se verificar se a função é contínua e Lipschitz.

Continuidade: A função $f(T) = -k(T - T_{amb})$ é contínua para todos T, por se tratar de uma função linear[10].

Condição de Lipschitz: Para mostrar que a função $f(T) = -k(T - T_{amb})$ é Lipschitz, precisamos verificar se existe uma constante L tal que, para todos os T_1 e T_2, a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$|f(T_1) - f(T_2)| \leq L\|T_1 - T_2\|.$$

$$\begin{cases} f(T_1) = -k(T_1 - T_{amb}) \\ f(T_2) = -k(T_2 - T_{amb}) \end{cases}$$

$$|f(T_1) - f(T_2)| = |-k(T_1 - T_{amb}) + k(T_2 - T_{amb})| = |-kT_1 + kT_2| = |k(T_2 - T_1)|.$$

Considerando $L = k$, temos que a função é Lipschitz, o que garante a unicidade da solução no problema proposto.

Apesar de encontrarmos a solução analítica do modelo de temperatura, que mostra como a temperatura do sistema converge para a temperatura ambiente ao longo do tempo, devemos dispor do Teorema de Existência e Unicidade para garantir que, para garantir que, para qualquer temperatura desejada, dada uma condição inicial $T(0) = T_o$, a solução sempre existirá e será única.

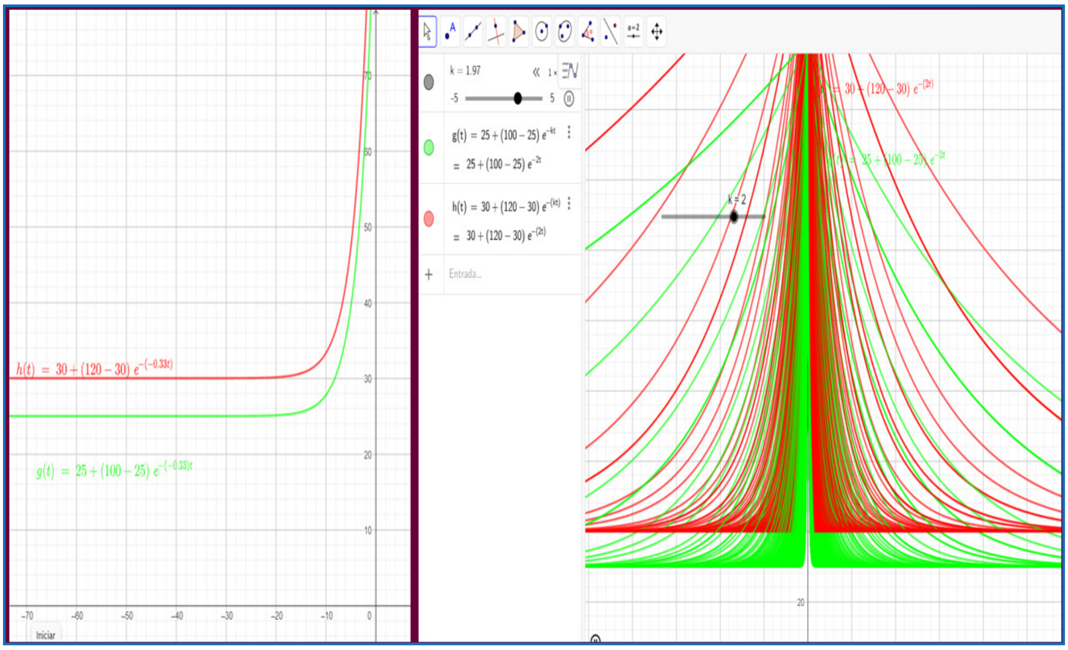
Em relação ao modelo, para um melhor entendimento, na Figura 5, emprega-se a função no *software* GeoGebra, definindo os seguintes parâmetros:

- Função g(t), taxa de resfriamento k =0.33; temperatura ambiente T_{amb} =25; temperatura inicial T_o= 100.

[10] Funções lineares têm a expressão $f(T) = aT + b$, onde a e bsão constantes. Todas as funções lineares são contínuas em todo o domínio dos números reais porque a operação de multiplicação por uma constante e a adição de constantes são operações contínuas.

- Função h(t), taxa de resfriamento k =0.33; temperatura ambiente T_{amb} =30; temperatura inicial T_o =120.

Figura 5 – Representação do modelo de temperatura e seu funcionamento conforme temperaturas iniciais e de meio ambiente, à esquerda representação conforme condições estabelecidas, e à direita utilização da ferramenta rastro Geogebra



Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio da Figura 5, pode-se verificar como ocorre o controle de temperatura de acordo com as condições de temperatura inicial, e da temperatura do ambiente, ~~e~~ além de como esta última afetará a temperatura que se almeja alcançar, o funcionamento das máquinas e, assim, a tomada de decisão.

Situação-Problema: Exemplificação de uma EDO que não possui sua solução garantida pelo Teorema de Existência e Unicidade

Seja a equação diferencial: $\frac{dy(x)}{dt} = \sqrt{|y(x)|}$ e $y(x_0) = 0$, encontre a solução da EDO e determine se essa solução é única.

A finalidade dessa situação problema é evidenciar as características necessárias que a função continua na EDO deve dispor para a utilização do Teorema.

O aluno deve analisar as condições necessárias, e verificar que a função não satisfaz as condições do teorema, pois f não é lipschitziana na origem.

Para entender por que a função raiz quadrada de módulo de , não é Lipschitz na origem, emprega-se a definição de uma função Lipschitz e o comportamento específico dessa função em torno da origem, isto é, $y = 0$.

$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$

$|f(x) - f(0)| \leq L\|x\|$, como $f(0) = 0$ e $f(x) = \sqrt{|x|}$

Queremos ver se existe uma constante L tal que:

$\sqrt{|x|} \leq L|x| \Longrightarrow \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} \leq L$

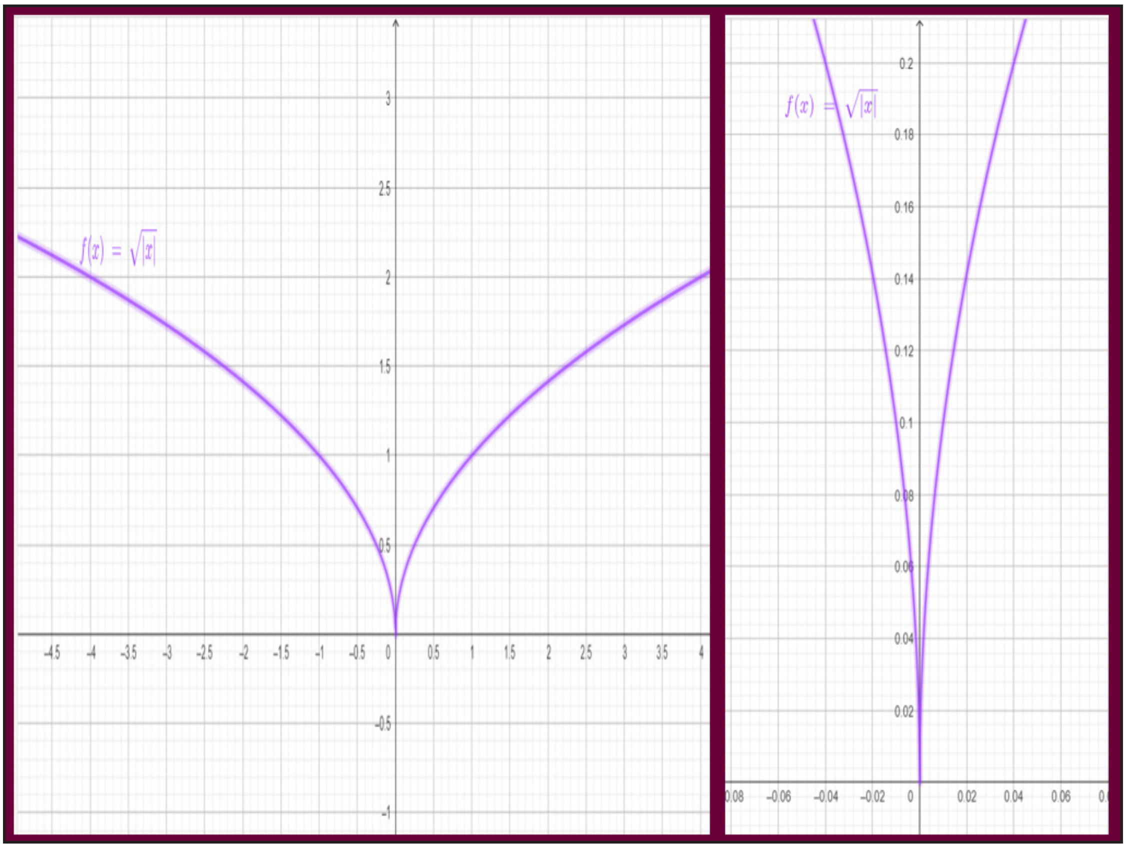
$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq L.$

Para valores de próximos de 0, $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$. se torna arbitrariamente grande. Assim, não existe uma constante L que possa satisfazer a condição de Lipschitz para todos os x próximos de 0.

Na Figura 6, apresenta-se visualmente que a derivada não está bem definida na origem, apresentando assim uma concepção do que seria um ponto de singularidade na função.

No entanto, embora essa equação diferencial não disponha de todas as condições necessárias do Teorema de Existência e Unicidade, a equação admite duas soluções, embora não haja unicidade. Assim, a EDO também dispõe da solução descrita por $y(t) = \frac{t^2}{4}$ e a solução trivial $y(t) = 0$.

Figura 6 – Representação da função raiz quadrada de x (à esquerda) e à direita manifestação do intervalo em que a função dispõe de singularidade



Fonte: Elaborado pelos autores

5 CONCLUSÃO

A utilização da Engenharia Didática no estudo do Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias, ocorreu nas etapas das análises prévias e preliminares. A metodologia ED revelou-se uma abordagem eficaz para superar os desafios didáticos frequentemente associados ao ensino desse tema complexo.

Por meio da estrutura da ED, identificou-se os principais obstáculos enfrentados pelos alunos ao tentar compreender o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de EDO e elaborou-se estratégias didáticas que pudessem promover uma compreensão mais profunda e intuitiva do teorema.

Dessa forma, as análises prévias permitiram uma compreensão detalhada do problema didático, incluindo a identificação das dificuldades específicas dos alunos e a definição de objetivos claros para o experimento. A análise de alguns estudos acerca do ensino desse campo epistêmico, forneceu *insights* que destacavam as abordagens existentes e estabeleciam uma base sólida para o desenvolvimento de novas estratégias.

Na fase de análise a priori, as hipóteses formuladas acerca dos obstáculos no entendimento do teorema, auxiliaram a criação e o planejamento das atividades didáticas, garantindo que estas fossem direcionadas para abordar as dificuldades identificadas. A implementação de tecnologias educacionais, como *softwares* de simulação e visualização gráfica, mostrou-se particularmente eficaz em facilitar a compreensão dos conceitos teóricos subjacentes ao teorema, buscando promover uma interpretação do teorema e de exemplos de aplicação.

As atividades didáticas desenvolvidas indicam que a utilização de abordagens visuais e interativas pode contribuir para a compreensão qualitativa e quantitativa do teorema pelos alunos. A possibilidade de manipular parâmetros e observar os efeitos nas soluções das equações diferenciais permitiu aos alunos explorarem o comportamento das soluções de maneira prática e intuitiva.

Embora as atividades didáticas desenvolvidas até agora tenham demonstrado que abordagens visuais e interativas, como a manipulação de parâmetros no GeoGebra, contribuem significativamente para a compreensão qualitativa e quantitativa do teorema por parte dos alunos, a etapa de experimentação direta com os alunos ainda precisa ser realizada.

Essa experimentação será fundamental para verificar, de maneira prática, como esses recursos influenciam o entendimento dos conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), permitindo uma análise mais aprofundada sobre o impacto pedagógico das atividades e a adaptação das estratégias conforme as respostas dos alunos.

Em resumo, a Engenharia Didática, com suas fases de análise prévias e preliminares, demonstrou ser uma metodologia robusta e eficaz para o ensino do Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias. Devido a estrutura da metodologia se pôde desenvolver estratégias a fim de facilitar a compreensão dos alunos, e ofereceu uma base sólida para a continuidade da pesquisa e para a aplicação de técnicas semelhantes em outros tópicos matemáticos complexos.

AGRADECIMENTOS

Trabalho financiado por Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, uma entidade ligada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações-CNPQ e Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - FUNCAPpara incentivo à pesquisa no Brasil.

Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) (CIDTFF).

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Didática e Concepção de dispositivos informáticos educacionais. **Revista de Informática Aplicada**, Santo André, v. 3, n. 1, p. 4-10, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis/SC, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis/SC, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da educação**, Paranaíba, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016.

ALVES, Francisco Régis Vieira.; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista - RS**, *[S.l.]*, v. 2, n. 18, p. 121-137, 2018.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática (ED): análises preliminares e a priori para a equação diferencial de Claireaut. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 1-33, 2020.

ARSLAN, Salahattin.; LABORDE, Colette. Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. **Actes du Colloque Européen ITEM**, Reims, France, 2003. Disponível em: http://edutice.archivesouvertes.fr/docs/00/05/41/73/PDF/co26th1.pdf. Acesso em 03 de Junho de 2024.

ANDRADE, M. A. de; FERREIRA FILHO, L. G. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, *[S.l.]*, v. 37, n. 2, p. 2309-2309, 2015.

ARTIGUE, Michelle. Ingénierie didactique. *In*: BRUN, J**. Didactiques des Mathématique.** Paris: Delachaux et Niestlé, 1996. p. 243-264.

BARATTO, G. **Solução de equações diferenciais ordinárias usando métodos numéricos. Versão 0.1.** 16f. 2007. Notas de aula.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

DOUADY, Régine. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia. **Ingeniería Didáctica en educación**, *[S.l.]*, p. 1–7, 1995.

DULLIUS, M. M.; ARAÚJO, I. S.; VEIT, E. A. Ensino e Aprendizagem de equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 17-42, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada; CNPq, 1983.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004

NAGLE, R. K. **Equações diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva de; MENDES, Iran Abreu. O DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, DESDE O FINAL DO SÉCULO XVII ATÉ MEADOS DO SÉCULO XVIII. ***In:*** XV Seminário Nacional de História da Matemática. **Anais[...]**, Sociedade Brasileira de História da Matemática, Maceió, v. 15, p. 1-15, 2023.

OLIVEIRA, E. A. **Uma engenharia didática para abordar o conceito de equação diferencial em cursos de engenharia.** 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SCÁRDUA, Bruno C. Azevedo. **Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias**. 22º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/22_CBM_99_01.pdf. Acesso em: 5 jun. 2024.

SILVA, Alessandro Rosa. **Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da teoria a matemática no contexto das ciências**. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

Contribuição de Autoria

1 – Ana Carla Pimentel Paiva

Graduanda em Matemáticca pela Universidade Federal do Ceará
https://orcid.org/0000-0001-5801-9562 • anacarla_cocote@hotmail.com
Contribution: Conceitualização, Curadoria de dados, Análise formal, Investigação, Administração de projetos, Recursos, Software, Visualização, Escrita - Primeiro rascunho

2 – Francisco Régis Vieira Alves

Doutorado com ênfase no ensino de Matemática pela Universidade Federal do Ceará
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561 • fregis@ifce.edu.br
Contribution: Conceitualização, Análise formal, Metodologia, Administração de projetos, Recursos, Software, Visualização, Escrita - Primeiro rascunho, Escrita - Revisão e edição

3 – Helena Campos

Doutorado em Matemática com especialização em Topologia e Geometria pela UNED
https://orcid.org/0000-0003-2767-0998 • hcampos@utad.pt
Contribution: Análise formal, Investigação, Metodologia, Recursos, Supervisão, Escrita - Primeiro rascunho

4 – Diego Silva

Doutorado em Matemática pura pela Universidade Federal do Ceará
https://orcid.org/0009-0001-8570-2399 • diegodsp01@gmail.com
Contribution: Análise formal,Recuros, Supervisão, Escrita - Revisão e edição

Como citar este artigo

PAIVA, A. C. P., ALVES, F. R. V., CAMPOS, H., & SILVA, D. Engenharia Didática no estudo do Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 46, e88519, 2024. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X88519. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X88519