

Matemática

O Teorema de Pick em reticulados bidimensionais

Pick's Theorem in two-dimensional lattices

Eleonesio Strey^I , Suzana Carletti Machado^{II} ,
Giselle Ribeiro de Azeredo Silva Strey^{III} 

^IUniversidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil

^{II}Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil

^{III}Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, ES, Brasil

RESUMO

Neste artigo é apresentada uma generalização do Teorema de Pick, a qual estabelece uma expressão para a área de polígonos simples cujos vértices são pontos de um reticulado bidimensional arbitrário, em termos do determinante e do número de pontos do reticulado que pertencem ao interior e à borda do polígono.

Palavras-chave: Teorema de Pick; Áreas de polígonos; Reticulados

ABSTRACT

In this article, a generalization of Pick's Theorem is presented, which establishes an expression for the area of simple polygons whose vertices are points of an arbitrary two-dimensional lattice, in terms of the determinant and the number of lattice points inside the polygon and on its boundary.

Keywords: Pick's Theorem; Polygon areas; Lattices

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Pick, publicado em 1899 por Georg Alexander Pick (1859-1942), estabelece uma forma simples, e muito elegante, para determinar a área de um polígono cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras, Pick (1899) e Lima (2012). De forma específica, o teorema afirma que se P é um polígono simples no plano cartesiano, I é o número de elementos de \mathbb{Z}^2 no interior de P e B é o número de elementos de \mathbb{Z}^2 que pertencem à borda de P , então a área de P é dada pela expressão

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Segundo Hermes (2015), inicialmente este resultado não recebeu muita atenção, mas foi popularizado quando o matemático polonês Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972) o incluiu na edição de 1969 de seu livro *Mathematical Snapshots*, Steinhaus (1969). A beleza deste resultado decorre de sua simplicidade e profundidade, uma vez que pode ser tanto apresentado para estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio como explorado por matemáticos e outros pesquisadores na busca por generalizações e aplicações.

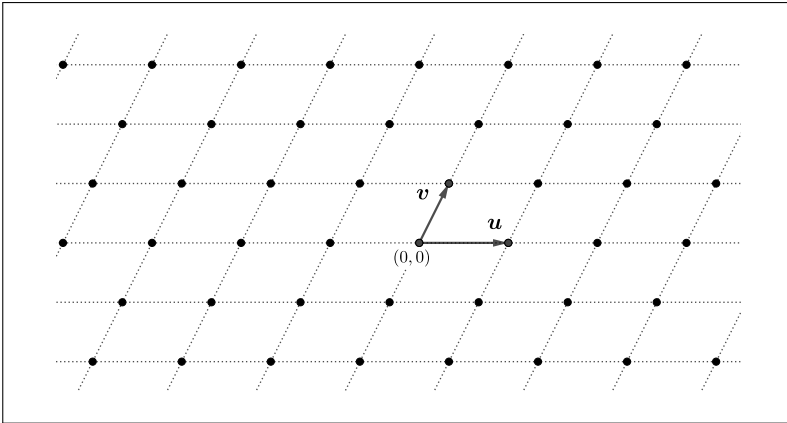
Na Seção 2 é apresentada uma generalização do Teorema de Pick, a qual estabelece uma expressão para a área de polígonos simples cujos vértices pertencem a um reticulado bidimensional arbitrário, e não somente ao Reticulado \mathbb{Z}^2 como na versão clássica, em termos do número de elementos do reticulado que pertencem ao interior e à borda do polígono e, também, do determinante do reticulado (Teorema 1). Este resultado é enunciado em Scott (2006). Casos particulares, diferentes do clássico, são abordados em Ren & Reay (1987). A partir do Teorema de Pick generalizado pode-se, por exemplo, mostrar que a área de um hexágono regular de lado ℓ é dada por $3\ell^2\sqrt{3}/2$ (Exemplo 1).

2 O TEOREMA DE PICK

Um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é dito um *reticulado* (bidimensional) se existirem vetores linearmente independentes u e v de modo que ele seja constituído pelas combinações lineares inteiras de u e v , ou seja, $\Lambda = \{au + bv; a, b \in \mathbb{Z}\}$, Conway & Sloane (2013). Neste caso, o conjunto $\{u, v\}$ é denominado uma *base* de Λ . Na Figura 1

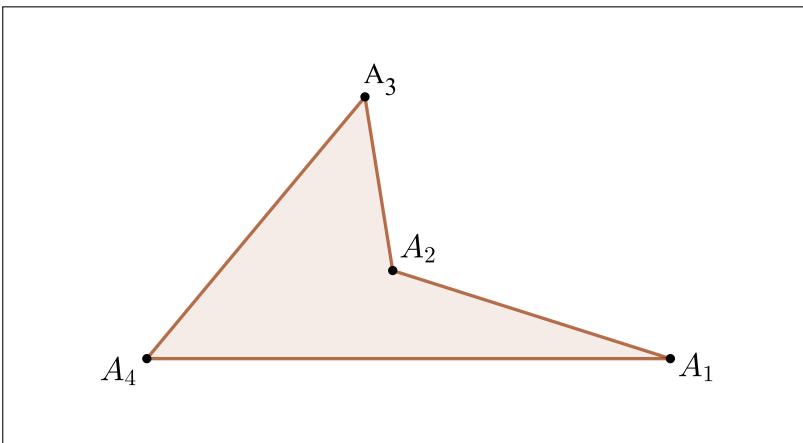
encontra-se ilustrado o reticulado Λ gerado pela base $\{\mathbf{u} = (3, 0), \mathbf{v} = (1, 2)\}$, isto é, $\Lambda = \{(3a + b, 2b); a \text{ e } b \text{ são inteiros}\}$.

Figura 1 – Reticulado gerado pela base $\{\mathbf{u} = (3, 0), \mathbf{v} = (1, 2)\}$



Fonte: autores (2024)

Figura 2 – Polígono simples



Fonte: autores (2024)

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n , com $n \geq 3$, pontos distintos no plano cartesiano. A região delimitada pela lista de segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 , incluindo eles, é denominada um *polígono simples*, desde que quaisquer dois segmentos dessa lista que tenham uma extremidade comum não estejam contidos na mesma reta e, exceto possivelmente em suas extremidades, nenhum par de segmentos se intersecta. Os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ e os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados de *lados* e *vértices* do polígono, respectivamente. Dado um polígono simples P contendo quatro ou mais vértices, um segmento que conecta dois vértices não adjacentes é

denominado uma *diagonal* de P se ele está contido em P e não contém outro vértice de P . Na Figura 2 encontra-se ilustrado um polígono simples que possui quatro vértices, o segmento A_2A_4 é uma diagonal de P enquanto que A_1A_3 não é uma diagonal.

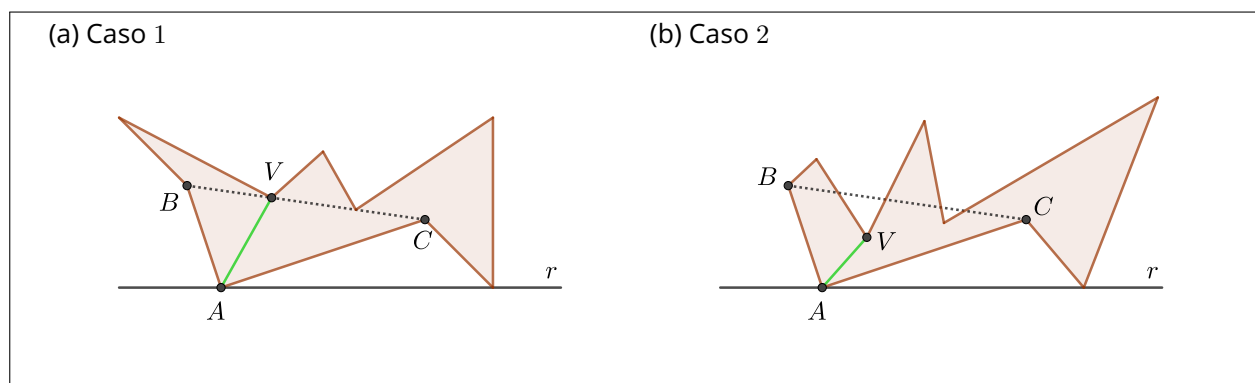
O resultado a seguir garante que todo polígono simples que tem, no mínimo, quatro vértices possui uma diagonal.

Lema 1. *Todo polígono simples cujo número de vértices é estritamente maior do que três possui uma diagonal.*

Demonstração. Sejam $k \geq 4$ um inteiro, P um polígono cujos vértices são $A_1(x_1, y_1), \dots, A_k(x_k, y_k)$ e r a reta horizontal $y = \min\{y_i; 1 \leq i \leq k\}$. Não existem vértices de P abaixo da reta r (Figura 3). Sejam A um vértice de P que pertence à reta r e B e C os vértices de P que são adjacentes ao vértice A . Se o segmento BC é uma diagonal de P , tem-se o resultado. Resta, então, analisar o caso em que BC não é uma diagonal de P . Se não existem vértices de P no interior do triângulo ABC e V é um vértice qualquer de P que pertence ao segmento BC , então o segmento AV é uma diagonal de P (Figura 3a). Se, porém, existem vértices de P no interior do triângulo ABC e V é um vértice de P no interior do triângulo cuja ordenada é a menor dentre todas as possibilidades, então o segmento AV é uma diagonal de P (Figura 3b).

□

Figura 3 – Existência de uma diagonal

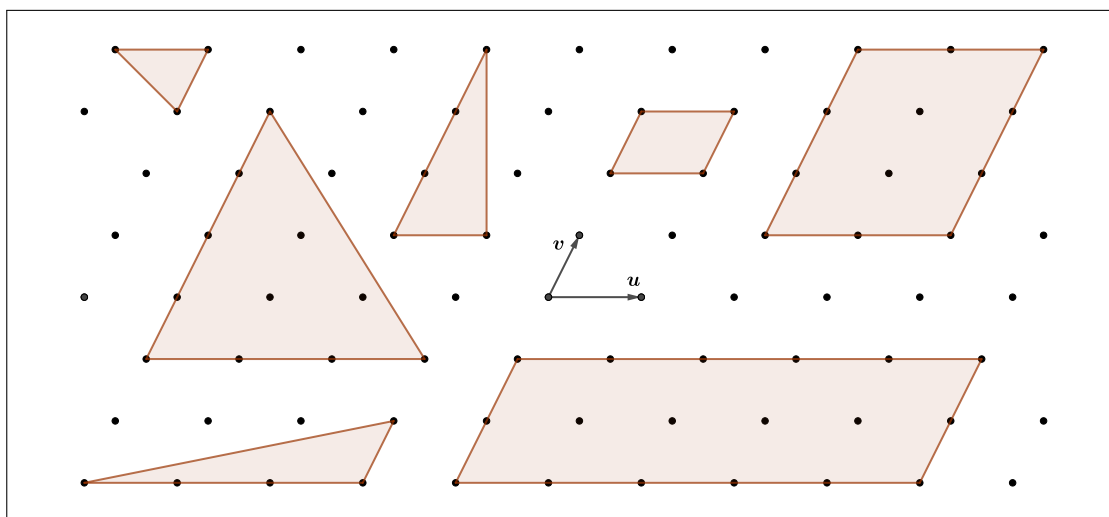


Fonte: autores (2024)

Os próximos resultados constituem uma generalização do Teorema de Pick. A demonstração apresentada é uma adaptação da prova da versão clássica, disponível

em Meneses (2016), que utiliza a segunda forma do princípio de indução finita, Santos (1998). A indução será feita sobre o número de vértices. A primeira parte da demonstração, isto é, a prova de que o resultado é válido para polígonos cujo número de vértices é igual a 3 (ou seja, triângulos), será dividida em três partes (Lemas 2, 3 e 4). Inicialmente prova-se que o resultado é válido para os casos em que o polígono é um triângulo com um de seus lados paralelo ao vetor u e outro lado paralelo ao vetor v ou um paralelogramo cujos lados são paralelos aos vetores mencionados (Figura 4). Em seguida, prova-se que o resultado é válido para qualquer triângulo cujos vértices pertencem ao reticulado (Lema 4). Por fim, é abordado o caso geral, isto é, prova-se que o resultado é válido para qualquer polígono simples cujos vértices pertencem ao reticulado (Teorema 1).

Figura 4 – Triângulos e paralelogramos com lados paralelos aos vetores u e v



Fonte: autores (2024)

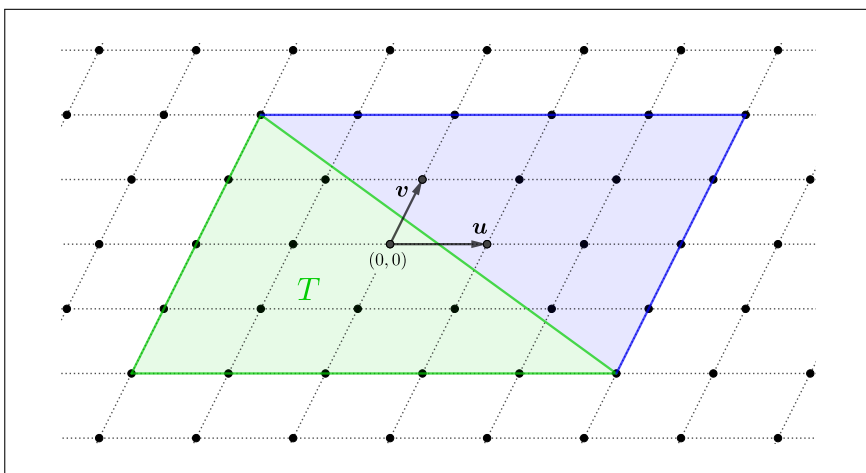
Lema 2. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)\}$ e T um triângulo cujos vértices pertencem a este reticulado. Se um dos lados de T é paralelo ao vetor u e outro lado ao vetor v , então a área de T é dada por*

$$A(T) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right),$$

em que B_T é o número de pontos do reticulado sobre a borda e I_T é o número de pontos do reticulado no interior de T .

Demonstração. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)\}$ e T um triângulo que satisfaz as condições mencionadas, em que as medidas dos lados paralelos aos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são $a\|\mathbf{u}\|$ e $b\|\mathbf{v}\|$, respectivamente. Na descrição anterior, a e b são inteiros, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ e $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Para o Triângulo T ilustrado na Figura 5, por exemplo, tem-se $a = 5$ e $b = 4$. Considere o paralelogramo R , com lados paralelos aos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , obtido a partir de T (Figura 5) e denote por I_T o número de pontos do reticulado que estão no interior de T , h o número de pontos do reticulado que pertencem ao terceiro lado de T e que estão no interior de R e B_T o número de pontos do reticulado que pertencem aos lados de T .

Figura 5 – Paralelogramo R



Fonte: autores (2024)

O número de pontos do reticulado no interior de R é igual a $(a - 1)(b - 1)$, pois os pontos estão dispostos em $b - 1$ fileiras paralelas ao vetor \mathbf{u} , cada uma contendo $a - 1$ pontos. Assim, $I_T = [(a - 1)(b - 1) - h]/2$. Por outro lado, tem-se $B_T = a + b + h + 1$. Logo,

$$\frac{B_T}{2} + I_T - 1 = \frac{(a + b + h + 1)}{2} + \frac{(a - 1)(b - 1) - h}{2} - 1 = \frac{ab}{2}.$$

Portanto, a área de T é dada por

$$A(T) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} au_1 & au_2 \\ bv_1 & bv_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{ab}{2} \right) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right).$$

□

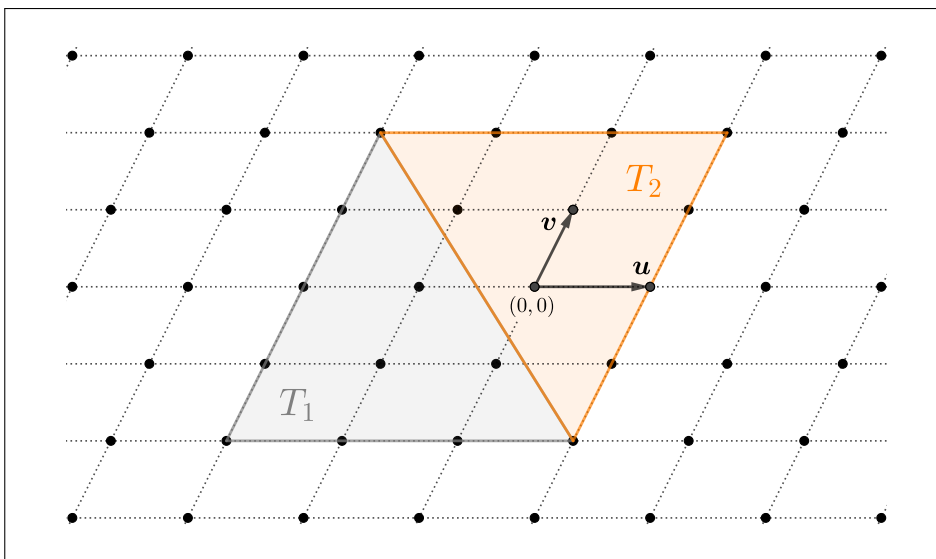
Lema 3. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)\}$ e R um paralelogramo cujos vértices pertencem a este reticulado. Se R tem lados paralelos aos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , então a área de R é dada por

$$A(R) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right),$$

em que B_R é o número de pontos do reticulado sobre a borda e I_R é o número de pontos do reticulado no interior de R .

Demonstração. Sejam T_1 e T_2 os triângulos obtidos ao traçar uma diagonal de R (Figura 6). Cada um destes triângulos tem um lado paralelo ao vetor \mathbf{u} e outro lado paralelo ao vetor \mathbf{v} .

Figura 6 – Paralelogramo R e Triângulos T_1 e T_2 .



Fonte: autores (2024)

Para cada $i \in \{1, 2\}$, denote por I_i e B_i o número de pontos de Λ no interior e sobre os lados de T_i , respectivamente. Seja k o número de pontos de Λ que pertencem simultaneamente ao lado comum de T_1 e T_2 e ao interior de R . Dessa forma, tem-se $I_R = I_1 + I_2 + k$ e $B_R = (B_1 - k) + (B_2 - k) - 2 = B_1 + B_2 - 2k - 2$. Como a área de R é igual a soma das áreas de T_1 e T_2 e o resultado é válido para T_1 e T_2 (Lema 2),

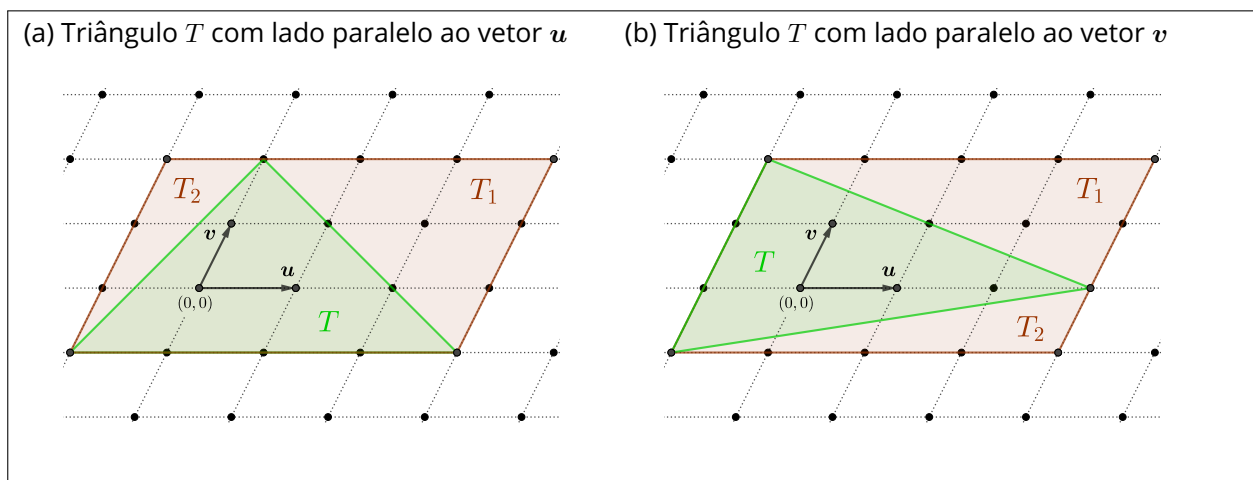
$$\begin{aligned}
 A(R) &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1 \right) + \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left[\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1 \right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1 \right) \right] \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_1 + B_2}{2} + I_1 + I_2 - 2 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_R + 2k + 2}{2} + I_R - k - 2 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Lema 4. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)\}$ e T um triângulo qualquer cujos vértices pertencem a este reticulado. Então, área de T é dada por*

$$A(T) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right),$$

em que B_T é o número de pontos do reticulado sobre a borda e I_T é o número de pontos do reticulado no interior de T .

Figura 7 – Paralelogramo R e triângulos T, T_1 e T_2



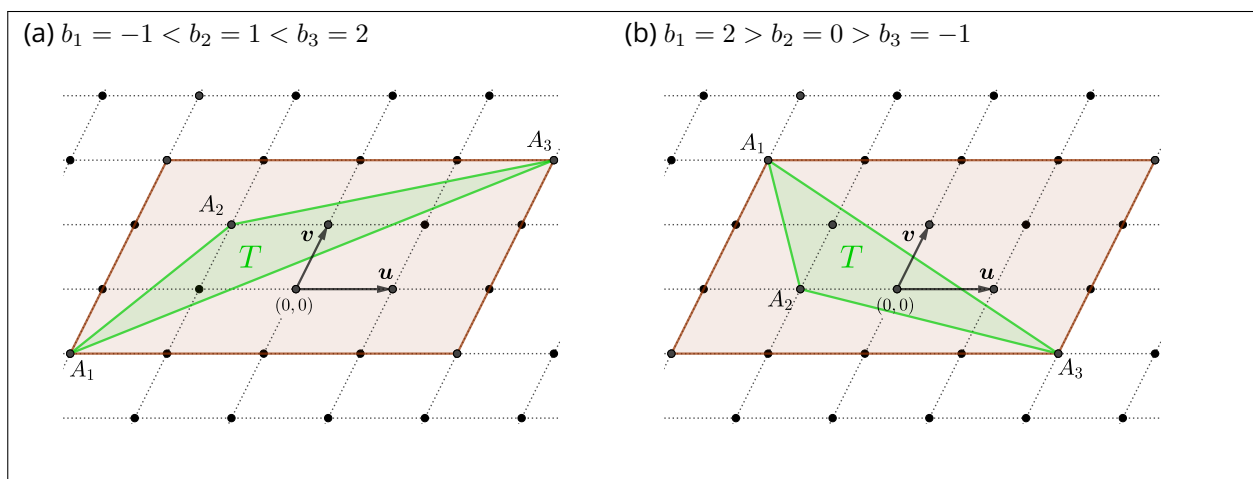
Fonte: autores (2024)

Demonstração. Seja T um triângulo qualquer cujos vértices pertencem ao reticulado Λ . Se T for um triângulo com um de seus lados paralelo ao vetor u e outro paralelo ao vetor v , tem-se o resultado desejado (Lema 2). Assim, restam dois casos para analisar. O primeiro deles é quando um lado do triângulo T é paralelo ao vetor u e nenhum lado é paralelo ao vetor v (Figura 7a) ou vice-versa (Figura 7b). Neste caso, considera-se o paralelogramo R , com lados paralelos aos vetores u e v , que tem como um de seus lados um dos lados o lado de T que é paralelo ao vetor u (Figura 7a) ou ao vetor v (Figura 7b), e o lado oposto a este contém um vértice de T (Figura 7). O paralelogramo R pode ser visto como a justaposição de T e outros dois triângulos, que serão denotados por T_1 e T_2 , cada um deles, por sua vez, contendo um lado paralelo ao vetor u e outro lado paralelo ao vetor v . Denote por ℓ o número de pontos do reticulado que pertencem ao lado comum de T e R . Nas Figuras 7a e 7b, por exemplo, tem-se $\ell = 5$ e $\ell = 4$, respectivamente. O número de pontos do reticulado que pertencem à união das bordas dos triângulos T_1 e T_2 é igual a $B_{T_1} + B_{T_2} - 1$, uma vez que elas têm exatamente um ponto comum. Assim, o número de pontos do reticulado que pertencem à união das bordas dos triângulos T_1, T_2 e T é igual a $(B_{T_1} + B_{T_2} - 1) + (\ell - 2)$. Como o número de pontos do reticulado que estão simultaneamente na borda de T e no interior de R é igual a $B_T - \ell - 1$, o número de pontos do reticulado sobre a borda de R é dado por $B_R = [(B_{T_1} + B_{T_2} - 1) + (\ell - 2)] - (B_T - \ell - 1) = B_{T_1} + B_{T_2} - B_T + 2\ell - 2$. Isto mostra que $B_T = B_{T_1} + B_{T_2} - B_R + 2\ell - 2$. Além disso, tem-se $I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_T + (B_T - \ell - 1)$, isto é, $I_R - I_{T_1} - I_{T_2} + \ell = B_T + I_T - 1$. Por outro lado, a área de R é igual a soma das áreas dos triângulos T, T_1 e T_2 , isto é, $A(R) = A(T) + A(T_1) + A(T_2)$ (ou seja, $A(T) = A(R) - A(T_1) - A(T_2)$) e o resultado é válido para T_1, T_2 e R (Lemas 2 e 3). Logo,

$$\begin{aligned}
 A(T) &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left[\left(\frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right) - \left(\frac{B_{T_1}}{2} + I_{T_1} - 1 \right) - \left(\frac{B_{T_2}}{2} + I_{T_2} - 1 \right) \right] \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(-\frac{B_{T_1} + B_{T_2} - B_R + 2\ell - 2}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} + \ell \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(-\frac{B_T}{2} + B_T + I_T - 1 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right).
 \end{aligned}$$

O segundo e último caso é quando nenhum dos lados de T é paralelo ao vetor u e nem ao vetor v . Este, por sua vez, será dividido em dois subcasos, os quais serão descritos mais adiante. Denote os vértices de T por A_1, A_2 e A_3 . Digamos que A_1, A_2 e A_3 estão localizados nos elementos $a_1u + b_1v, a_2u + b_2v$ e $a_3u + b_3v$ do reticulado, respectivamente. Como nenhum dos lados de T é paralelo ao vetor u e nem ao vetor v , tem-se $a_i \neq a_j$ e $b_i \neq b_j$, se $i \neq j$. Sem perda de generalidade, renomeando se necessário, podemos assumir que $a_1 < a_2 < a_3$. Inicialmente será analisado o subcaso $b_1 < b_2 < b_3$ ou $b_1 > b_2 > b_3$. Com efeito, seja R o paralelogramo, com lados paralelos aos vetores u e v , que tem o segmento A_1A_3 como uma de suas diagonais (Figura 8). Em símbolos, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq x \leq a_3 \text{ e } b_1 \leq y \leq b_3\}$, se $b_1 < b_2 < b_3$ (Figura 8a), ou $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq x \leq a_3 \text{ e } b_3 \leq y \leq b_1\}$, se $b_1 > b_2 > b_3$ (Figura 8b). Como, em ambos os casos, $a_1 < a_2 < a_3$ e b_2 está entre b_1 e b_3 , o ponto A_2 encontra-se no interior de R .

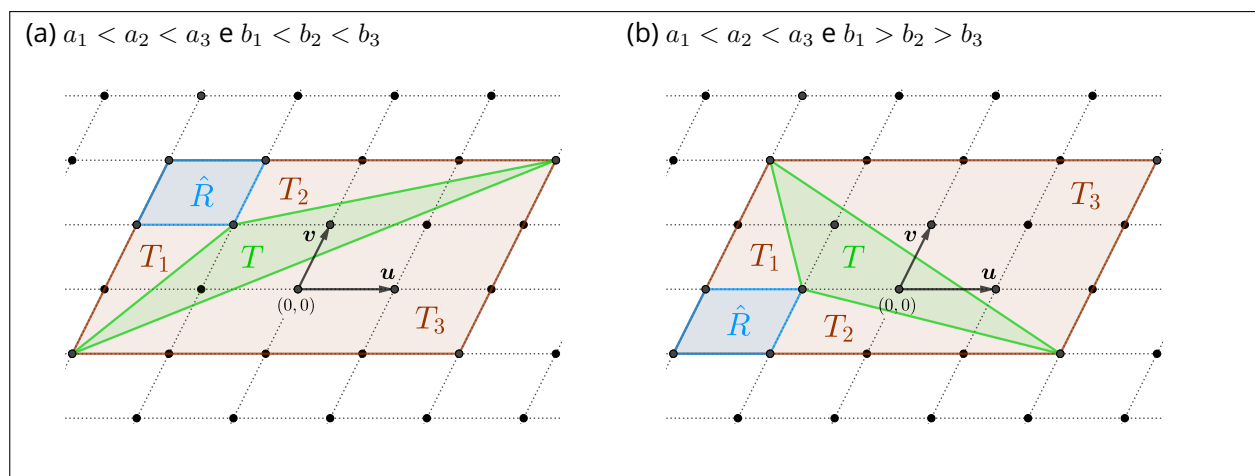
Figura 8 - $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2 \text{ e } -1 \leq y \leq 2\}$ e $a_1 = -2 < a_2 = 1 < a_3 = 2$



Fonte: autores (2024)

Assim, em ambos os casos, R pode ser visto como a justaposição de T , outros três triângulos T_1, T_2 e T_3 , cada um dos três com um lado paralelo ao vetor u e outro lado paralelo ao vetor v , e um paralelogramo \hat{R} com lados paralelos aos vetores mencionados (Figura 9).

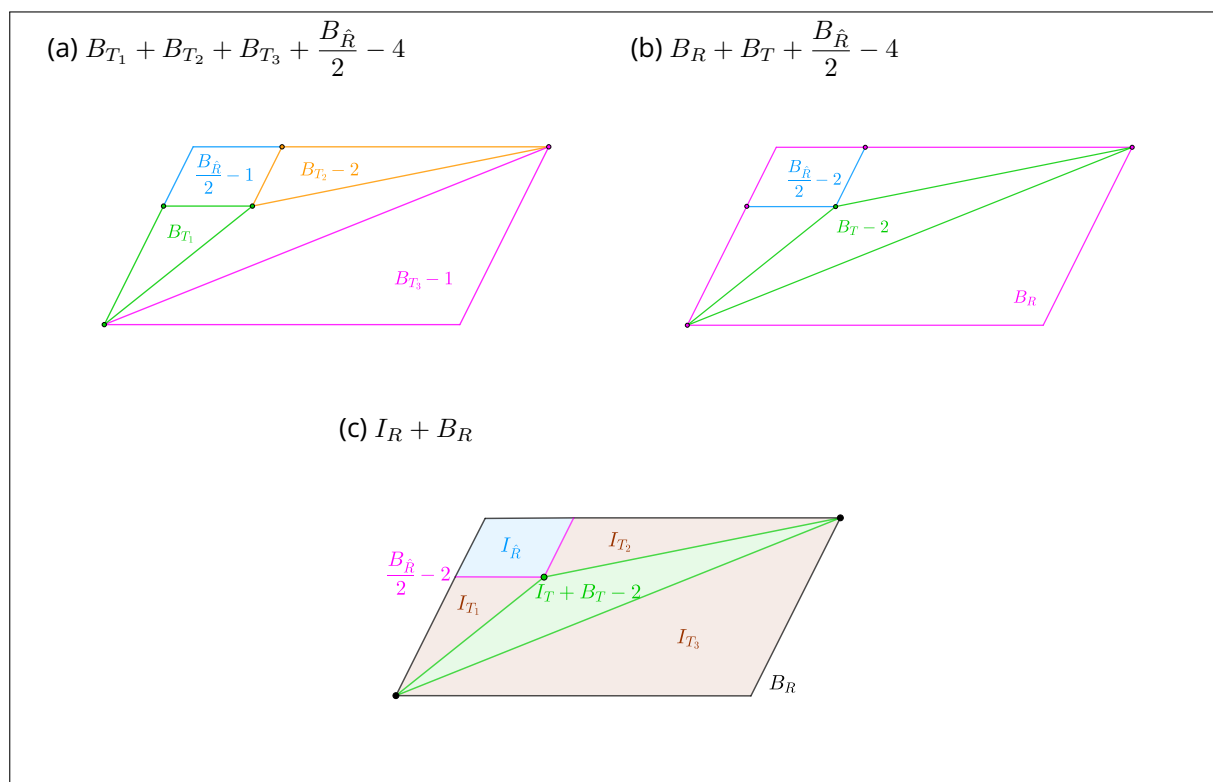
Figura 9 – Triângulo T sem lados paralelos aos vetores u e v (Subcaso 1)



Fonte: autores (2024)

O número de pontos do reticulado que pertencem à união das bordas dos triângulos T_1, T_2, T_3 e do paralelogramo \hat{R} é igual a $B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} + \frac{B_{\hat{R}}}{2} - 4$ (Figura 10a). Este número também é igual a $B_R + B_T + \frac{B_{\hat{R}}}{2} - 4$ (Figura 10b). Da igualdade $B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} + \frac{B_{\hat{R}}}{2} - 4 = B_R + B_T + \frac{B_{\hat{R}}}{2} - 4$, obtemos $B_T = B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_R$.

Figura 10 – Número de pontos do reticulado em cada uma das partes destacadas



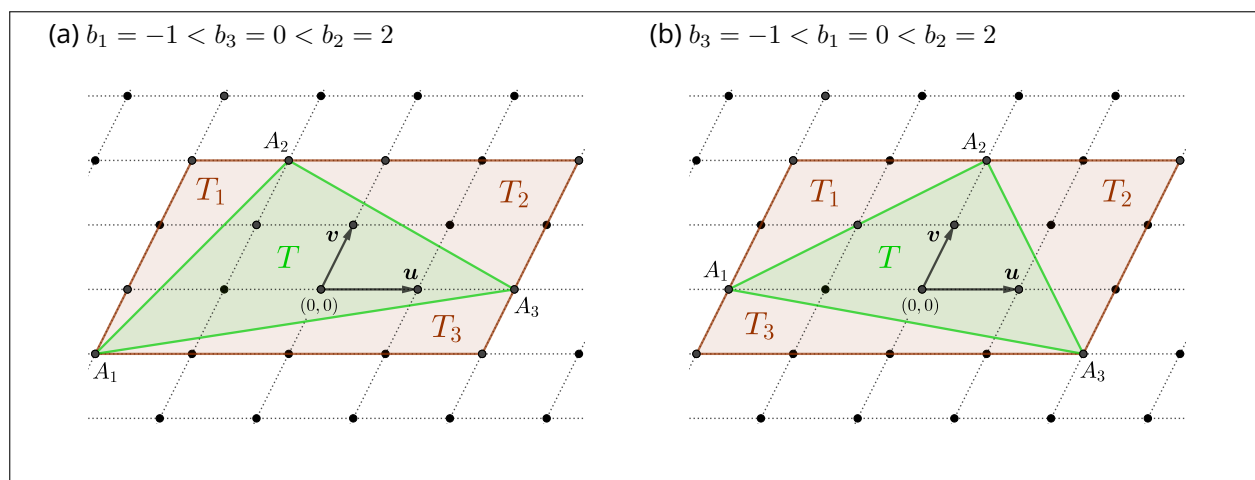
Fonte: autores (2024)

Além disso, o número de pontos do reticulado que pertencem ao paralelogramo R , $I_R + B_R$, é igual a $B_R + I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + (I_T + B_T - 2) + I_{\hat{R}} + (B_{\hat{R}}/2 - 2)$ (Figura 10c). Logo, $I_T + B_T = I_R - \left(I_{\hat{R}} + \frac{B_{\hat{R}} - 4}{2} + I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} \right) + 2$. Como o resultado é válido para T_1, T_2, T_3, R e \hat{R} (Lemas 2 e 3) e a área de T é igual a $A(T) = A(R) - A(\hat{R}) - \sum_{i=1}^3 A(T_i)$ (uma vez que a área de R é igual a soma das áreas de T, T_1, T_2, T_3 e \hat{R}), tem-se

$$\begin{aligned}
 A(T) &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left[\left(\frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right) - \left(\frac{B_{\hat{R}}}{2} + I_{\hat{R}} - 1 \right) - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{B_{T_i}}{2} + I_{T_i} - 1 \right) \right] \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2} + I_R - I_{\hat{R}} - \frac{B_{\hat{R}} - 4}{2} - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 1 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(-\frac{B_T}{2} + I_T + B_T - 2 + 1 \right) \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Por fim, o segundo subcaso é quando $b_1 < b_2$ e $b_2 > b_3$, ou $b_1 > b_2$ e $b_2 < b_3$. Se $b_1 < b_2$ e $b_2 > b_3$, denote por R o paralelogramo delimitado pela reta paralela ao vetor u que passa pelo ponto A_2 , pelas retas paralelas ao vetor v que passam pelos pontos A_1 e A_3 e pela reta paralela ao vetor u que passa pelo ponto A_1 , se $b_1 < b_3$ (Figura 11a), ou A_3 , se $b_1 > b_3$ (Figura 11b).

Figura 11 – Triângulo T sem lados paralelos aos vetores u e v (Subcaso 2)



Fonte: autores (2024)

Por construção, o paralelogramo R tem lados paralelos aos vetores u e v e pode ser visto como a justaposição do triângulo T e outros três triângulos T_1, T_2 e T_3 , cada um destes últimos com um lado paralelo ao vetor u e outro lado paralelo ao vetor v (Figura 11). O número de pontos do reticulado no interior de R é igual a $I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + (I_T + B_T - 3)$, a última parcela desta soma corresponde aos pontos que estão em T , com exceção dos três vértices. Assim, $I_T + B_T = I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 3$. Além disso, o número de pontos do reticulado sobre a união das bordas de T_1, T_2 e T_3 é igual a $B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - 3$ e o número de pontos do reticulado que pertencem à união das bordas de T_1, T_2 e T_3 e estão no interior de R é igual a $B_T - 3$. Logo, $B_R = (B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - 3) - (B_T - 3)$ e, conseqüentemente, $B_T = B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}$. Como o resultado é válido para T_1, T_2, T_3 e R (Lemas 2 e 3) e a área de T é dada por $A(T) = A(R) - \sum_{i=1}^3 A(T_i)$, tem-se

$$\begin{aligned} A(T) &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left[\left(\frac{B_R}{2} + I_R - 1 \right) - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{B_{T_i}}{2} + I_{T_i} - 1 \right) \right] \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2} + I_R - I_{T_1} - I_{T_2} - I_{T_3} + 2 \right) \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(-\frac{B_T}{2} + I_T + B_T - 3 + 2 \right) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_T}{2} + I_T - 1 \right). \end{aligned}$$

Se, porém, $b_1 > b_2$ e $b_2 < b_3$ a prova é análoga. Isto conclui a demonstração. □

Teorema 1 (Teorema de Pick em reticulados bidimensionais). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{u, v\}$ e P um polígono simples cujos vértices pertencem a este reticulado. Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, então a área de P é dada por*

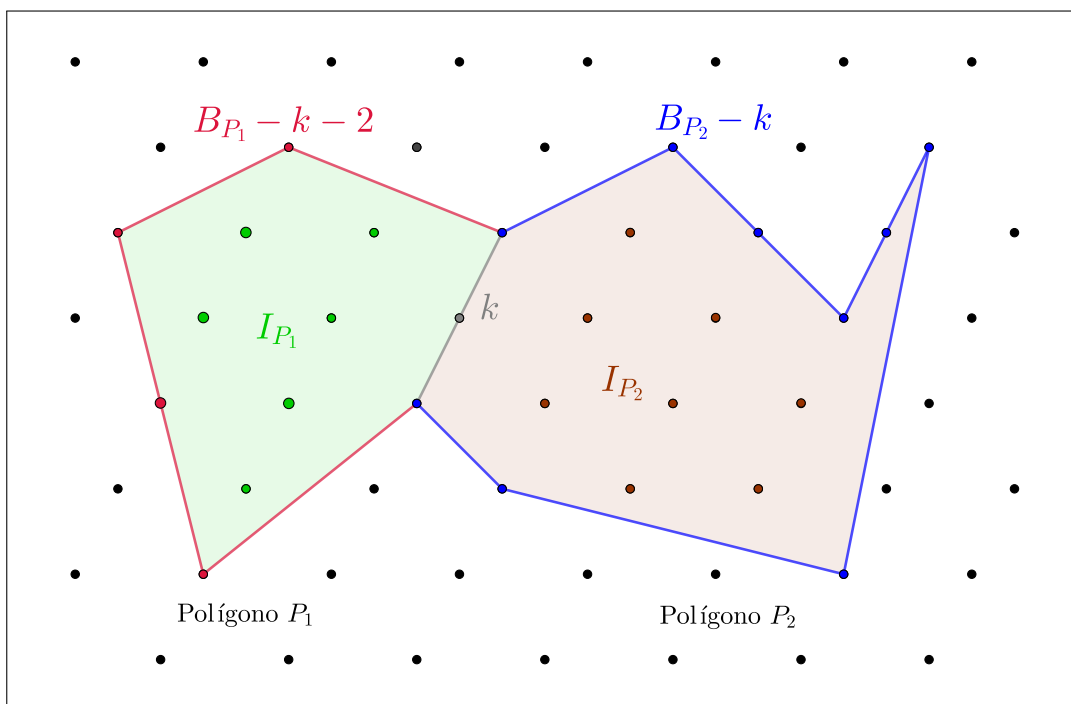
$$A(P) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B}{2} + I - 1 \right), \tag{1}$$

em que B é o número de pontos do reticulado sobre a borda e I é o número de pontos do reticulado no interior do polígono P .

Demonstração. A prova será feita por indução sobre o número de vértices do polígono. Se P é um polígono com três vértices (isto é, um triângulo), temos o resultado desejado (Lema 4). Agora, seja $n \geq 4$ e suponha que o resultado é válido para todos os polígonos cujo número de vértices é estritamente menor do que n . Seja P um

polígono simples com exatamente n vértices, digamos A_1, A_2, \dots, A_{n-1} e A_n (todos pertencentes ao reticulado). O Lema 1 garante que P possui uma diagonal. Isto implica que polígono P pode ser dividido em dois polígonos simples que possuem exatamente um lado comum, cada um deles contendo no máximo $n - 1$ vértices. Sejam P_1 e P_2 polígonos simples que gozam das propriedades descritas acima e cuja justaposição é o polígono P (Figura 12).

Figura 12 – Exemplo de um polígono P , com 10 vértices, particionado em dois polígonos P_1 e P_2 por uma de suas diagonais, destacando o número de pontos do reticulado em cada uma das "regiões"



Fonte: autores (2024)

Defina $B_{P_1}, B_{P_2}, I_{P_1}$ e I_{P_2} de forma similar ao que foi feito, por exemplo, na demonstração do Lema 3 e seja k o número de elementos do reticulado que estão no interior de P e sobre o lado comum de P_1 e P_2 (ou seja, sobre a diagonal do polígono P que foi utilizada para dividi-lo). Assim, o número de pontos do reticulado que pertencem à união das bordas de P_1 e P_2 é igual a $B_{P_1} + B_{P_2} - k - 2$. Logo, $B_P = (B_{P_1} + B_{P_2} - k - 2) - k = B_{P_1} + B_{P_2} - 2k - 2$, ou seja, $B_{P_1} + B_{P_2} = B_P + 2k + 2$. Além disso, $I_P = I_{P_1} + I_{P_2} + k$, isto é, $I_{P_1} + I_{P_2} = I_P - k$. Como a área de P é igual a $A(P) = A(P_1) + A(P_2)$ e, por hipótese de indução, o resultado é válido para P_1 e P_2 , tem-se

$$\begin{aligned}
A(P) &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_{P_1}}{2} + I_{P_1} - 1 \right) + \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_{P_2}}{2} + I_{P_2} - 1 \right) \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_{P_1} + B_{P_2}}{2} + I_{P_1} + I_{P_2} - 2 \right) \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_P + 2k + 2}{2} + I_P - k - 2 \right) \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{B_P}{2} + I_P - 1 \right).
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do teorema. □

O determinante que consta no lado direito da igualdade (1), a menos do sinal, é invariante por mudança de base. Isto nos permite definir o *determinante* de Λ , o qual é denotado por $\det(\Lambda)$, como sendo igual ao módulo do determinante de qualquer matriz cujas linhas formam uma base de Λ . Com essa notação, a igualdade (1) pode ser reescrita como

$$A(P) = \det(\Lambda) \cdot \left(\frac{B}{2} + I - 1 \right). \quad (2)$$

Vale ressaltar que em algumas referências (Conway & Sloane (2013), por exemplo) o determinante de Λ é definido como o determinante de uma “matriz de Gram” do reticulado, que para reticulados bidimensionais contidos em \mathbb{R}^2 corresponde ao quadrado do determinante de qualquer matriz cujas linhas formam uma base de Λ . Logo, se essa for a definição adotada, o termo $\det(\Lambda)$ da igualdade (2) dever ser substituído por $\sqrt{|\det(\Lambda)|}$.

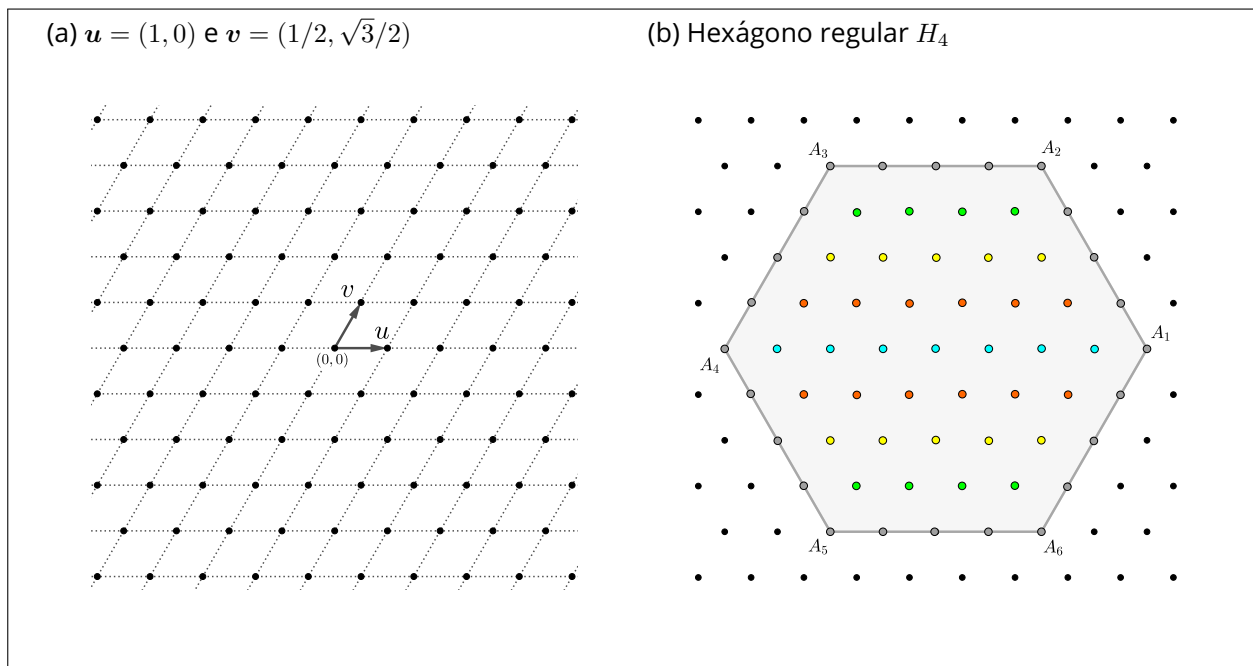
Corolário 1 (Teorema de Pick). *Sejam P um polígono simples cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras, I o número de elementos de \mathbb{Z}^2 no interior de P e B o número de elementos de \mathbb{Z}^2 que pertencem à borda de P . Então, a área de P é dada por*

$$A(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Demonstração. Como $\mathbb{Z}^2 = \{a(1, 0) + b(0, 1); a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ e os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são linearmente independentes, segue que \mathbb{Z}^2 é um reticulado, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{Z}^2 e, conseqüentemente, $\det(\mathbb{Z}^2) = 1$. Para concluir, basta aplicar o Teorema 1. □

Exemplo 1. Na Figura 13a encontra-se ilustrado o reticulado gerado pela base $\{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$. Este é conhecido como *reticulado hexagonal*, Conway & Sloane (2013).

Figura 13 – Reticulado hexagonal



Fonte: autores (2024)

Considere, neste exemplo, o reticulado hexagonal e o hexágono regular H_4 de lado $\ell = 4$, conforme ilustrado na Figura 13b. Cada um dos lados desse hexágono contém 5 pontos do reticulado (pontos cinza) e, conseqüentemente, o número de pontos do reticulado na borda de H_4 é $B = 6 \cdot 5 - 6 = 6 \cdot 4 = 24$, pois cada vértice pertence a dois lados. Por outro lado, para contabilizar os pontos do reticulado no interior de H_4 , basta observar que existem duas fileiras contendo 4 pontos cada (pontos verdes), duas com 5 pontos cada (pontos amarelos), duas com 6 pontos cada (pontos vermelhos) e uma contendo 7 pontos (pontos azuis), ou seja, o número de pontos do reticulado hexagonal no interior de H_4 é $I = 2 \cdot (4 + 5 + 6) + 7 = 37$. Logo, o Teorema 1 garante que a área desse hexágono é $A(H_4) = \sqrt{3}/2(37 + 24/2 - 1) = 24\sqrt{3}$. De forma análoga, se ℓ é um inteiro positivo e H_ℓ é o hexágono regular de lado ℓ posicionado no plano cartesiano de forma similar ao hexágono H_4 , tem-se $B = 6\ell$ e

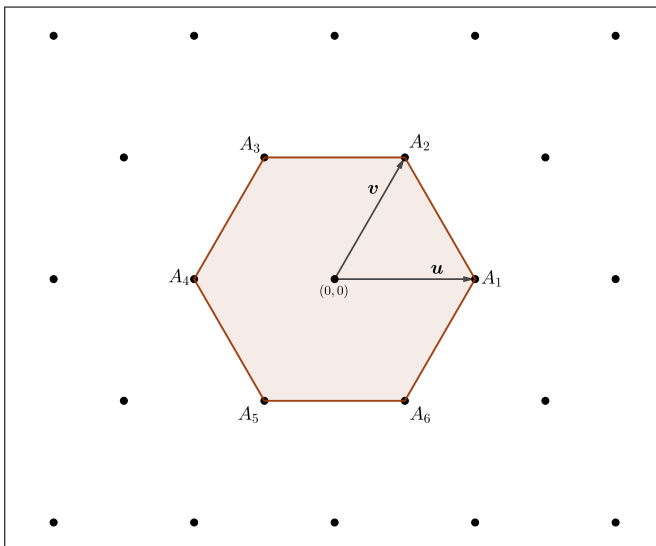
$$\begin{aligned}
 I &= 2 \cdot [\ell + (\ell + 1) + (\ell + 2) + \dots + (2\ell - 2)] + (2\ell - 1) = 2 \sum_{k=0}^{\ell-2} (\ell + k) + 2\ell - 1 \\
 &= (\ell - 1)(\ell + 2\ell - 2) + 2\ell - 1 = 3\ell^2 - 3\ell + 1.
 \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Teorema 1, obtemos que a área de H_ℓ é dada por

$$A(H_\ell) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{6\ell}{2} + (3\ell^2 - 3\ell + 1) - 1 \right] = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

Este resultado, obviamente, também é válido no caso em que ℓ é um número real positivo.

Figura 14 – Reticulado gerado por $\mathbf{u} = (\ell, 0)$ e $\mathbf{v} = (\ell/2, \ell\sqrt{3}/2)$



Fonte: autores (2024)

Para obter tal resultado via Teorema de Pick, basta utilizar o reticulado gerado pela base $\{(\ell, 0), (\ell/2, \ell\sqrt{3}/2)\}$ e o hexágono H_ℓ conforme ilustrado na Figura 14. Com efeito, aplicando o Teorema 1, obtemos

$$A(H_\ell) = \left| \det \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ \ell/2 & \ell\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(\frac{6}{2} + 1 - 1 \right) = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

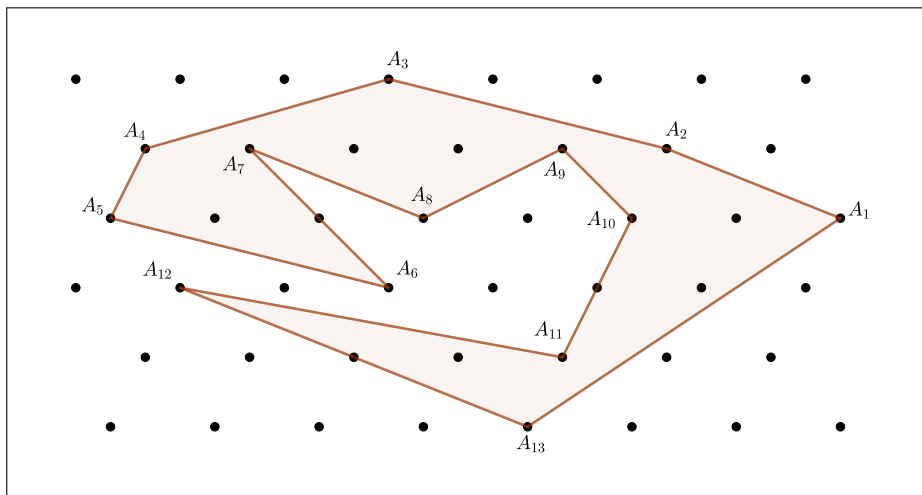
Evidentemente, o Teorema 1 pode ser aplicado a uma coleção maior de polígonos, se comparado com a abrangência do Teorema de Pick clássico. O Exemplo 1 destaca muito bem esse fato, uma vez que, por exemplo, não existe um hexágono

regular de lado $\ell = 1$ de modo que cada um dos vértices têm ambas as coordenadas inteiras. Para verificar isso, basta observar que a área de tal hexágono é $3\sqrt{3}/2$ (ou seja, um número irracional) e a de qualquer polígono simples cujos vértices possuem coordenadas inteiras é racional.

Exemplo 2. Seja P o polígono simples ilustrado na Figura 15 cujos vértices pertencem ao reticulado gerado por $u = (3, 0)$ e $v = (1, 2)$. O Teorema 1 garante que a área do polígono P é igual a

$$A(P) = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left(6 + \frac{1}{2} \cdot 16 - 1 \right) = 6 \cdot 13 = 78.$$

Figura 15 – Polígono P



Fonte: autores (2024)

3 CONCLUSÃO

O Teorema de Pick em reticulados bidimensionais estabelece uma forma simples e muito elegante, da mesma forma que o Teorema de Pick original, de determinar a área de polígonos simples cujos vértices pertencem a um reticulado bidimensional arbitrário. Este resultado amplia as possibilidades de aplicações, uma vez que abrange uma coleção maior de polígonos. Por exemplo, como exibido no artigo, a partir da versão generalizada pode-se obter a área de um hexágono regular qualquer, o que não é possível a partir do Teorema de Pick original.

REFERÊNCIAS

- Conway, J. H. & Sloane, N. J. A. (2013). *Sphere packings, lattices and groups*. (Vol. 290). Springer Science & Business Media.
- Hermes, J. D. V. (2015). O teorema de pick. *Ciência e Natura*, 37(3), 203–213. <https://doi.org/10.5902/2179460X14606>.
- Lima, E. L. (2012). *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. (Coleção do Professor de Matemática, 6a ed). Sociedade Brasileira de Matemática.
- Meneses, P. d. O. (2016). Teorema de pick e teorema espacial tipo-pick: demonstrações e aplicações no ensino médio. Master's thesis, [Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará]. Repositório Institucional UFC. <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/17972>.
- Pick, G. v. (1899). Geometrisches zur zahlenlehre. *Sitzenber. Lotos (Prague)*, 19, 311–319. https://www.zobodat.at/pdf/Lotos_47_0311-0319.pdf.
- Ren, D. & Reay, J. R. (1987). The boundary characteristic and pick's theorem in the archimedean planar tilings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 44(1), 110–119. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(87\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(87)90063-X).
- Santos, J. P. d. O. (1998). *Introdução à teoria dos números*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
- Scott, P. (2006). Area of lattice polygons. *The Australian Mathematics Teacher*, 62(3), 2–5.
- Steinhaus, H. (1969). *Mathematical snapshots*. Oxford University Press.

Contribuições dos autores

1 – Eleonesio Strey

Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professor do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Espírito Santo, Alegre-ES.

<https://orcid.org/0000-0003-0305-9553> • eleonesio.strey@ufes.br

Contribuição: Investigação; Escrita – Primeira Redação; Escrita – Revisão e Edição & Administração do Projeto

2 – Suzana Carletti Machado

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo. Mestranda em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa.

<https://orcid.org/0009-0007-9478-2494> • suzanacarletti1@gmail.com

Contribuição: Investigação & Escrita – Primeira Redação

3 – Giselle Strey

Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professora da Rede Pública Estadual do Espírito Santo.

<https://orcid.org/0000-0001-6963-3365> • giselle.sarstrey@educador.edu.es.gov.br

Contribuição: Investigação; Escrita – Primeira Redação & Escrita – Revisão e Edição

Como citar este artigo

Strey, E., Machado, S. C., & Strey, G. R. de A. S. (2025). O Teorema de Pick em reticulados bidimensionais. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 47, e87983. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X87983>.