UFSM

CIÊNCIA e NATURA

ISSN 2179-460X
OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 46, e85704, 2024 • https://doi.org/10.5902/2179460X85704
Submissão: 14/11/2023 • Aprovado: 29/07/2024 • Publicação: 29/11/2024

**Ensino**

# Esquemas cognitivos apresentados por estudantes universitários na resolução de problemas interdisciplinares de cálculo e física

## Cognitive schemas presented by university students in solving interdisciplinary problems in calculus and physics

**Janice Rachelli**[I], **Vanilde Bisognin**[II]

[I]Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil
[II]Universidade Franciscana, Santa Maria, RS, Brasil

### RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar os esquemas cognitivos associados ao conceito de integral apresentados por estudantes universitários na resolução de problemas interdisciplinares de Cálculo e Física. Tendo a teoria APOS como suporte teórico, estabelecemos a decomposição genética do conceito de integral e selecionamos quatro problemas que envolvem conceitos da Física e que são resolvidos utilizando os esquemas do conceito de integral. O estudo, de abordagem qualitativa, foi desenvolvido junto a 30 estudantes de um curso de Engenharia, de uma instituição pública federal de ensino superior. Os dados foram coletados por meio da produção escrita dos estudantes na resolução dos problemas propostos e, analisados seguindo as construções e os mecanismos mentais estabelecidos de acordo com a teoria APOS, e apresentados, pelos estudantes na resolução dos problemas. Dos principais resultados obtidos, evidenciamos que foi fundamental a utilização de problemas interdisciplinares do Cálculo com a Física para a construção de esquemas cognitivos sobre a integral pela maioria dos estudantes. Isto trouxe motivação e interesse aos estudantes, um fator que provavelmente contribuiu para o desenvolvimento dos mecanismos mentais que possibilitou a construção dos conceitos.

**Palavras-chave:** Interdisciplinaridade; Integral; Teoria APOS

### ABSTRACT

This research aims to analyze the cognitive schemes associated with the concept of integral presented by university students when solving interdisciplinary problems in Calculus and Physics. Using the APOS theory as theoretical support, we established the genetic decomposition of the concept of integral and selected four problems that involve concepts from Physics and which are solved using the schemes of the concept of integral. The study, with a qualitative approach, was developed with 30 students from an Engineering course at a federal public higher education institution. The data were collected through the students' written production when solving the proposed problems and analyzed following the constructions and mental mechanisms established in accordance with the APOS theory and presented by the students when solving the problems. From the main results obtained, we showed that the use of interdisciplinary problems from Calculus and Physics was fundamental for the construction of cognitive schemes about the integral by the majority of students. This brought motivation and interest to students, a factor that probably contributed to the development of the mental mechanisms that enabled the construction of concepts.

**Keywords:** Interdisciplinarity; Integral; APOS Theory

## 1 INTRODUÇÃO

Ao analisar resultados de pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, observam-se preocupações quanto as deficiências na formação básica, as dificuldades cognitivas apresentadas pelos estudantes, a falta de motivação e o desinteresse pelo estudo, ocasionando em altos índices de reprovação e evasão. Os problemas elencados também são fatores que preocupam professores de Cálculo em suas práticas docentes e gestores das instituições de ensino superior.

Destacam-se nestes estudos, pesquisas que enfatizam problemas que estão associados as dificuldades inerentes aos próprios conceitos (Barufi, 1999; Resende, 2003), ao ensino descontextualizado e algoritmizado (Artigue, 2001; Moreno, 2005), aos conflitos pedagógicos revelados naquilo que o professor faz (demonstrar os resultados) e aquilo que se pede aos alunos (exaustivas listas de exercícios) (VIEIRA, 2013) e aos índices de reprovação e evasão (Barufi, 1999; Resende, 2003; Molon, 2013; Rosa; Alvarenga; Santos, 2019; Santos *et al*., 2020).

É consenso que o Cálculo Diferencial e Integral se constitui em uma ferramenta poderosa em disciplinas dos cursos de engenharias e ciências em geral, cujas aplicações não se limitam a problemas padronizados apresentados em livros didáticos para a aprendizagem de conceitos e técnicas matemáticas.

Para a Engenharia, torna-se necessário a aplicação de conhecimentos matemáticos para lidar com situações que atentam a problemas a serem resolvidos pelos estudantes (Soares; Lima; Sauer, 2004), problemas esses integrados “àqueles conteúdos das disciplinas específicas e profissionalizantes do curso e contextualizado ao cotidiano profissional daquele que está sendo formado” (Lima *et al*., 2019, p. 7).

No entanto, as disciplinas de Cálculo, geralmente, são tratadas de forma independente das disciplinas específicas, provocando assim, uma dissociação entre as disciplinas básicas da área de Matemática e àquelas da área específica de cada curso. Isto faz com que os estudantes não conseguem compreender e aplicar os conceitos matemáticos de forma mais significativa.

Cabe destacar, que é importante ao estudante não apenas saber utilizar técnicas na obtenção de respostas corretas aos problemas apresentados, mas, que efetivamente compreenda determinado conceito, bem como outros relacionados a ele, “seus significados para o campo de conhecimento em questão, suas aplicações na própria Matemática e em outras áreas” (Lima, 2015, p. 6).

Várias iniciativas têm sido buscadas como forma de qualificar a aprendizagem do Cálculo; essas iniciativas “revelam a preocupação de uma comunidade de acadêmicos com as consequências dos altos índices de reprovação e o desejo de se encontrarem caminhos que promovam a aprendizagem” (Alvarenga; Dorr; Vieira, 2016, p. 55). Diferentes abordagens didático-pedagógicas “que visam atender à personalização da educação dos estudantes, ao aperfeiçoar o aproveitamento do tempo das aulas e ao melhorar o rendimento dos mesmos no que refere à aprendizagem” (Elmôr Filho *et al*., 2019, p. 8), têm sido investigadas.

O aprendizado baseado em atividades, que exijam conhecimentos interdisciplinares, “são alguns dos instrumentos que podem ser acionados para elevar a melhoria do ensino e para combater a evasão escolar” (Brasil, 2019, p. 30). Sendo assim, problemas que desempenham papéis integradores entre disciplinas matemáticas e não-matemáticas em cursos de Engenharia, devem ser concebidos e utilizados em sala (Camarena, 2017).

Por outro lado, as Diretrizes Curriculares para o Ensino de Engenharia – Parecer CNE/CES nº: 1/2019 preconizam e recomendam que nesses cursos sejam trabalhadas questões relativas ao processo de ensino e de aprendizagem centrado no estudante, ao trabalho colaborativo, à interdisciplinaridade, à formação integral do estudante e à autonomia, ou seja, problemas interdisciplinares devem estar presentes na formação do engenheiro (Brasil, 2019).

Nesta perspectiva, o objetivo desta pesquisa é analisar a construção de esquemas cognitivos do Cálculo necessários à resolução de problemas interdisciplinares que envolvem conceitos de Cálculo e de Física. Os problemas propostos visam fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que propicie o entendimento sobre as conexões entre a Matemática e a Física. Para tanto, selecionamos problemas associados a conceitos da Física I, cuja solução envolve os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e, desenvolvemos situações de ensino, junto a estudantes do curso de Engenharia Civil de uma instituição federal de ensino superior do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Cálculo A.

Para avaliar a construção dos esquemas, utilizamos como referencial, a teoria APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores (Dubinsky, 1986, 1991; Arnon *et al*., 2014). Esta teoria se baseia em quatro componentes principais: ação, processo, objeto e esquema que são interligadas e fundamentais para a construção do conhecimento matemático em nível universitário.

A teoria APOS vem sendo utilizada por pesquisadores, dos quais podemos citar: Asiala, *et al*. (2001); Boigues, Llinares e Estruch (2010); Sánchez-Matamoros, García e Llinares (2013); Maharaj (2014); Trigueros e Martinez-Planell (2015); Rachelli e Bisognin (2018, 2020), dentre outros, como forma de avaliar a compreensão de conceitos matemáticos do Cálculo pelos estudantes. Destes estudos, somente as pesquisas de Boigues, Llinares e Estruch (2010) e Maharaj (2014) tratam sobre a construção dos conceitos de integral tendo a teoria APOS como referencial teórico.

Com a finalidade de atender ao objetivo proposto apresentamos no que segue os principais aspectos da teoria APOS e descrevemos os aspectos metodológicos empregados neste estudo. Após, apresentamos a análise dos dados e os resultados, em que, buscamos verificar quais foram os esquemas cognitivos realizados pelos estudantes na resolução dos problemas. Por fim, apresentamos as considerações finais.

## 2 ASPECTOS TEÓRICOS

A teoria APOS (Ação-Processo-Objeto-Esquema), desenvolvida por Ed Dubinsky e seus colaboradores (Dubinsky, 1986, 1991; Arnon *et al*., 2014), constitui-se como marco teórico para esta pesquisa. Nesta teoria toma-se como ponto de partida os mecanismos de abstração reflexiva, propostos inicialmente por Piaget (1995) e que são utilizados para descrever a construção de objetos mentais relacionados com objetos matemáticos específicos, cuja abstração parte das ações e operações e não, meramente dos objetos.

De acordo com Arnon *et al*. (2014), os mecanismos mentais de abstração reflexiva: interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade possibilitam ao estudante a compreensão de um conceito matemático por meio da construção de estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema.

Por meio da realização de ações, o estudante entra em contato com os conceitos matemáticos. Essas ações envolvem construções cognitivas tomadas como algo externo ao sujeito que podem ser realizadas passo a passo. É através da ação que o estudante manipula, observa e experimenta diferentes aspectos do objeto matemático, o que permite a construção de um processo de pensamento.

Assim, o conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência para responder as situações matemáticas problematizadas, reflexionando sobre elas, dentro de um contexto, mediante a construção e reconstrução de ações, processos e objetos matemáticos e, organizando-os em esquemas para ser capaz de dar solução a essas situações (Asiala *et al*., 1996).

Os processos são interiorizações dessas ações que exigem um maior nível de generalização visto que, nesta transformação, o sujeito pode realizar uma operação, refletir, compor os passos sem ter que os realizar, além de pular etapas, como também revertê-las. A interiorização é o mecanismo que possibilita fazer essa mudança mentalmente. Os processos podem ser resultados da coordenação de dois ou mais processos e, também podem ser revertidos. Os processos são transformações cognitivas que ocorrem na mente do estudante enquanto ele lida com o objeto matemático. É nesse momento que ele começa a perceber regularidades, fazer generalizações e inferências.

Quando o estudante considera um processo como um todo, realiza e constrói transformações sobre ele, este se encapsula em um objeto. O objeto matemático é o próprio conteúdo, conceito ou ideia que o estudante está aprendendo. É a descrição formal ou informal daquilo que é estudado. Uma vez que processos são encapsulados em objetos mentais, eles podem ser desencapsulados e voltar ao processo que deu origem ao objeto. Em geral, as dificuldades dos estudantes com os conceitos matemáticos surgem ao realizar ações sobre processos que não foram encapsulados.

Um esquema cognitivo consiste na coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente de um sujeito e que permitem a resolução de um problema a partir do conceito encapsulado. Além do mais, um esquema consiste em uma estrutura matemática formada pelos elementos matemáticos e as relações que se estabelecem entre eles que podem ser evocados na resolução de um problema (Sanches-Matamoros; Garcia; Llinares, 2008). Um esquema é um conjunto de conhecimentos, de estratégias e de regras que o estudante desenvolve para lidar com o objeto matemático de forma eficiente.

Quando o sujeito é capaz de aplicar um determinado esquema a outros contextos, dizemos que ele utilizou o mecanismo mental da generalização. A reversibilidade ocorre quando o sujeito é capaz de reverter o mecanismo gerador de um objeto.

Ademais, o modelo teórico APOS permite conjecturar trajetórias hipotéticas de aprendizagem que se denominam decomposição genética de um conceito matemático. Uma decomposição genética é um modelo que descreve em detalhes as construções e os mecanismos mentais que são necessários para que um estudante aprenda um conceito matemático. Geralmente começa com uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem, o desenvolvimento histórico do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS e as pesquisas publicadas anteriormente (Arnon *et al.*, 2014). Apesar das diferenças individuais, as trajetórias de aprendizagem indicam uma trajetória possível de aprendizagem do estudante para a construção do conceito; devem ser consideradas na elaboração de situações de ensino que ao serem implementadas fornecem uma oportunidade para a coleta de dados, geralmente sob a forma de instrumentos escritos e/ou entrevistas.

Em nosso estudo, buscamos estabelecer a decomposição genética do conceito de integral, contendo uma descrição das construções mentais a serem realizadas pelos estudantes na resolução dos problemas interdisciplinares propostos.

## 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este estudo segue os pressupostos de uma pesquisa qualitativa de caráter descritivo e interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994). Tal metodologia adequa-se ao propósito deste estudo uma vez que uma pesquisa qualitativa possui as seguintes características:

- a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
- este tipo de investigação é descritivo, uma vez que os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e os resultados escritos contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação;
- os investigadores que utilizam este tipo de metodologia devem dar mais ênfase ao processo do que ao resultado;
- os dados recolhidos devem ser analisados de forma indutiva, ou seja, as

abstrações são construídas à medida que os dados que foram recolhidos vão se agrupando; e, por último,

- o investigador interessa-se, essencialmente, por tentar perceber o significado que os participantes atribuem às suas experiências (Bogdan; Biklen, 1994).

Estas características estão presentes neste estudo, uma vez que os dados foram coletados em sala de aula, sendo um dos pesquisadores o responsável pela disciplina e, a análise foi realizada seguindo o modelo cognitivo APOS, buscando descrever e interpretar as construções mentais utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas.

Além do mais, na organização da pesquisa, empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS:

- Análise teórica: elaboração da decomposição genética do conceito matemático;
- Planejamento e implementação: seleção e elaboração de situações de ensino por meio de problemas interdisciplinares a serem desenvolvidos em sala de aula;
- Coleta e análise dos dados: desenvolvimento das situações de ensino e análise dos dados obtidos, como forma de determinar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão dos conceitos pelos estudantes (Arnon et al., 2014).

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética, buscando resgatar a forma como os conceitos, proposições e teoremas, que fazem parte do estudo da integral, são tratados em livros texto de Cálculo e, a resolução de problemas interdisciplinares do Cálculo e a Física (Anton; Bivens; Davis, 2014; Halliday; Resnick; Walker, 2016). Também, revisamos alguns modelos propostos em outras pesquisas similares como a de Boigues, Llinares e Estruch (2010) e de Maharaj (2014) que tratam do conceito de integral.

Assim, a partir dos estudos anteriores e tendo em conta, a experiência em trabalhar com disciplinas de Cálculo e os problemas interdisciplinares propostos, estabelecemos uma decomposição genética, contendo uma descrição das construções que o estudante precisa realizar como forma de desenvolver ações, processos, objetos e esquemas, fundamentais para a compreensão do conceito de integral, cujos elementos estão apresentados na tabela 1.

Tabela 1 – Um esquema cognitivo da integral

| Estrutura mental | Descrição |
|---|---|
| Ação | Encontra a integral de funções simples, cujas regras são dadas de forma simbólica.<br>Utiliza manipulações algébricas no cálculo da integral. |
| Processo | Encontra a integral de funções, por meio do estudo de sua estrutura, detectando qual a regra de integração deve ser usada. |
| Objeto | Interpreta a integral definida como área da região sob o gráfico de uma função em um intervalo definido.<br>Interpreta a integral indefinida como a antiderivada de uma função.<br>Define a integral indefinida como uma família de funções, cuja constante de integração é determinada conhecendo-se uma condição inicial sobre a função integrando. |
| Esquema | Utiliza o conceito de integral indefinida para obter a antiderivada da função integrando.<br>Utiliza o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar a integral definida de uma função.<br>Utiliza a integral para obter a função posição de uma partícula, conhecendo sua velocidade e para obter a função velocidade conhecendo a função aceleração.<br>Utiliza o conceito de integral definida para determinar o trabalho realizado por uma força variável. |

Fonte: Autoras (2023)

Como podemos observar, na tabela 1, para que o estudante construa o esquema de integral é importante que ele organize ações, processos e objetos indicados para a integral e os vincule em uma estrutura coerente. Esta estrutura inclui várias interpretações da integral em diferentes contextos e técnicas possíveis para encontrar a integral de funções, interpretar a área sob o gráfico da função em um intervalo como a integral definida, determinar a função posição de uma partícula e a função velocidade quando são fornecidas, respectivamente, a função velocidade e a função aceleração e determinar o trabalho realizado por uma força.

Cabe destacar que, para que um estudante compreenda o conceito de integral associado a problemas da Física, torna-se necessário conhecimentos prévios sobre funções e derivadas e sobre os conceitos de aceleração, velocidade, posição e trabalho. Um esquema não pode ser construído sem pré-requisitos de esquemas já existentes.

Na etapa de Planejamento e implementação, organizamos situações de ensino, compostas por quatro problemas elaborados no contexto da Física I, nos quais foram abordados os conceitos de posição, velocidade, aceleração de uma partícula e trabalho realizado por uma força. Esses problemas foram retirados, com algumas adaptações, de Anton, Bivens e Davis (2014) e de Halliday, Resnick e Walker (2016) e para resolvê-los o estudante precisa usar o conceito e as propriedades de integral definida e da integral indefinida, os procedimentos de cálculo de antiderivadas de funções e o Teorema Fundamental do Cálculo. Os problemas estão apresentados junto com a análise na próxima seção.

A Coleta de dados foi realizada junto a 30 estudantes brasileiros do curso de Engenharia Civil de uma instituição de ensino superior pública e federal do estado do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Cálculo A. Essa disciplina contempla o estudo de limites, derivadas e integrais de funções de uma variável real. Como instrumentos de coleta de dados utilizamos os registros escritos dos estudantes aos problemas propostos. Os estudantes, denominados de E1, E2, E3, ..., E30, aceitaram participar da pesquisa e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

## 4 ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Apresentamos, nesta seção, uma descrição de como os estudantes resolveram os problemas, apontando os principais aspectos identificados quanto a construção de esquemas cognitivos associados ao conceito de integral, bem como os resultados alcançados.

Cabe destacar, que a ideia de trabalhar com problemas interdisciplinares surgiu do fato de saber que no currículo do curso de Engenharia Civil, Cálculo A é um pré-requisito para Física I. Assim, esta proposta de trabalho insere-se no que preconiza os documentos que versam sobre o ensino de Engenharia no Brasil ao se referir a atividades que tratam de conhecimentos interdisciplinares (Brasil, 2019).

O Problema 1, apresentado na figura 1, aborda a relação entre velocidade e função posição como processos inversos.

Figura 1 – Problema 1

| |
|---|
| Uma partícula move-se com velocidade ao longo de um eixo coordenado. Sabendo que a partícula tem a coordenada no instante , encontre sua função posição. |

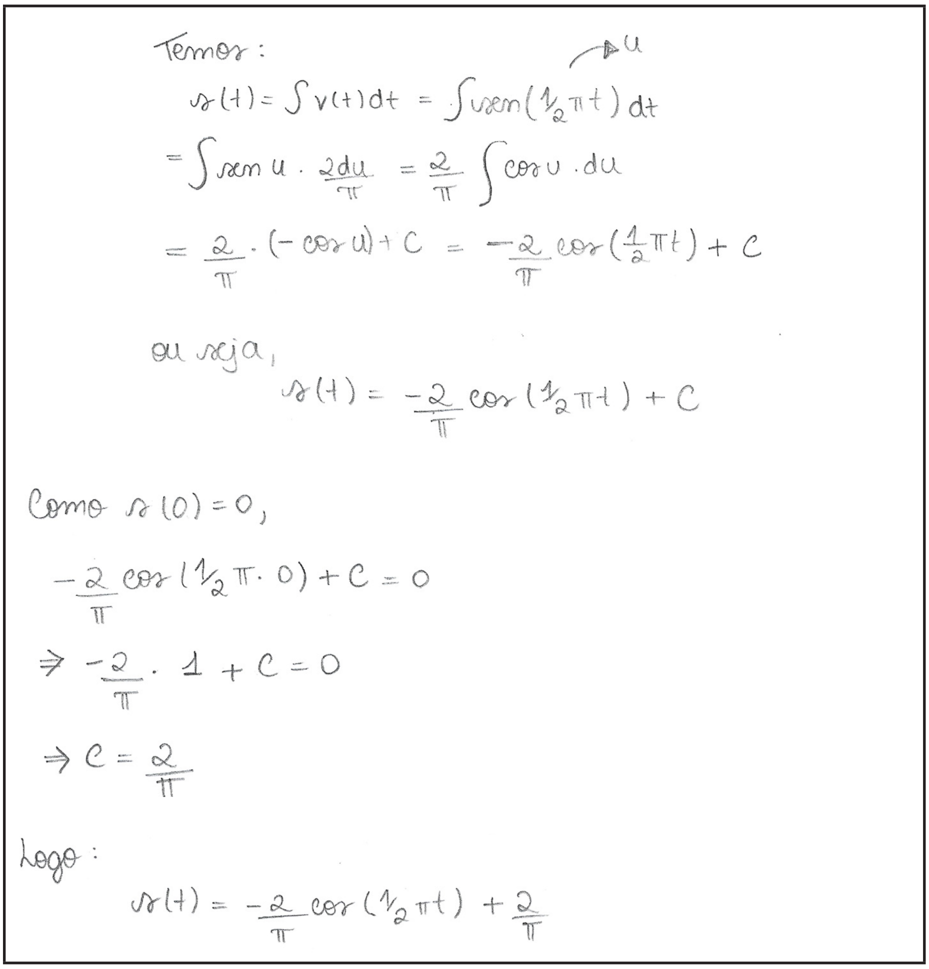
Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014, p. 383, adaptado)

Para resolver o Problema 1, é necessário que o estudante utilize o mecanismo da reversibilidade, em que, conhecendo a função velocidade – derivada da função posição, possa encontrar a função posição por meio da integração Esta integração produz uma família de funções posição com a velocidade dada. Como sabemos que a posição da partícula é no instante , temos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função posição.

A resolução do Problema 1, realizada pelo estudante E19, pode ser visualizada na figura 2.

O registro escrito do estudante E19, apresentado na figura 2, nos mostra que ele utilizou o mecanismo da reversibilidade, em que, conhecendo a derivada da função posição, obteve a função posição, por meio do processo de integração. Assim, o estudante realiza ações e processos ao utilizar as fórmulas de integração para a função seno e para a função composta . Utiliza também o método da substituição, fazendo , para resolver a integral corretamente. Além disso, a estrutura mental objeto integral indefinida como uma família de funções, ,é claramente identificada em sua resolução. Após, com a condição inicial, , sobre a função posição, determina a constante de integração, . Também, o estudante coordena a interpretação da integral da função velocidade de uma partícula como a função posição. Desta forma, o estudante E19, demonstra ter desenvolvido esquemas cognitivos para a resolução do problema.

Figura 2 – Resolução do Problema 1 pelo estudante E19




Fonte: Autoras (2023)

Cabe destacar que a resolução do Problema 1 não foi feita corretamente por somente dois estudantes, E5 e E29 (figura 3).

O que vemos, na figura 3, é que E5 não utiliza a notação matemática coerente para a integral, visto que escreve, e, E29, embora, inicialmente, encontra a integral corretamente, mas após integra novamente para obter a função posição. Nos dois casos, os estudantes revelam uma aprendizagem deficiente sobre como encontrar a função posição; E5, por não resolver a integral indefinida e E29, por realizar a integração duas vezes. Nestes casos, os esquemas cognitivos da integral não foram alcançados por esses estudantes.

Figura 3 – Resolução do Problema 1 pelos estudantes E5 e E29

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \text{sen}\ \tfrac{1}{2}(\pi t)\,dt = \int \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,u \cdot \frac{du}{\pi} \qquad du = \frac{\pi}{2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int \text{sen}\ u\ dt \qquad 2du$$

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int \text{sen}\ u + C} \qquad \frac{2}{\pi}\,du = dt$$

$$\int v(t)\,dt = \int \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\pi t\ dt = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\right)\pi t + C$$

$$\int s(t)\,dt = \frac{-2}{\pi}\int \cos\left(\frac{1}{2}\right)\pi t\ dt = \frac{-2}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\pi\right)\text{sen}\ \frac{1}{2}\pi t + C$$

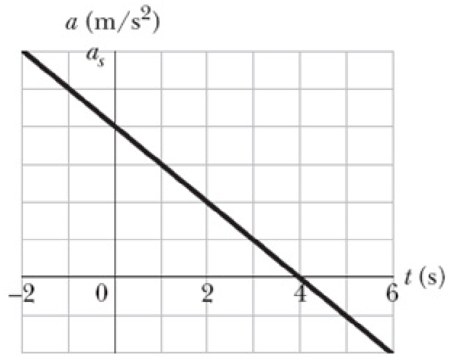
$$s(t) = \frac{-4}{\pi}\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\cdot\pi + C$$

Fonte: Autoras (2023)

A determinação da velocidade de uma partícula, conhecendo-se a sua aceleração é o que é solicitado no Problema 2 (figura 4).

Figura 4 – Problema 2

A figura mostra a aceleração em função do tempo para uma partícula que se move ao longo do eixo. A escala vertical do gráfico é definida por . No instante , a velocidade da partícula é 7,0 m/s. Qual é a velocidade da partícula no instante ?

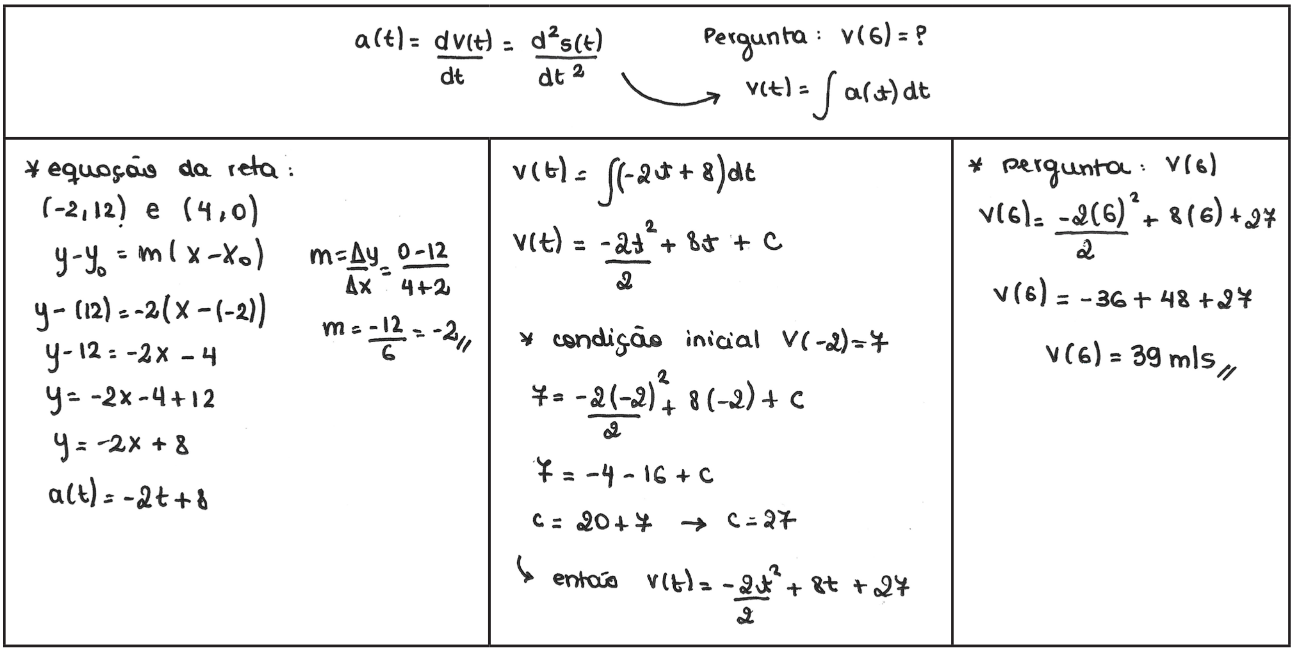



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 38)

Neste problema, o estudante precisa, inicialmente, determinar a função aceleração, como uma função afim, a partir dos dados apresentados no gráfico e, como no Problema 1, utilizar o mecanismo da reversibilidade em que, conhecendo a aceleração possa determinar a função velocidade. Com a condição inicial de que a velocidade é 7,0 quando , obtém-se uma única função velocidade. A partir daí, a velocidade da partícula em pode ser determinada.

A resolução do estudante E24 pode ser vista na figura 5.

Figure 5 – Resolução do Problema 2 pelo estudante E24



$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$

Pergunta: $v(6) = ?$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

* equação da reta:

$(-2, 12)$ e $(4, 0)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-12}{4+2}$

$y - (12) = -2(x - (-2))$

$m = \frac{-12}{6} = -2$

$y - 12 = -2x - 4$

$y = -2x - 4 + 12$

$y = -2x + 8$

$a(t) = -2t + 8$

$v(t) = \int(-2t + 8)\,dt$

$v(t) = \frac{-2t^2}{2} + 8t + C$

* condição inicial $V(-2) = 7$

$7 = \frac{-2(-2)^2}{2} + 8(-2) + C$

$7 = -4 - 16 + C$

$C = 20 + 7 \rightarrow C = 27$

então $v(t) = \frac{-2t^2}{2} + 8t + 27$

* pergunta: $V(6)$

$V(6) = \frac{-2(6)^2}{2} + 8(6) + 27$

$V(6) = -36 + 48 + 27$

$V(6) = 39$ m/s

Fonte: Autoras (2023)

Da resolução feita pelo estudante E24, apresentada na figura 5, se observa que, E24 expressa de forma correta a maneira de encontrar a função velocidade, , por meio da integração indefinida da função aceleração. Para realizar esta operação, o estudante, obtém, a expressão para , por meio da equação da reta que passa por dois pontos, demonstrando assim, utilizar pré-requisitos necessários a compreensão de funções. Após, desenvolve ações e processos para determinar a integral de funções simples. Com a interiorização, obtém o objeto matemático integral indefinida e com a coordenação dos dados, obtém a constante de integração usando a condição inicial . Após, a velocidade da partícula em s é calculada.

Embora, alguns estudantes tiveram dúvidas para encontrar a função aceleração a partir de seu gráfico, após as explicações, tendo encontrado a função, todos os estudantes resolveram corretamente a integral para encontrar a velocidade e responderam corretamente o que pede o Problema 2. Observa-se aqui, que esses estudantes demonstraram não ter a compreensão de um pré-requisito associado a funções, enquanto, compreendem os esquemas associados a integrais de funções mais simples.

O Problema 3, apresentado na figura 6, contempla dois conceitos importantes utilizados na Física. Um deles é a utilização da integral indefinida para determinar a função velocidade, conhecendo-se a aceleração. O outro é a utilização da integral definida para determinar a distância percorrida em um intervalo de tempo. É importante destacar que, para determinar a distância percorrida, o estudante deve ter em mente que precisa integrar o valor absoluto da função velocidade no intervalo de tempo indicado.

Figura 6 – Problema 3

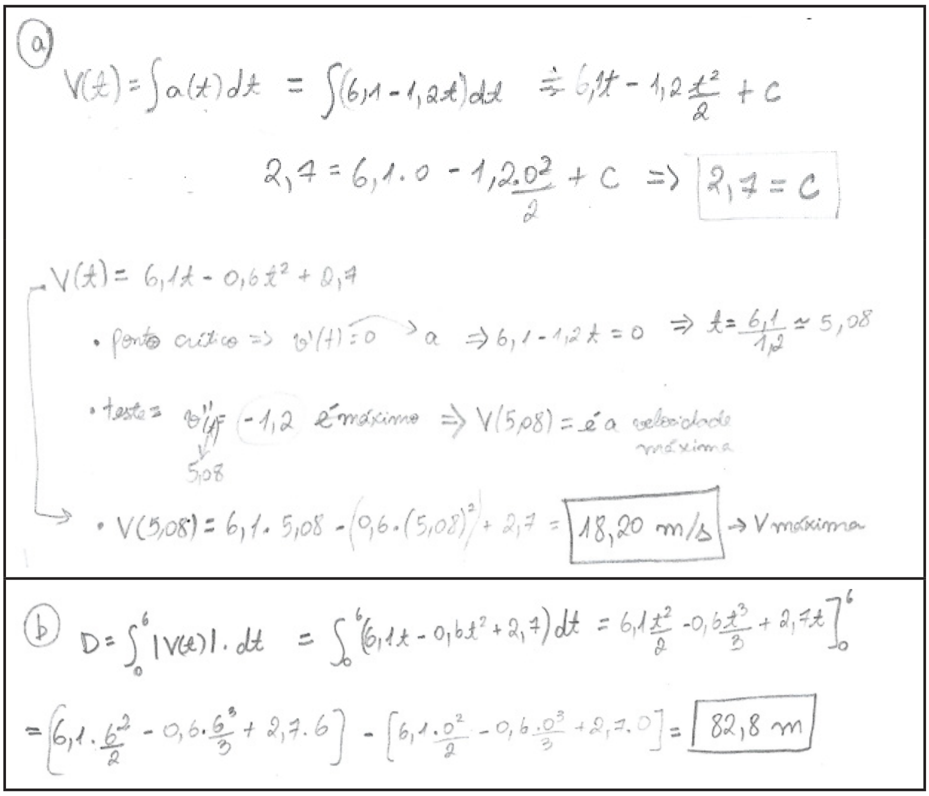
> Um motociclista que está se movendo ao longo do eixo na direção leste tem uma aceleração dada por para . Em , a velocidade e a posição do ciclista são 2,7 m/s e 7,3 m.
> 1. Qual é a velocidade máxima atingida pelo ciclista?
> 2. Qual é a distância percorrida pelo ciclista entre e ?

Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 38)

Para resolver este problema, o estudante E18 utilizou em (a) e em (b) os esquemas da integral, de tal forma que em (a), obteve a função velocidade , por meio da integral indefinida e, em (b), a distância percorrida , por meio da integral definida , o que pode ser observado na figura 7.

Ademais, podemos observar, na figura 7, que o estudante E18, utiliza corretamente o cálculo das integrais, por meio da obtenção da antiderivada das funções integrandos. Isto permite dizer que ele coordena e interioriza ações e processos para obter o objeto matemático integral indefinida e integral definida. Em (a), após obter uma família de funções, houve a coordenação da condição inicial para obter uma única função velocidade; em (b), houve a utilização do Teorema Fundamental do Cálculo para obter a distância percorrida.

Figura 7 – Resolução do Problema 3 pelo estudante E18



(a)

$$V(t) = \int a(t)\,dt = \int (6{,}1 - 1{,}2t)\,dt = 6{,}1t - 1{,}2\frac{t^2}{2} + C$$

$$2{,}7 = 6{,}1 \cdot 0 - 1{,}2\frac{0^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{2{,}7 = C}$$

$$V(t) = 6{,}1t - 0{,}6t^2 + 2{,}7$$

• ponto crítico ⇒ $v'(t) = 0$ → a ⇒ $6{,}1 - 1{,}2t = 0$ ⇒ $t = \frac{6{,}1}{1{,}2} \simeq 5{,}08$

• teste = $v''(5{,}08)$ $-1{,}2$ é máximo ⇒ $V(5{,}08)$ = é a velocidade máxima

• $V(5{,}08) = 6{,}1 \cdot 5{,}08 - (0{,}6 \cdot (5{,}08)^2) + 2{,}7 = \boxed{18{,}20\ m/s}$ → V máxima

(b)

$$D = \int_0^6 |V(t)|\,dt = \int_0^6 (6{,}1t - 0{,}6t^2 + 2{,}7)\,dt = 6{,}1\frac{t^2}{2} - 0{,}6\frac{t^3}{3} + 2{,}7t\Big]_0^6$$

$$= \left[6{,}1 \cdot \frac{6^2}{2} - 0{,}6 \cdot \frac{6^3}{3} + 2{,}7 \cdot 6\right] - \left[6{,}1 \cdot \frac{0^2}{2} - 0{,}6 \cdot \frac{0^3}{3} + 2{,}7 \cdot 0\right] = \boxed{82{,}8\ m}$$

Fonte: Autoras (2023)

Frente ao solicitado em (a), após obter a função velocidade, o estudante utilizou os esquemas da derivada para determinar o valor máximo para a velocidade. Podemos observar que houve coordenações de ações, processos, objetos e esquemas sobre a derivada primeira e sobre a derivada segunda para chegar ao resultado correto. Para a função velocidade, o estudante E18 encontrou o ponto crítico e por meio do teste da derivada segunda, concluiu que o ponto é de máximo. Após encontrou a velocidade máxima.

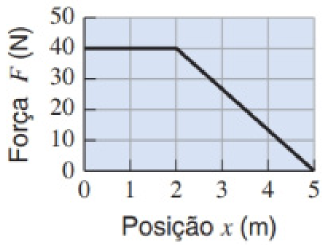
Em (b), o estudante E18, usou corretamente o conceito de distância percorrida, por meio da fórmula, , identificando que , no intervalo e resolveu corretamente a integral definida. Aqui o estudante demonstrou conhecer os esquemas associados ao Teorema Fundamental do Cálculo, obtendo de forma correta o que o Problema 3 solicitava.

As respostas as questões do Problema 3 foram obtidas de forma correta por todos os estudantes, porém, na resolução de (b) apenas sete estudantes fizeram um esboço do gráfico da função de forma a ter informações de que no intervalo e obter a distância percorrida fazendo a integral .

A determinação do trabalho realizado por uma força variável, aplicada na direção e sentido do movimento, é o que pede o Problema 4, apresentado na figura 8.

Figure 8 – Problema 4.

Uma força variável , no sentido positivo do eixo , tem seu gráfico mostrado abaixo. Encontre o trabalho realizado pela força sobre uma partícula que se move de a .




Fonte: Anton, Bivens e Davis (2016, p. 456)

Este problema pode ser resolvido utilizando-se a integral definida , em que é o trabalho realizado pela força variável aplicada a um objeto que se move no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado, no intervalo .

O estudante E4 resolveu este problema de dois modos. Primeiramente ele observou que a integral definida para uma função positiva representa a área da região delimitada pelo gráfico da função e o eixo no intervalo especificado. Após, encontrou as expressões para a função a partir dos dados informados no gráfico e calculou a integral definida. Isto pode ser observado na figura 9.

Sobre os esquemas cognitivos desenvolvidos pelo estudante E4, observamos o esquema da integral, evidenciado quando o estudante utiliza o conceito de integral definida para determinar o trabalho realizado por uma força variável. Além disso, há a encapsulação da integral definida como área da região delimitada pelo gráfico de com a , demonstrada pelo cálculo da área do retângulo (área 1) mais a área do triângulo (área 2).

Figure 9 – Resolução do Problema 4 pelo estudante E4

$$W = \text{área } 1 + \text{área } 2$$

$$W = 2 \times 40 + \frac{3 \times \cancel{40}^{20}}{\cancel{2}}$$

$$W = 80 + 60$$

$$W = 140\,J$$

$$W = \int_0^2 40\,dx + \int_2^5 -\frac{40x}{3} + \frac{200}{3}\,dx$$

$$W = 40x\Big]_0^2 + \frac{-40}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Big]_2^5$$

$$W = 40(2-0) + \left(-40/3\right) \times \left(\frac{5^2}{2} - 25\right) - \left(\frac{4}{2} - 10\right)$$

$$W = 80 - \frac{40}{3} \times \left(\frac{-25}{2} + 8\right)$$

$$W = 80 + \frac{1000}{6} - \frac{320}{3}$$

$$W = 80 + \frac{360}{6}$$

$$W = 80 + 60$$

$$W = 140J$$

Fonte: Da pesquisa (2023)

Neste problema também foram observados que os pré-requisitos associados a determinação da função por meio de seu gráfico também foram utilizados. Isto aparece quando o estudante utiliza a função no intervalo e a função no intervalo .

O cálculo das integrais definidas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo também estão presentes na resolução do estudante E4.

A maioria dos estudantes calculou o trabalho realizado pela força , por meio da integral utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e conferindo com o cálculo da área da região delimitada por com . Um deles utilizou somente o cálculo por meio da área e dois deles, somente o cálculo por meio da resolução da integral definida. De qualquer forma, todos chegaram a resposta correta ao que se pede no Problema 4.

Fica evidente, na resolução dos estudantes, que eles utilizaram os esquemas da integral, ao utilizar o conceito de integral definida para determinar o trabalho realizado por uma força variável, o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar a integral definida de uma função e ainda, interpretar a integral definida como área da região sob o gráfico de uma função em um intervalo definido.

Desse modo, ao comparar os esquemas cognitivos associados a decomposição genética do conceito de integral, apresentados na tabela 1, com as resoluções apresentadas, nas figuras 2, 5, 7 e 9, respectivamente, feitas pelos estudantes E19, E24, E4 e E18, e com as demais resoluções dos registros dos alunos, podemos evidenciar o desenvolvimento de ações, processos, objetos e esquemas para uma aprendizagem dos conceitos de integral, por meio da resolução de problemas da Física.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizamos esta pesquisa com o objetivo de analisar a construção de esquemas cognitivos do Cálculo necessários à resolução de problemas interdisciplinares que envolvem conceitos de Cálculo e de Física. Para isso, elaboramos a decomposição genética do conceito de integral com as descrições das construções mentais a serem realizadas pelos estudantes na resolução dos problemas propostos.

Os dados recolhidos, com as respostas dos estudantes, nos permitem obter algumas considerações em relação ao desenvolvimento da pesquisa em sala de aula. Em primeiro lugar, é possível a construção de esquemas cognitivos sobre a integral pela maioria dos estudantes, visto que eles conseguiram resolver de forma correta os problemas propostos, mostrando desenvolver ações, processos, objetos e esquemas previstos na decomposição genética do conceito de integral. Em segundo, para esta pesquisa, foi fundamental a utilização de problemas interdisciplinares do Cálculo com a Física. Isto trouxe motivação e interesse aos alunos, um fator que provavelmente contribuiu muito para o desenvolvimento dos mecanismos mentais que possibilitou a construção dos conceitos.

Acreditamosque,embora,muitosalunosenfrentamdificuldadesparacompreender os conceitos e técnicas envolvidos no Cálculo, ao trabalharem com aplicações práticas do Cálculo em área como a da Física, os estudantes conseguem relacionar os conteúdos tratados e encontram motivação para aprofundar seu aprendizado.

Melhorar a compreensão de um objeto matemático é uma tarefa que exige do professor a utilização de diferentes estratégias didáticas e a realização de atividades que estimulem a aplicação dos conceitos aprendidos. A compreensão dos conceitos do Cálculo, a falta de conexão com aplicações, a falta de habilidades na resolução de problemas, a quantidade de conteúdo a ser ensinado e a complexidade do tema, são alguns dos desafios enfrentados por professores e estudantes. No entanto, com estratégias didáticas adequadas tendo por base teorias de ensino e de aprendizagem, como por exemplo, a teoria APOS, utilizada neste estudo, e, com abordagens mais contextualizadas, é possível superar essas dificuldades, tornar o ensino mais interessante aos estudantes e acionar processos que produzem uma aprendizagem efetiva com mais significado sobre os conceitos do Cálculo.

## REFERÊNCIAS

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. R. O ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Educação Superior**, Passo Fundo (RS), v. 2, n. 4, p. 46-57, 2016.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. v. 1, 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

ARNON, I. et al. **APOS Theory**: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014.

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? *In*: Holton, D. (Org.) **The teaching and learning of Mathematics at University Level**: An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 207-220.

ASIALA, M. et al. A framework for research and development in undergraduate mathematics education. **Research in Collegiate Mathematics Education**, n. 2, p. 1-32, 1996.

ASIALA, M. *et al*. The development of students' graphical understanding of the derivative. **Research in Collegiate Mathematics Education**, p. 1-37, 2001.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**.1999.195p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto, 1994.

BOIGRES, F. J.; LLINARES, S.; ESTRUCH, V. D. Desarrollo de un esquema de la integral definida em estudiantes de ingenierias relacionadas com las ciências de la naturaleza. **RELIME**, Ciudad de México (México), v. 13, n. 3, p. 255-282, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Parecer CNE/CES nº: 1/2019, Brasília, DF, 2019.

CAMARENA, P. Didáctica de la Matemática en Contexto. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 1-26, 2017.

DUBINSKY, E. Applying a piagetian perspective to post-secondary mathematics education. In: **Secundaria Educacion Matematicas**, v. 3, n. 8, 1986.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In*: TALL, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,1991.

HALLIDAY, D., RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**: Mecânica, v. 1, 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

ELMÔR FILHO, G. *et al*. **Uma nova sala de aula é possível**: aprendizagem ativa na educação em engenharia. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

LIMA, G. L. *et al*. O modelo didático da Matemática em Contexto como possibilidade para um ensino de Matemática consonante às novas Diretrizes Curriculares Nacionais. *In*: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia COBENGE, 2019, Fortaleza (CE). **Anais** [...] Fortaleza. ABENGE, 2019, p. 1-9.

LIMA, G. L. Em busca de uma identidade para a disciplina de Cálculo: primeiras reflexões. *In*: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática SIPEM, Pirenópolis (GO). **Anais** [...], Pirenópolis, 2015, p. 1-12.

MAHARAJ, A. An APOS Analysis of Natural Science Students' Understanding of Integration. REDIMAT. **Journal of Research in Mathematics Education**, Estados Unidos, v. 3, n. 1, p. 54-73, 2014.

MOLON, J. **Cálculo no ensino médio**: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra. 2013. 198 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MORENO, M. M. M. El papel de la didáctica em la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *In*: Simpósio de La Sociedad Española de Investigación em Educatión Matemática, 9., 2005, España. **Anais** [...] España: Universidad de Córdoba, 2005, p. 81-96.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Da derivada clássica à derivada fraca: um estudo com base na decomposição genética dos conceitos. **Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 20, n. 5, p. 748-766, 2018.

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Derivadas Parciais: um estudo com base na teoria APOS. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina (PR), v. 13, n. 1, p. 26-34, 2020.

RESENDE, W. M. **O Ensino do Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003.450 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROSA, C. M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. F. T. Desempenho acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um estudo de caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, Campinas (SP), v. 5, p. 1-16, 2019.

SANCHES-MATAMOROS, G., GARCÍA, M.; LLINARES, S. La compreesión de la derivada como objeto de investigación em didáctica de la matemática. **RELIME**. Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, Ciudad de México (México), v. 11, n. 2, p. 267-296, 2008.

SANCHES-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. Algunos indicadores Del desarrollo del esquema de derivada de uma función. **Bolema**. Rio Claro (SP),v. 127, n. 45, p. 281-302, 2013.

SANTOS, R. M. B. et al. Análise do índice de retenção da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I no IFPB – Campus Cajazeiras e proposta de intervenção didático-pedagógica a partir do serviço da web 'Google Sala de Aula'. **Revista Principia**, João Pessoa (PB), v. 50, p. 11-22, 2020.

SOARES, E. M. S.; LIMA, I. G.; SAUER, L. Z. Discutindo alternativas para ambientes de aprendizagem de Matemática para cursos de Engenharia. *In*: World Congress on Engineering and Technology Education, São Paulo. **Anais** [...]São Paulo, 2004**,** p. 1159-1162.

TRIGUEROS, M.; MARTINEZ-PLANELL, R. Las funciones de dos variables: análises mediante los resultados del diálogo entre la teria APOS y la TAD. **Enseñanza de lãs Ciencias**, Barcelona (Espanha), v. 33, n. 2, p. 157-171, 2015.

VIEIRA, A. F. **Ensino de Cálculo Diferencial e Integral**: das técnicas ao humans-with-media. 2013.204 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

## Contribuição de Autoria


### 1 – Janice Rachelli

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, Professora do Centro de Ciências Naturais e Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria
https://orcid.org/0000-0002-1422-1838 • janicerachelli@gmail.com

Contribuição: Conceituação, Metodologia, Validação, Curadoria de dados, Análise formal, investigação, Recursos, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição, Visualização de dados, Supervisão e Administração do projeto.


### 2 – Vanilde Bisognin

Doutora em Matemática, Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana
https://orcid.org/0000-0001-5718-4777 • vanildebisognin@gmail.com

Contribuição: Análise formal, Investigação, Recursos, Curadoria de dados, Escrita – primeira redação, Escrita – revisão e edição, Visualização de dados e Supervisão.

## Como citar este artigo

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Esquemas cognitivos apresentados por estudantes universitários na resolução de problemas interdisciplinares de cálculo e física. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 46, e85704. DOI: 10.5902/2179460X85704. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X85704.