UFSM

CIÊNCIA e NATURA

ISSN 2179-460X
OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 47, e88165, 2025 • https://doi.org/10.5902/2179460X88165
Submissão: 08/07/2024 • Aprovação: 29/05/2025 • Publicação: 01/07/2025

Ensino

Relações entre a Álgebra do ensino superior e da educação básica: o conceito de anel e a resolução de equações

Relations between the Algebra of higher education and basic education: the concept of ring and resolution of equations

Luciane Gobbi Tonet[I], **Tauana Dambrós**[I], **Janice Rachelli**[I]

[I] Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brazil

RESUMO

A Álgebra é frequentemente considerada uma disciplina cuja relevância e aplicabilidade é questionada pelos acadêmicos dos cursos de licenciatura em Matemática. Neste sentido, o artigo tem como objetivo apresentar exemplos sobre a estrutura algébrica de anel e a resolução de equações que possam ser abordadas na disciplina de Álgebra, proporcionando subsídios para a compreensão de conceitos tratados na educação básica. Para isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica em que exploramos um panorama do ensino de Álgebra no ensino superior e, também apresentamos o conceito de anel por meio da definição e de exemplos clássicos. Após, apresentamos exemplos de anéis com operações não usuais e algumas soluções de equações. Concluímos que é possível estabelecer uma relação entre o ensino superior e a educação básica auxiliando o futuro professor no que tange a sua atuação, e contribuindo para o ensino de Álgebra no nível básico, mais especificamente no que diz respeito ao estudo das propriedades dos conjuntos numéricos e de equações, tornando sua abordagem mais instigante e repleta de novos significados.

Palavras-chave: Álgebra; Licenciatura; Anel; Resolução de equações

ABSTRACT

Algebra is often considered a discipline whose relevance and applicability in the work of future teachers in the area is questioned by academics on undergraduate Mathematics courses. In this sense, this article aims to present examples of the algebraic ring structure and the resolution of equations that can be addressed in the Algebra discipline, providing support for the understanding of concepts covered in basic education. To this end, we carried out bibliographical research in which we explored an overview of the teaching of Algebra in higher education and, subsequently, presented the concept of ring through its definition and classic examples. Afterwards, we present examples of rings with unusual operations and some equation solutions. We believe, in this way, to help the future teacher with regard to his performance in basic education and contribute to the teaching of Algebra at the basic level, more specifically with regard to the study of the properties of numerical sets and equations, making his approach more thought-provoking and full of new meanings.

Keywords: Algebra; Graduation in Mathematics; Ring; Solving equations

1 INTRODUÇÃO

É muito comum os alunos dos cursos de licenciatura em Matemática questionarem as ementas das disciplinas de Álgebra, na maioria das vezes, por não perceberem sua importância como futuros professores. Muitos, ao cursarem a disciplina, colocam em dúvida sua relevância e utilidade para seu trabalho como futuros professores da educação básica (Mondini; Bicudo, 2010).

Mediante esta perspectiva, a disciplina de Álgebra permanece descontextualizada no currículo da licenciatura. No entanto, "como qualquer outra disciplina, a Álgebra deve ser apresentada de maneira a fazer sentido ao aluno o porquê que ela faz parte de seu currículo" (Souza, 2008).

Na maioria dos cursos de licenciatura em Matemática a disciplina de Álgebra tem como bibliografia os livros de Domingues e Iezzi (2018), Hefez (2016), Vieira (2015), Gonçalves (2017), dentre outros.

Convém ressaltar que, Domingues e Iezzi (2018) aprimoraram a edição anterior, acrescentando exemplos introdutórios aos assuntos de cada capítulo como forma de estimular as atividades, além de exercícios de ordem mais prática, sendo aplicáveis na educação básica. Os próprios autores a classificam como uma obra de teor introdutório, cujo capítulo inicial, intitulado "Noções sobre Conjuntos e Demonstrações", se faz importante no atual cenário das licenciaturas em Matemática, área para a qual a obra se destina.

No livro Álgebra Abstrata para a Licenciatura, Vieira (2015) apresenta um material didático totalmente direcionado ao aluno de Licenciatura em Matemática. Nos capítulos que permeiam a obra, conceitos, definições e proposições são introduzidos considerando o cenário da sala de aula da educação básica, permeados com explanações e muitos exemplos, apresentados em ordem crescente de dificuldade.

A obra de Hefez (2016) retrata um texto direcionado a um primeiro contato com a Álgebra Abstrata para graduação em Matemática. O conteúdo é apresentado de forma elementar e ilustrado com vários exemplos.

No que diz respeito a um curso de licenciatura, pressupomos que essa abordagem está de acordo com o que julgamos adequado à disciplina, levando em consideração a formação inicial de professores. Os conteúdos comumente elencados na ementa de Álgebra Abstrata: Conjuntos, Aritmética, Anéis e Corpos são importantes para educação básica, devendo o professor que a rege abordá-la de forma a aproximar ainda mais o estudante da disciplina com a sua realidade escolar, favorecendo a conexão entre o que se estuda no ensino superior e o que se leciona nos ensinos fundamental e médio.

Com vistas a atender tais requisitos, no decorrer deste artigo, exploraremos a definição de anel, bem como as propriedades decorrentes, para resolver equações. Por meio de exemplos, direcionados ao curso de licenciatura em Matemática, ressaltamos uma possível conexão entre este nível de ensino e a educação básica.

Desta forma, evidenciaremos ao licenciando em Matemática a aplicabilidade de algumas propriedades decorrentes da definição de anel para solucionar problemas oriundos de livros utilizados na educação básica. Além do mais, pensamos que o ensino de Álgebra nas escolas de educação básica deve ser uma das preocupações dos cursos de licenciatura em Matemática na busca de uma melhor formação de professores.

Selecionamos os exemplos na perspectiva de fornecer uma base teórica mais adequada ao futuro professor de Matemática, permitindo que este baseie suas aulas nas que lhes foram ministradas no nível superior. Entendemos que, a partir desta postura contribuiremos com a conexão entre a Álgebra do ensino superior e da educação básica de forma mais efetiva.

Sendo assim, o objetivo deste artigo é apresentar exemplos sobre a estrutura algébrica de anel e a resolução de equações que possam ser desenvolvidas na disciplina de Álgebra, proporcionando subsídios para a compreensão de conceitos tratados na educação básica.

2 ALGUNS ASPECTOS DO ENSINO DE ÁLGEBRA

A Álgebra é a parte da Matemática elementar que generaliza a Aritmética, introduzindo variáveis que representam os números e simplificando e resolvendo, por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos (Oxford, 2024). Sua abordagem começa nos anos iniciais do ensino fundamental, quando se trata de regularidades de sequências, até o ensino superior em que são abordadas as estruturas algébricas que fundamentam os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e servem de base para pesquisas mais avançadas na pós-graduação.

Na educação básica, o ensino de Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é "essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas Matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (Brasil, 2018, p. 270).

Uma das habilidades a serem desenvolvidas no ensino fundamental é de "reconhecer que a relação de igualdade Matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas" (Brasil, 2018, p. 303). Essa habilidade diz respeito às operações e propriedades que são válidas no conjunto dos números inteiros, racionais ou reais. Essas propriedades são estudadas com rigor em cursos de Matemática, tanto licenciatura quanto bacharelado, quando se definem as estruturas algébricas de anéis e corpos.

Por meio da Álgebra deve ser enfatizado o "desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (Brasil, 2018, p. 270).

No entanto, o que se observa, é o uso de alguns macetes na resolução de equações. Desta forma, a utilização da linguagem algébrica muitas vezes não é desenvolvida devidamente nas salas de aula de Matemática.

Um exemplo disso é a resolução de equações da forma $ax + b = 0$. Se o aluno aprende que, para isolar a variável x, deve "passar para o outro lado com sinal negativo" então ele pode ser conduzido erroneamente à situação de que $2x = 1$ equivale a $x = \frac{1}{-2}$.

Ou ainda, perante equações matriciais da forma $AX = B$, tal pensamento induz ao aluno responder que a matriz A deve "passar para o outro lado" dividindo a matriz B, operação que não está definida entre matrizes.

Devemos nos atentar aos equívocos que isso pode ocasionar. Consideremos, por exemplo, a resolução de equações da forma $x^2 = 2x$. Se o estudante, simplesmente, "cortar" a variável x nos dois membros, concluirá de forma errônea que a solução é somente $x = 2$. Na verdade, não podemos dividir ambos os membros da equação por x, a menos que tenhamos certeza de que $x \neq 0$. Quando se resolve a mesma de maneira adequada, concluímos que $x \cdot (x - 2) = 0$, implica que $x = 0$ ou $x = 2$, uma vez que a regra do fator nulo, propriedade dos números reais, deve ser usada. Cabe destacar que o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é um exemplo de estrutura algébrica denominada corpo, em que são válidas propriedades, as quais devem ser usadas na resolução correta de equações.

Diante deste contexto, ressaltamos a importância de apresentar atividades, na qual as definições de anel e corpo, bem como suas propriedades, sejam aplicadas para resolver equações e problemas, alguns deles oriundos de livros da educação básica, no âmbito de uma linguagem adequada ao nível de ensino a que se propõe.

De acordo com Ribeiro e Curi (2021):

> [...] as definições devem ser compreensíveis para o nível de ensino no qual elas são apresentadas. Por exemplo falar em "corpo" para alunos de Álgebra de um curso de licenciatura em Matemática pode ser perfeitamente entendido como estrutura definida em um conjunto, munida de operações e propriedades. No entanto, ao tratar do conjunto dos reais na educação básica, a palavra "corpo" não pode ser introduzida sem cuidados, pois tem outra acepção na linguagem comum. [...] Parece-nos que situações de sala de aula que discutam os diferentes significados de conceitos matemáticos - como é o caso do perfil conceitual da equação - podem contribuir para se elucidar os sentidos dados pelos alunos a tais conceitos (Ribeiro; Curi, 2021, p. 104).

Observamos que algumas reflexões acerca do ensino de Álgebra se fazem pertinentes. Por quais motivos alguns macetes, como os descritos nos parágrafos precedentes, são enfatizados perante exemplos que poderiam justificar algumas propriedades de forma mais categórica? A Álgebra ensinada nas escolas não se distingue muito da estudada na universidade?

Alguns trabalhos correlatos que abordam este distanciamento foram elaborados. Por exemplo, citamos Pires (2012, p. 78), no qual um "grupo de futuros professores de Matemática da cidade de São Carlos que já realizaram estágios curriculares nas escolas de educação básica, e tem como foco central de investigação, as falas destes sobre o ensino da linguagem algébrica na educação básica." Por meio dos questionários aplicados a licenciandos do curso, foram identificadas dificuldades com a aprendizagem de Álgebra desde a educação básica, bem como uma preocupação com o ensino quando comparam a Álgebra escolar e a acadêmica, indicando a dissociação entre elas.

Ribeiro (2015, p. 1) discute "qual a visão de Álgebra que professores formadores e professores da educação básica declaram, quando são convidados a falar a respeito de tal temática". Como resultado, o autor destaca divergências na visão dos professores universitários e da educação básica.

Citamos também Bussmann e Savioli (2008) que investigam a existência de uma conexão entre os conteúdos de Álgebra vistos em um curso de licenciatura em

Matemática e a Álgebra abordada no ensino fundamental e médio, destacando "que a questão da ausência de articulação é forte" (p. 2).

No entanto, não é muito difícil perceber que a Álgebra do ensino superior tem muitas conexões com a do ensino fundamental e médio. No caso das equações fracionárias, por exemplo, estudos apontam a dificuldade representada pelo cancelamento incorreto de termos, especialmente pelo mau uso da propriedade distributiva. Segundo Ribeiro e Curi (2021, p. 104):

> Se o professor estudar essas dificuldades juntamente com a apresentação do "corpo dos reais", em disciplinas de Álgebra ou Análise Matemática, poderá entender melhor o próprio conteúdo e visualizar as dificuldades que terá de superar no ensino de quaisquer elementos que possam ser relacionados a essa estrutura.

Ribeiro (2015) também ressalta o distanciamento da Álgebra do ensino superior daquela abordada na educação básica, a partir das visões diferentes que os professores de ambos os níveis de ensino possuem acerca da disciplina; alguns fazendo distinção entre como ensinar num curso de licenciatura e em demais cursos de graduação, e como ensiná-la na educação básica.

Somos instigados a acreditar que o processo de formação do professor se baseia na divergência, e não numa identidade, entre educação Matemática escolar e ensino de Matemática acadêmica. Ressaltamos que uma tentativa de unificação entre ambas se iniciou durante o Movimento da Matemática Moderna, por meio da teoria dos conjuntos. Tal processo, no entanto, causou transtornos. Conforme destaca Pires (2012), a Álgebra presente na Matemática escolar está baseada na Álgebra simbólica, embora quando tal linguagem passa a ter um teor muito formal, ela constitui um entrave para o aprendizado a nível básico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos finais do ensino fundamental de Matemática (Brasil, 1998), estudar Álgebra se torna importante ao aluno na medida em que favorece o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, sendo, além disso, uma poderosa ferramenta no que diz respeito à resolução de problemas, devendo ser esta última uma abordagem preferencial para o ensino de Matemática. O mesmo documento ainda sugere que os alunos estudem padrões, presentes em sucessões numéricas e representações geométricas, por exemplo, a fim de construir a ideia da Álgebra como uma linguagem que expresse suas generalidades.

A partir de um problema, o aluno se aproxima de um conceito, para posteriormente, apropriar-se deste de maneira mais formal. Tal metodologia parece vir na direção oposta à prática de outrora, na qual após a exposição do conceito a ser estudado, seguir-se-ia a sua aplicação em situações-problemas.

A fim de enriquecer o texto sobre o conceito de anel e a resolução de equações, além das principais referências como Domingues e Iezzi (2018), Hefez (2016) e Vieira (2015), faremos conexões com livros didáticos da educação básica, fornecendo exemplos e abordagens dos conceitos em questão presentes nessas obras.

Nesse sentido, priorizamos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do Ministério da Educação. Entre os livros utilizados, destacam-se Silveira (2022), Silveira e Marques (2013, 2017) e Dante (2002). Por meio desta abordagem que integra os livros didáticos, buscamos proporcionar uma familiaridade com a teoria de anéis em um contexto mais acessível, ampliando assim a compreensão do conteúdo.

3 O CONCEITO DE ANEL

Um anel é uma estrutura algébrica que consiste num conjunto, juntamente com duas operações binárias, normalmente denominadas adição e multiplicação, onde cada operação combina dois elementos para formar um terceiro elemento. Para se qualificar como um anel, o conjunto, juntamente com as suas duas operações, deve satisfazer determinadas condições.

A seguir, apresentamos a definição formal de anel e as definições de domínio de integridade e de corpo.

Definição 1. Sejam A um conjunto não vazio e $+$ e $\cdot$ duas operações binárias em A, denominadas adição e multiplicação. Dizemos que a terna $(A, +, \cdot)$ é um anel, se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

I) A adição é comutativa, isto é, $a + b = b + a$, para quaisquer $a, b \in A$;

II) A adição é associativa, ou seja, $a + (b + c) = (a + b) + c$, para quaisquer $a, b, c \in A$;

III) Existe $0 \in A$, denominado elemento neutro aditivo, tal que $0 + a = a + 0 = a$, para todo $a \in A$;

IV) Para todo $a \in A$, existe $-a \in A$, elemento oposto de a, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

V) A multiplicação é associativa, isto é, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in A$;

VI) Valem as leis distributivas da multiplicação com relação à adição:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Por conveniência, dizemos que A é um anel, deixando subentendidas as operações de adição e multiplicação.

Usando conhecimentos prévios sobre os conjuntos numéricos, temos que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R} +, \cdot)$ são exemplos clássicos de anéis com as operações usuais de adição e multiplicação, cujas propriedades cumprem os axiomas da definição (Domingues; Iezzi, 2018).

Na figura 1, ilustramos uma abordagem das propriedades de anel em livros didáticos da educação básica.

Observamos que são apresentadas as propriedades da adição e multiplicação dos números inteiros, tratadas no 7º ano do ensino fundamental, porém, sem utilizar a nomenclatura de Anel. Além do mais, essas propriedades são ilustradas por meio de exemplos, como para a propriedade comutativa na adição: $(-6) + (+5) = -1 = (+5) + (-6)$ (Silveira, 2022).

Figura 1 – Sobre as propriedades dos números inteiros

Propriedades da adição com números inteiros

Propriedade comutativa

Em uma adição com números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Propriedade associativa

Em uma adição com números inteiros com mais de duas parcelas, podemos associar essas parcelas de diferentes maneiras sem alterar a soma.

Elemento neutro

Em uma adição com duas parcelas em que uma delas é zero, o resultado é igual à outra parcela. O zero é o elemento neutro da adição.

Elemento oposto

Em uma adição em que as duas parcelas são números opostos, a soma é zero.

Propriedades da multiplicação com números inteiros

Propriedade comutativa

Em uma multiplicação com dois ou mais números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.

Propriedade associativa

Em uma multiplicação com três ou mais números inteiros, podemos associar esses números de maneiras diferentes sem alterar o produto.

Elemento neutro

Em uma multiplicação com dois números inteiros em que um deles é igual a 1, o resultado é igual ao outro número inteiro.

O número +1 é o elemento neutro da multiplicação.

Propriedade distributiva

O produto da multiplicação de um número inteiro pela soma (ou pela diferença) de outros números inteiros pode ser obtido multiplicando o primeiro número por cada uma das parcelas e adicionando (ou subtraindo) os resultados obtidos.

Fonte: Silveira (2022, p. 37, 43-44) adaptado. Disponível em: https://pnld.moderna.com.br/wp-content/uploads/2023/05/EDIT-Desafios-da-matematica-Matematica-7-ano.pdf

Observamos que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \cup \{0\}$, com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um anel, pois a propriedade IV) dada na Definição 1 não é satisfeita, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, não existe o elemento oposto $-n \in \mathbb{N}$.

Definição 2. Dizemos que A é um anel unitário se a operação de multiplicação possui elemento neutro, isto é, existe $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para todo $a \in A$.

Os conjuntos numéricos $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ são exemplos de anéis unitários.

Definição 3. A é um anel comutativo ou abeliano se a operação de multiplicação satisfaz a propriedade comutativa, isto é,

VII) $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer $a, b \in A$.

Observamos que, além das propriedades citadas na definição, o conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$, também admite a propriedade comutativa da multiplicação, o que caracteriza $(\mathbb{Z} +, \cdot)$ como um anel abeliano.

Definição 4. Um anel A é dito sem divisores de zero se dados $x,y \in A$ tais que

VIII) $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Definição 5. Um anel comutativo, unitário e sem divisores de zero é denominado domínio de integridade.

Definição 6: Um corpo é um domínio de integridade $(A, +, \cdot)$ tal que,

IX) para todo $x \in A$ não nulo, existe $y \in A$ satisfazendo $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Os conjuntos numéricos $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R} +, \cdot)$ são corpos com as operações usuais de adição e multiplicação, enquanto, o anel $(\mathbb{Z} +, \cdot)$ não é um corpo, pois, por exemplo, o elemento $2 \neq 0$ não é inversível em $\mathbb{Z}$, ou seja, não existe um número inteiro $x \in \mathbb{Z}$, tal que $2 \cdot x = 1$. Os únicos elementos inversíveis em $\mathbb{Z}$ são 1 e -1, sendo que seus inversos são eles próprios.

Observamos que em Hefez (2016), as propriedades i) a ix) são apresentadas com uma abordagem axiomática, ou seja, a partir desta lista de propriedades básicas das operações de adição e multiplicação, provam-se as demais propriedades dos números reais.

Assim, como observamos anteriormente, para os números inteiros em livros da educação básica também são elencadas propriedades que são satisfeitas pelos números reais (figura 2). Aqui não é citada a estrutura de corpo, porém, as propriedades estruturais do conjunto numérico $\mathbb{R}$, sendo a, b, e c números reais quaisquer.

Figura 2 – Sobre as propriedades dos números reais

- **Adição em $\mathbb{R}$**
  - Propriedade comutativa: $a + b = b + a$
  - Propriedade associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - Existência do elemento oposto: $a + (-a) = 0$
  - Existência do elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$
- **Multiplicação em $\mathbb{R}$**
  - Propriedade comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
  - Propriedade associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - Existência do elemento inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, com $a \neq 0$
  - Existência do elemento neutro: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
  - Propriedade distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Fonte: Silveira e Marques (2013, p. 26)

A terna $(\mathbb{Z}\ +,\cdot)$ ilustra um exemplo de anel, enquanto as ternas $(\mathbb{Q}, +,\cdot)$ e $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ ilustram conjuntos que recebem a denominação de uma estrutura algébrica de corpo. Esta nomenclatura não é utilizada na educação básica, porém, ao futuro professor de Matemática, estudante da licenciatura, é importante perceber que as propriedades dos conjuntos numéricos tratadas no ensino fundamental estão relacionadas com as estruturas algébricas definidas em cursos de Álgebra na graduação.

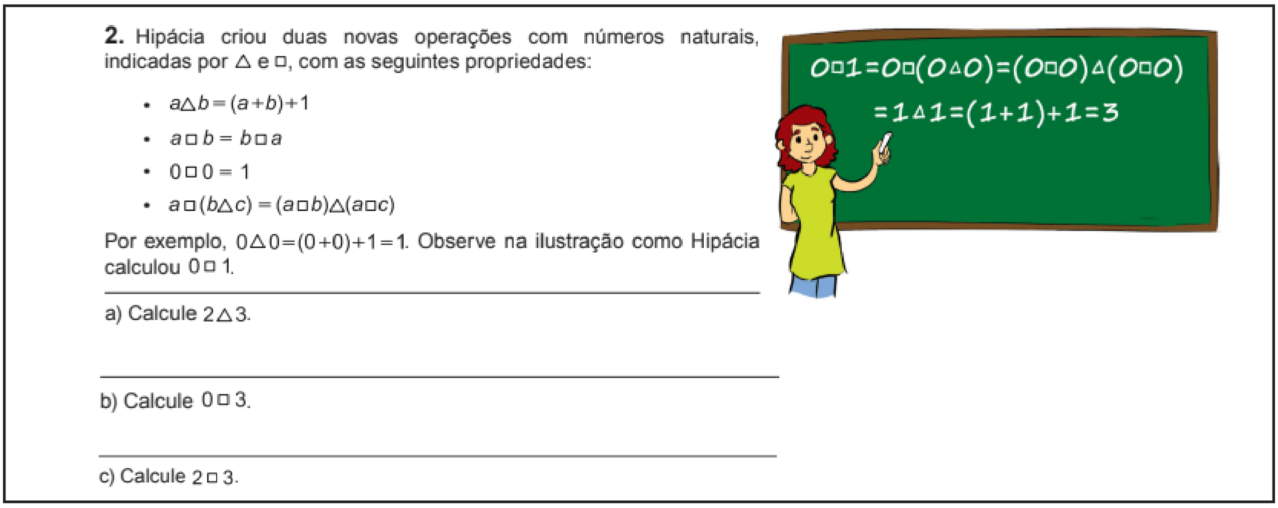
De acordo com Szabunia (2023), para que o professor tenha um conhecimento sólido, é relevante a "discussão sobre anéis e domínios euclidianos, ou seja, a comprovação de que é possível resgatar conhecimentos previamente adquiridos na Aritmética para ensinar a Álgebra" (p. 12).

Até o momento, utilizamos como operações binárias[1] as operações usuais de adição e multiplicação dos números naturais, inteiros, racionais e reais. No que segue, apresentamos exemplos de conjuntos em que são utilizadas operações não usuais.

Inicialmente, para ilustrar operações não usuais apresentamos uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática – OBMEP (figura 3). Esta questão foi aplicada na 2ª fase da OBMEP a alunos do Ensino Médio.

[1] Uma operação binária é uma função $f: A \times A \to A$

Figura 3 – Questão da OBMEP



2. Hipácia criou duas novas operações com números naturais, indicadas por $\triangle$ e $\square$, com as seguintes propriedades:

- $a \triangle b = (a+b)+1$
- $a \square b = b \square a$
- $0 \square 0 = 1$
- $a \square (b \triangle c) = (a \square b) \triangle (a \square c)$

Por exemplo, $0 \triangle 0 = (0+0)+1 = 1$. Observe na ilustração como Hipácia calculou $0 \square 1$.

a) Calcule $2 \triangle 3$.

b) Calcule $0 \square 3$.

c) Calcule $2 \square 3$.

Fonte: OBMEP/2013 – Questão 2 – Nível 3. Disponível em: https://www.obmep.org.br/provas.htm

A Questão 2 - OBMEP/2013 pode ser resolvida como segue:

a) Conforme as propriedades mencionadas,

$$2\Delta 3 = (2+3)+1 = 6.$$

b) Observamos que $3 = 1\Delta 1$. Logo,

$$0\square 3 = 0\square(1\Delta 1) = (0\square 1)\Delta(0\square 1)$$

No próprio enunciado da questão, observamos que $0 \square 1 = 3$. Com isso,

$$0\square 3 = (0\square 1)\Delta(0\square 1) = 3\Delta 3 = (3+3)+1 = 7$$

c) Neste caso, observamos que $2 = 0\Delta 1$ e, com isso,

$$2\square 3 = (0\Delta 1)\square 3 = (0\square 3)\Delta(1\square 3)$$

Aplicando, para isso, as propriedades destacadas no enunciado.

Conforme (b), $0\square 3 = 7$. Além disso,

$$1\square 3 = (0\Delta 0)\square 3 = (0\square 3)\Delta(0\square 3) = 7\Delta 7 = (7+7)+1 = 15$$

Logo,

$$2\square 3 = (0\square 3)\Delta(1\square 3) = 7\Delta 15 = (7+15)+1 = 23.$$

Visando maior apropriação das propriedades destacadas na Definição 1, no que segue definiremos duas novas operações em $\mathbb{Z}$ e mostraremos que, com tais operações, $\mathbb{Z}$ é um anel comutativo com unidade (figura 4).

Figura 4 – Anel comutativo com unidade com operações não usuais: $(\mathbb{Z}, *, T)$

A terna $(\mathbb{Z}, *, T)$ é um anel comutativo com unidade, com as operações $*$ e T, em $\mathbb{Z}$, definidas por

$$a * b = a + b - 1$$

e

$$aTb = a + b - ab.$$

Fonte: Autoras (2024)

Para tanto, utilizaremos todas as propriedades das operações usuais em $\mathbb{Z}$, as quais o tornam domínio de integridade.

Em geral, todas as propriedades do domínio de integridade $\mathbb{Z}$, com as operações usuais, são aplicadas banalmente, sem comentários acerca, o que ressalta a importância de exemplos como esse para estudar tais propriedades de maneira substancial.

Para mostrar que $(\mathbb{Z}, *, T)$, com as operações não usuais definidas, é um anel comutativo com unidade, vamos verificar que todas as propriedades destacadas na Definição 1 são válidas, além de que $\mathbb{Z}$ admite elemento neutro com relação a operação T (Definição 2), bem como, T é uma operação comutativa (Definição 3).

De fato, sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ quaisquer.

I) A adição $*$ é comutativa, pois

$$a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$$

II) Observamos que

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b - 1) * c = (a + b - 1) + c - 1 = a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a * (b + c - 1) = a * (b * c)\end{aligned}$$

Logo, vale a associatividade da operação $*$.

III) Se $a * x = a$ então $a + x - 1$. Logo, adicionando $-a$ a ambos os membros, obtemos $x - 1 = 0$ e, portanto, existe elemento neutro aditivo $x - 1 \in \mathbb{Z}$, tal que $a * 1 = a + 1 - 1 = a = 1 * a$.

IV) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, se $a * x = 1$ então $a + x - 1 = 1$. Portanto, existe $x = 2 - a \in \mathbb{Z}$ elemento oposto de a , tal que

$$a * (2 - a) = a + (2 - a) - 1 = 1 = (2 - a) * a.$$

V) A multiplicação T é associativa, pois

$$\begin{aligned}(aTb)Tc = (a + b - ab)Tc &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc \\ &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = aT(b + c - bc) = aT(bTc)\end{aligned}$$

VI) Valem as leis distributivas, uma vez que

$$\begin{aligned}(a * b)Tc = (a + b - 1)Tc &= (a + b - 1) + c - (a + b - 1)c \\ &= a + b - 1 + c - ac - bc + c = (a + c - ac) + (b + c - bc) - 1 \\ &= (a + c - ac) * (b + c - bc) = aTc * bTc\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que $aT(b * c) = aTb * aTc$.

Além disso, $(\mathbb{Z}, *, T)$ é anel comutativo, pois

$$aTb = a + b - ab = b + a - ba = bTa.$$

Seja $\in \mathbb{Z}$ qualquer. Então $aTy = a$ implica que $a + y - ay = a$ e, portanto $y - ay = 0$. Segue da distributividade de $\mathbb{Z}$ que $(1 - a)y = 0$. Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade e $a \in \mathbb{Z}$ é um elemento qualquer no anel, concluímos que $y = 0$. Ou seja, existe elemento unidade $0 \in \mathbb{Z}$, tal que

$$aT0 = a + 0 - a \cdot 0 = a.$$

No próximo exemplo, mostraremos que o conjunto dos números racionais, munido de duas operações não usuais, é um anel comutativo com unidade (figura 5).

Figura 5 – Anel comutativo com unidade com operações não usuais: $(\mathbb{Q} *, T)$

Consideremos $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, definimos as operações de adição

$$x * y = x + y - 3$$

e multiplicação

$$xTy = x + y - \frac{1}{3}xy.$$

Então $(\mathbb{Q}, *, T)$ é um anel.

Fonte: Zahn (2013, p. 109)

Da mesma forma que para o conjunto $(\mathbb{Z}, *, T)$, vamos provar que $(\mathbb{Q} *, T)$ satisfaz as propriedades I) – VIII), previstas nas definições 1, 2 e 3.

De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{Q}$ elementos quaisquer.

I) A adição é comutativa, pois

$$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x.$$

II) A adição é associativa uma vez que

$$(x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + (y + z - 3) - 3$$
$$= x * (y + z - 3) = x * (y * z).$$

III) Mostraremos que existe $e \in \mathbb{Q}$ tal que $e * a = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$. De fato, $e * a = e + a - 3 = a$, implica que $e = 3 \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro aditivo.

IV) Para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe elemento oposto $y \in \mathbb{Q}$. De fato, $x * y = 3$ implica que $x + y - 3 = 3$. Logo, $y = 6 - x \in \mathbb{Q}$.

V) A multiplicação é associativa, pois

$$xT(yTz) = xT\left(y + z - \frac{1}{3}yz\right) = \mathrm{x} + \left(y + z - \frac{1}{3}yz\right) - \frac{1}{3}\mathrm{x}\left(y + z - \frac{1}{3}yz\right)$$
$$= \left(x + y - \frac{1}{3}xy\right) + \mathrm{z} - \frac{1}{3}\left(x + y - \frac{1}{3}xy\right)\mathrm{z} = \left(x + y - \frac{1}{3}xy\right)Tz$$
$$= (xTy)Tz$$

VI) Valem as leis distributivas:

$$
\begin{aligned}
xT(y*z) = xT(y+z-3) &= x + (y+z-3) - \frac{1}{3}x(y+z-3) \\
&= \left(x + y - \frac{1}{3}xy\right) + \left(x + z - \frac{1}{3}xz\right) - 3 \\
&= \left(x + y - \frac{1}{3}xy\right) * \left(x + z - \frac{1}{3}xz\right) = xTy * xTz
\end{aligned}
$$

Analogamente, podemos verificar que $(y*z)Tx = (yTx) * (z\,Tx)$.

VII) A multiplicação T é uma operação comutativa uma vez que

$xTy = x + y - \frac{1}{3}xy = y + x - \frac{1}{3}yx = yTx.$

VIII) Finalmente, mostraremos que existe elemento unidade. Para isso, consideremos $x \in \mathbb{Q}$ tal que $aTx = a$, para qualquer $a \in \mathbb{Q}$. Assim, $a = aTx = a + x - \frac{1}{3}ax$ implica que $x - \frac{1}{3}ax = 0$. Logo, $x\left(1 - \frac{1}{3}a\right) = 0$ e, sendo $\mathbb{Q}$ um domínio de integridade e $a \in \mathbb{Q}$ um elemento qualquer, segue que $x = 0 \in \mathbb{Q}$ é elemento unidade.

Nos exemplos apresentados anteriormente, predomina a manipulação de regras, as quais servem para desenvolver o pensamento algébrico ao permitir que se possa verificar as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter uma estrutura de anel. Reforçamos que, tais propriedades em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ no ensino básico são comumente, admitidas como verdadeiras e/ou ilustradas por meio de alguns exemplos numéricos.

Nossa proposta é abordar exemplos direcionados a alunos de Matemática Licenciatura. No entanto, os exemplos das figuras 1 e 2 podem ser aplicados na educação básica, desde que sejam trabalhados exercícios prévios preparatórios, como os apresentados em Cocco e Tonet (2022). As autoras fazem o relato da aplicação da proposta didática elaborada aos alunos de uma escola do ensino fundamental, na qual a definição de corpo foi adaptada e aplicada na resolução de exercícios. Na oportunidade, os alunos se apropriaram da definição de elemento neutro e oposto como forma de resolver algumas equações contendo operações distintas das usuais.

Ressaltamos, também, a importância de se observar que o elemento neutro aditivo pode não ser zero, bem como a unidade pode não ser , trabalhando efetivamente com a definição de ambos. Esse tipo de situação pode ampliar a visão do aluno sobre o conteúdo, permitindo que ele explore, ou até mesmo perceba que existem outros tipos de operações, além da adição e multiplicação usuais.

Nesse sentido, ao abordar operações distintas, sentenças como “passar para o outro lado com sinal contrário” passa a não ter sentido, porque o oposto de um número pode não estar relacionado com o sinal dele.

4 RESOLVENDO EQUAÇÕES

As equações surgem naturalmente em problemas em que se deseja encontrar a solução – um número que não é conhecido. A resolução de uma equação em um determinado conjunto numérico envolve o uso de propriedades que são válidas naquele conjunto.

Para ilustrar, apresentamos na figura 6, um exemplo de uma equação em $\mathbb{Z}$.

Figura 6 – Exemplo de equação em $\mathbb{Z}$

Resolva, em $\mathbb{Z}$, a equação $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

Fonte: Giovani e Bonjorno (1992, p. 203)

Inicialmente, por meio da propriedade distributiva VI) da multiplicação com relação à adição da Definição 1, temos que

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = 0$$

Conforme a propriedade VIII) da Definição 4, segue que

$x - 1 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$.

Suponhamos que $x - 1 = 0$. Adicionando o oposto de -1 a ambos os membros, obtemos

$$x - 1 + 1 = 0 + 1$$

Como 0 ∈ $\mathbb{Z}$ é elemento neutro aditivo (propriedade III)/Definição 1), então $x + 0 = 1$ e, portanto, $x = 1$.

Por outro lado, suponhamos que $x^2 - 1 = 0$. Observamos que

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$$

E, portanto, segue da Definição 4, propriedade VIII), que $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$. De maneira similar, concluímos que $x = 1$ ou $x - 1$.

Logo {−1, 1} é o conjunto solução da equação $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ em $\mathbb{Z}$.

Observamos que, na resolução da equação $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ foram aplicadas propriedades do conjunto dos números inteiros.

Vejamos, agora, a solução de uma equação com base em uma situação problema apresentada para o 8º ano do ensino fundamental (figura 7).

Figura 7 – Solução de um problema envolvendo equação

Vilma, professora de Português, perguntou a Eliane, professora de Matemática:
— Quantos alunos há na 8ª série A?
Eliane respondeu, de modo enigmático:
— A terça parte do número de alunos mais 5 é igual à metade do número de alunos menos 1.
Vamos ajudar a professora Vilma a descobrir qual é esse número?

Se **x** representa o número de alunos, a equação que representa essa situação é dada por:

$$\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{2} - 1.$$

Para resolvê-la, vamos usar um velho conhecido: o mmc. Lembra-se dele?
Como mmc(3, 2) = 6, multiplicamos ambos os membros por 6. Assim:

$$6 \cdot \left(\frac{x}{3} + 5\right) = 6 \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$^{2}\cancel{6} \cdot \frac{x}{_{1}\cancel{3}} + 30 = {}^{3}\cancel{6} \cdot \frac{x}{_{1}\cancel{2}} - 6$$

$$2x + 30 = 3x - 6 \quad \text{(Subtraímos 3x de ambos os membros.)}$$

$$2x - 3x + 30 = 3x - 3x - 6$$

$$-x + 30 = -6 \quad \text{(Subtraímos 30 de ambos os membros.)}$$

$$-x = -6 - 30$$

$$-x = -36 \quad \text{(Multiplicamos ambos os membros por −1.)}$$

$$x = 36$$

Logo, há 36 alunos na 8ª série **A** da professora Eliane.

Fonte: Dante (2002, p. 38-39)

Na resolução da situação problema, inicialmente foi estabelecida a equação algébrica que a representa. Após, observamos o uso correto das operações algébricas ao subtrair $3x$ e depois 30 e ao multiplicar por -1 ambos os membros da equação, bem como ao utilizar as propriedades de elemento oposto e elemento neutro.

No entanto, encontramos exemplos em que o termo “passar para o outro lado” ainda é utilizado, como o apresentado na figura 8.

Figura 8 – Solução de um problema envolvendo equação algébrica

- Vamos reduzir a equação $3x - 5 = x + 7$ à forma $ax = b$.

$3x - 5 = x + 7$

$3x - x = 7 + 5$ Passamos x para o 1º membro e -5 para o 2º membro.

$2x = 12$

Fonte: Silveira e Marques (2017, p. 109)

A experiência didática dos autores permite afirmar que, alunos oriundos da educação básica, quando já no nível superior, relatam dificuldades e angústias relacionadas ao ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática no decorrer de sua formação inicial. Atalhos similares ao exemplificado na figura 8, são comumente abordados e não auxiliam na compreensão efetiva do conteúdo, tornando-se um fator de dificuldade no decorrer dos estudos em outras disciplinas. Em cursos avançados, quando generalizamos as operações para além das usuais, essas simplificações se tornam um obstáculo ao entendimento e aplicação das propriedades envolvidas. Sendo assim, é importante, que ao tratar dos conjuntos numéricos, seja enfatizado o uso correto de suas propriedades.

Para finalizar, vamos considerar o enunciado de uma equação com operações não usuais (figura 9).

Figura 9 – Equação $10Tx * \frac{1}{2} = 4$

Resolva, em $(\mathbb{Q}, *, T)$, a equação $$10Tx * \frac{1}{2} = 4$$ em que $*$ e T são as operações definidas por $x * y = x + y - 3$ e $xTy = x + y - \frac{1}{3}xy$.

Fonte: Autoras (2024)

Inicialmente, conforme o exemplo ilustrado na figura 5, observamos que o elemento oposto de $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ é dado por $y = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$. Assim, adicionando $y = \frac{11}{2}$ em ambos os membros da equação $10Tx * \frac{1}{2} = 4$, obtemos

$$10Tx * \frac{1}{2} * \frac{11}{2} = 4 * \frac{11}{2}$$

$$10Tx * 3 = 4 + \frac{11}{2} - 3$$

$$10Tx = \frac{13}{2}$$

Uma vez que $3 \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro da operação $*$. Para obtermos o valor de x, precisamos calcular o inverso de $10 \in \mathbb{Q}$. Observamos que $0 \in \mathbb{Q}$ é a unidade deste anel. Logo, $a \in \mathbb{Q}$ é inverso de 10 se, e somente se,

$$10Ta = 0$$

$$10 + a - \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot a = 0$$

$$a - \frac{10}{3}a = -10$$

$$\frac{-7}{3}a = -10$$

E, portanto, $a = \frac{30}{7}$. Assim, multiplicando ambos os membros da equação $10Tx = \frac{13}{2}$ por $\frac{30}{7}$, obtemos

$$\frac{30}{7}T(10Tx) = \frac{30}{7}T\frac{13}{2}$$

$$\left(\frac{30}{7}T10\right)Tx = \frac{30}{7} + \frac{13}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{7} \cdot \frac{13}{2}$$

$$0Tx = x = \frac{3}{2}$$

Poderíamos nos perguntar se qualquer equação nesse anel tem solução. A resposta é sim, pois para todo $a \in \mathbb{Q}$, tal que $a \neq 3$, $aTy = 0$, implica que $y = \frac{3a}{a-3}$.

De fato,

$$aTy = 0$$

$$a + y - \frac{1}{3}ay = 0$$

$$a + \left(1 - \frac{1}{3}a\right)y = 0$$

$$\left(\frac{3-a}{3}\right)y = -a$$

$$y = \frac{-3a}{3-a} = \frac{3a}{a-3}$$

Ou seja, todo elemento não nulo no anel possui inverso multiplicativo e, portanto, $(\mathbb{Q}*, T)$ é corpo.

Destacamos que não é possível resolver o exercício ilustrado na figura 9 mediante aplicação de macetes, uma vez que o elemento neutro e o oposto não são usuais.

Exemplos como estes nos permitem compreender melhor o significado de uma equação e o papel que as variáveis desempenham na mesma. No exemplo ilustrado na figura 9, o aluno poderá ser instigado a pensar nos elementos inverso e oposto necessários para a resolução da equação, na medida em que, sob operações usuais em $\mathbb{Q}$, tal procedimento seria realizado de modo direto, sem necessidade de reflexões mais aprofundadas. Neste exemplo, expressões usuais como passar para o outro lado com sinal contrário não conduzem a resolução adequada do mesmo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta, nesse artigo, consistiu em conectar as propriedades dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e a resolução de equações, por meio de exemplos de conteúdos, presente na grade curricular da educação básica, a alguns tópicos estudados em disciplinas de Álgebra na graduação.

Observamos que, nas pesquisas de Souza (2008), Mondini e Bicudo (2010), Ribeiro (2015) e Ribeiro e Curi (2021), são apontadas as dificuldades apresentadas pelos graduandos de licenciatura em disciplinas de Álgebra, principalmente no que se refere a sua aplicabilidade na educação básica.

Neste cenário, apresentamos neste artigo uma proposta concreta relacionando tópicos sobre anéis e grupos aos conteúdos abordados no ensino fundamental e médio. A partir dos exemplos elaborados é possível que o aluno perceba que as propriedades dos conjuntos numéricos tratadas no ensino fundamental estão relacionadas com as estruturas algébricas definidas em cursos de Álgebra na graduação e que, embora o conceito de anel não esteja diretamente associado a educação básica, pode envolver tópicos pertinentes a esse nível.

Propomos uma abordagem para as disciplinas de Álgebra de cursos de licenciatura em Matemática que relacionem, sempre que possível, os tópicos arrolados em sua ementa aos conteúdos que os futuros professores de Matemática lecionarão. Com isso, pensamos ser possível contribuir com a diminuição dos índices de evasão e/ou reprovação da disciplina, melhorando a aceitação da mesma pelos graduandos e ajudando no ensino dos tópicos relacionados com a educação básica.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, 2018.

BUSSMANN, C. J. C.; SAVIOLI, Â. M. P. D. A Álgebra no Ensino Superior e no Ensino Fundamental e Médio: existe Conexão? In: EBRAPEM - ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12.,2008, Rio Claro. **Anais**[...] Rio Claro: SBEM, 2008, p. 1-11. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/79-1-A-gt1_bussmann_ta.pdf. Acesso em: 15 set. 2018.

COCCO, I. M.; TONET, L. G. Uma adaptação da definição de corpo para o ensino fundamental: resolução de equações por meio dos elementos neutro e oposto. **Revista do Professor de Matemática online** (PMO), v.10, n.1, p. 48-64, 2022. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2022/02/art4_vol10_PMO_SBM_2022.pdf Acesso em 11 dez. 2023.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 8º ano. São Paulo: Ática, 2002.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

GIOVANI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática 3**. São Paulo: Editora FTD, 1992.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra.** 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA/CNPq, 2016 (Coleção Matemática Universitária).

MONDINI, F.; BICUDO, M. A. V. A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. **Acta Scientiae**, v. 12, n.2, p. 43-54, 2010. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/34 Acesso em: 17 ago. 2018.

OXFORD. **Oxford Languages and Google**, 2024. Disponível em: https://www.google.com.br/search?q=%C3%A1lgebra±significado

PIRES, F. de S. **Álgebra e Formação Docente:** O que dizem os futuros professores de Matemática. 2012. 138 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

RIBEIRO, A. J. A Álgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: Encontros e desencontros na visão dos professores. In: XIV CIAEM – CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]** Tuxtla Gutiérrez: CIAEM, 2015, p. 1-9. Disponível em: https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1484/606 Acesso em: 19 mai. 2025.

RIBEIRO, A. J.; CURI, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. 2 ed. São Paulo: Autêntica, 2021 (Coleção de Tendências em Educação Matemática.)

SILVEIRA, Ê. **Desafios da Matemática**. 7º ano. São Paulo: Moderna, 2022.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. **Matemática Compreensão e Prática**. 7º ano. São Paulo: Moderna, 2017.

SILVEIRA, Ê; MARQUES, C. **Matemática Compreensão e Prática**. 8º ano. São Paulo: Moderna, 2013.

SOUZA, S. A. O Ensino de Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática. **Videtur** (USP), v. 7, p. 23-26, 2004. Disponível em: http://www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm Acesso em: 23 de maio de 2024.

SZABUNIA, V. K. Aritmética e Álgebra no ensino básico: explorando,correlações com a teoria de anéis. 2023. 155 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/ PROFMAT) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2023.

VIERA, V. L. **Álgebra Abstrata para a Licenciatura**. 2. ed. Campina Grande: EduEpb, 2015.

ZAHN, M. **Introdução à Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2013.

Contribuição de Autoria

1 – Luciane Gobbi Tonet

Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
https://orcid.org/0000-0002-2434-2588 • lucianegobbi@yahoo.com.br
Contribuição: Conceituação, Coleta de dados, Análise de dados, Metodologia, Investigação, Validação, Escrita — revisão e edição

2 – Tauana Dambrós

Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física pela Universidade Federal de Santa Maria
https://orcid.org/0000-0001-8016-9719 • tauanadambros@gmail.com
Contribuição: Conceituação, Coleta de dados, Análise de dados, Metodologia, Investigação, Validação, Escrita – primeira redação, Escrita - revisão e edição

3 – Janice Rachelli

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana
https://orcid.org/0000-0002-1422-1838 • janice.rachelli@ufsm.br
Contribuição: Coleta de dados, Análise de dados, Metodologia, Investigação, Validação, Escrita - revisão e edição

Como citar este artigo

TONET, L. G.; DAMBRÓS, T.; RACHELLI, J. Relações entre a Álgebra do ensino superior e da educação básica: o conceito de anel e a resolução de equações. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 47, e88165, 2025. DOI 10.5902/2179460X88165. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X88165.