



UFSC



ISSN 2179-460X

OPEN ACCESS

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 47, e84238, 2025 • <https://doi.org/10.5902/2179460X84238>

Submissão: 26/06/23 • Aprovação: 31/10/23 • Publicação: 31/01/25

## Matemática

### Transitional Markov Chain Monte Carlo para estimação dos coeficientes de troca térmica de um dissipador térmico com microcanais

Transitional Markov Chain Monte Carlo for estimation of heat transfer coefficients in a microchannel heat sink

Lucas da Silva Asth<sup>1</sup> , Diego Campos Knupp<sup>1</sup> , Leonardo Tavares Stutz<sup>1</sup> ,  
Luiz Alberto da Silva Abreu<sup>1</sup> , Bruno Carlos Lugão<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, IPRJ/UERJ, RJ, Brasil

## RESUMO

Este trabalho aborda a metodologia Bayesiana para solucionar um problema inverso de transferência de calor em um dissipador térmico com microcanal. O problema direto envolve o cálculo do perfil de temperatura na placa, assim como a temperatura do fluido que escoar no microcanal, através de um modelo matemático simplificado do sistema físico em questão. O problema direto foi resolvido numericamente através do método de diferenças finitas explícito. O problema inverso em questão consiste em estimar os coeficientes de transferência de calor por convecção do sistema, no contexto da abordagem Bayesiana. O método de amostragem de Monte Carlo via Cadeias de Markov Transicional foi utilizado para amostrar a densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros do modelo. A metodologia proposta foi avaliada a partir de simulações numéricas envolvendo dados de temperatura corrompidos com ruído aditivo e diferentes modelos para os coeficientes de transferência de calor estimados. Também são apresentadas análises numéricas considerando dados observados de temperatura gerados a partir de um modelo completo implementado no *software* COMSOL Multiphysics. Os resultados apresentados mostram que a metodologia proposta foi capaz de estimar os coeficientes de transferência de calor nos diferentes cenários considerados.

**Palavras-chave:** Problemas conjugados de transferência de calor; Convecção interna; Microcanais; Problemas inversos; Inferência Bayesiana; Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov Transicional

## ABSTRACT

This work addresses a Bayesian methodology to solve an inverse heat transfer problem in a microchannel heat sink. The direct problem involves calculating the temperature profile on the plate, as well as the temperature of the fluid flowing in the microchannel, through a simplified mathematical



model of the physical system in question. The direct problem was numerically solved using the explicit finite difference method. The inverse problem in question consists of estimating the convective heat transfer coefficients of the system within the Bayesian framework. The Transitional Markov Chain Monte Carlo was used to sample the posterior probability density function of the model parameters. The proposed methodology was evaluated from numerical simulations involving temperature data corrupted with additive noise and different models for the estimated heat transfer coefficients. Numerical analyzes are also presented considering observed temperature data generated from a complete model implemented in *software* COMSOL Multiphysics. The presented results show that the proposed methodology was able to estimate the heat transfer coefficients in the different considered scenarios.

**Keywords:** Conjugate heat transfer; Internal convection; Microchannels; Inverse problems; Bayesian inference; Transitional Monte Carlo Markov Chain Method

## 1 INTRODUÇÃO

Com o grande avanço do desenvolvimento tecnológico no setor de microprocessadores e circuitos integrados, houve um aumento na capacidade de processamento de dados, em conjunto com a diminuição física dos aparelhos. Isso resulta em maior geração de calor através do Efeito Joule, elevando a temperatura de seus componentes, podendo ocasionar um maior número de falhas e uma redução da vida útil do conjunto (Mercone et al., 2005), havendo, por consequência, uma maior necessidade de gerenciamento térmico destes equipamentos. Uma solução ainda em desenvolvimento consiste no resfriamento líquido, que tem o intuito de elevar o coeficiente de transferência de calor por convecção através da passagem de um fluido refrigerante através de microcanais em uma placa acoplada ao microprocessador (Tuckerman & Pease, 1981; Yarin et al., 2009; Cotta et al., 2016). Tuckerman & Pease (1981) demonstram com sucesso a aplicação de dispositivos miniaturizados na refrigeração de eletrônicos que geram grande fluxo de calor, utilizando água como fluido refrigerante em um dissipador de calor baseado em microcanais. A utilização de mini e microcanais proporciona uma área de transferência de calor muito maior em relação ao volume de fluido, resultando em uma transferência de calor mais eficiente em comparação a sistemas em macro escala (Chen et al., 2022).

A estimação de coeficientes de transferência de calor por convecção, com base em medições de temperatura na superfície externa é um problema desafiador, com aplicações em várias áreas da engenharia (Bazán et al., 2019). Técnicas explícitas (diretas) de estimação de propriedades termofísicas podem ser difíceis ou até mesmo

inviáveis de se implementar na prática. Isso se deve ao fato, em um contexto geral, dessas propriedades poderem apresentar variação espacial e/ou temporal, envolverem fluxos de calor, coeficientes de troca térmica, além de o sistema poder apresentar geometria complexa e envolver altas temperaturas e riscos operacionais (Mota et al., 2010; Ozisik & Orlande, 2021). Aplicar medidas observadas de temperatura juntamente com algoritmos numéricos, é outra maneira de estimar esses coeficientes de transferência de calor. Nessa técnica, a temperatura é medida em algumas localizações apropriadas do corpo, sem afetar as condições de camada limite ou superfície, onde a sensibilidade ao parâmetro desconhecido é desejável (Razzaghi et al., 2019). Neste trabalho, são consideradas medições de temperatura, sendo tomadas na superfície externa da placa, que se encontra em contato com o ambiente, mas de forma não intrusiva nesta região (Bokar & Ozisik, 1995; Parwani et al., 2012; Ozisik & Orlande, 2021). Dessa maneira, deseja-se obter boas estimativas para os parâmetros de interesse com metodologias de formulação e solução de problemas inversos.

Neste trabalho, o problema inverso de estimação dos coeficientes de transferência de calor por convecção do sistema é formulado no contexto da Inferência Bayesiana. Nessa abordagem, os parâmetros incertos do sistema são modelados como variáveis aleatórias e suas incertezas são codificadas por meio de densidades de probabilidade (Kaipio & Somersalo, 2006; Ozisik & Orlande, 2021). A solução do problema inverso consiste na inferência da densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros incertos. Para a amostragem da densidade de probabilidade a posteriori será utilizado o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov Transicional (*Transitional Markov Chain Monte Carlo* - TMCMC). Esse método amostra densidades de probabilidade intermediárias com geometrias mais simples, partindo da densidade a priori, e gradualmente converge para a densidade a posteriori, permitindo uma maior eficiência na amostragem de densidades com geometrias mais complexas (Ching & Chen, 2007).

O trabalho em questão tem por objetivo estimar o coeficiente de troca de calor por convecção do escoamento interno no microcanal, assim como o coeficiente de troca de calor por convecção com o ambiente. Análises numéricas da abordagem proposta foram conduzidas considerando-se três casos distintos de estimação de

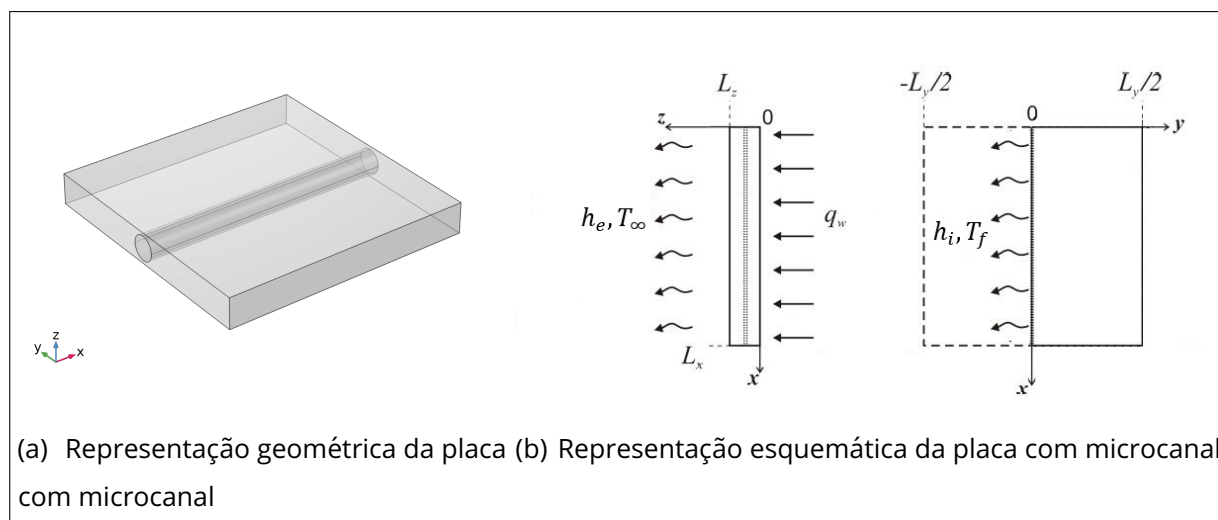
parâmetros: (1) Os coeficientes de troca térmica de convecção são constantes em todo o domínio; (2) O coeficiente de convecção do escoamento interno apresenta uma variação espacial linear; (3) O coeficiente de convecção do escoamento interno apresenta uma variação espacial quadrática. Na solução do problema inverso foram utilizados dados experimentais sintéticos obtidos de duas maneiras distintas. Primeiramente, utilizou-se o próprio modelo do problema direto para a geração dos dados de temperatura observados (*crime inverso*). No segundo caso, os dados observados foram obtidos a partir de um modelo mais complexo, em três dimensões, implementado no *software* COMSOL Multiphysics. Em ambos os casos, os dados experimentais sintéticos (dados observados) considerados apresentam ruído de observação, com distribuição normal de média nula e variância conhecida, simulando medições de temperatura obtidas por termografia.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Problema Físico e Modelos Matemáticos

O fenômeno físico estudado consiste no aquecimento de uma placa polimérica com um único microcanal, através de uma resistência elétrica que simula um microprocessador. A modelagem desse fenômeno leva em conta o problema de convecção forçada no interior do microcanal e o problema de convecção externa nas paredes, em conjunto com o problema de condução de calor na matriz do dissipador. A Figura 1 representa de forma esquemática o modelo físico do problema conjugado de condução-convecção na placa. É considerada uma placa de poliéster, com dimensões laterais  $L_x$  e  $L_y$  e espessura  $L_z$ . A placa está sujeita a um fluxo de calor uniforme e constante  $q_w$ , aplicado em sua face inferior ( $z = 0$ ), enquanto sua face superior ( $z = L_z$ ) troca calor por convecção natural com o ambiente. Os demais contornos da placa trocam calor por convecção com o ambiente. Deve-se enfatizar que, em  $z = L_z$ , a troca de calor ocorre apenas por convecção, sendo o termo radiativo desconsiderado.

Figura 1 – Representação do problema direto



Fonte: autores (2025)

De maneira a simplificar o problema, foi assumida simetria em relação ao plano  $xz$ . No modelo simplificado, considera-se a placa termicamente fina, de modo a se desprezar a direção  $z$  a partir de uma formulação de parâmetros concentrados (*lumped analysis*) (Cotta & Mikhailov, 1997). Assim, o problema de escoamento no microcanal é modelado através de uma condição de contorno de terceiro tipo com coeficiente de transferência de calor  $h_i(x)$ , como indicado na Figura 1(b). Logo, o modelo bidimensional simplificado que descreve a temperatura na placa pode ser escrito como

$$\rho c_p \frac{\partial T_p(x, y, t)}{\partial t} = k_p \left( \frac{\partial^2 T_p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + \frac{q_w}{L_z} - \frac{h_e}{L_z} (T_p(x, y, t) - T_\infty) \quad t > 0; 0 < x < L_x; 0 < y < \frac{L_y}{2} \quad (1)$$

onde  $T_p$  é a temperatura média da placa ao longo de sua espessura,  $k_p$  é a condutividade térmica da placa,  $h_e$  é o coeficiente de troca térmica por convecção entre a superfície superior da placa e o meio externo,  $h_i$  é o coeficiente de troca térmica por convecção entre a face do microcanal e o escoamento interno,  $T_f$  é a temperatura do fluido em escoamento no microcanal,  $T_\infty$  é a temperatura ambiente,  $T_0$  é a temperatura inicial da placa,  $k_p$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  são a condutividade térmica, a densidade e o calor específico da matriz do dissipador, respectivamente, e  $q_w$  é o fluxo de calor imposto pela resistência elétrica na superfície inferior da placa.

As condições de contorno são definidas como

$$k_p \frac{\partial T_p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_e(T_p(x, y, t) - T_\infty) \quad (2a)$$

$$k_p \frac{\partial T_p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h_e(T_\infty - T_p(x, y, t)) \quad (2b)$$

$$k_p \frac{\partial T_p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = f_f h_i(x) (T_p(x, 0, t) - T_f(x, t)) \quad (2c)$$

$$k_p \frac{\partial T_p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\frac{L_y}{2}} = h_e(T_\infty - T_p(x, y, t)) \quad (2d)$$

$$(2e)$$

e a condição inicial é dada por

$$T_p(x, y, t = 0) = T_0 \quad (3)$$

Como o fluxo de calor gerado pela resistência é dissipado para ambos os lados, o fluxo efetivo incidente na placa é considerado como sendo apenas metade do fluxo total gerado pela resistência. O coeficiente  $f_f$  representa um fator de forma, responsável por corrigir a aproximação da superfície de contato do escoamento com a placa, calculado através da razão da área superficial do semi-cilindro (metade do microcanal) e a área da seção transversal da placa.

$$f_f = \frac{\pi R_i}{L_z}$$

onde  $R_i$  representa o raio do microcanal.

A equação diferencial que governa a distribuição de temperaturas no fluido, que escoar em regime laminar no interior do microcanal, é dada por

$$\rho C_{p_f} \left( \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial x} \right) = k_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right) \quad (4)$$

$$t > 0; \quad 0 < x < L_x; \quad 0 < r < R_i$$

onde  $u(r)$  é o perfil parabólico da velocidade plenamente desenvolvida. Um modelo unidimensional simplificado para a evolução da temperatura no interior do micro-canal é proposto, começando pela definição da temperatura média de mistura do fluido:

A condições de contorno são definidas como

$$T_f(x = 0, r, t) = T_{in} \quad (5a)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (5b)$$

$$T_f(x, r = R_i, t) = T_p(x, y = 0, t) \quad (5c)$$

e a condição inicial é dada por

$$T_f(x, r, t = 0) = T_{f,0}(x, r) \quad (6)$$

$$T_{f,b}(x, t) = \frac{2\pi \int_0^{R_i} ru(r)T_f(x, r, t)dr}{2\pi \int_0^{R_i} ru(r)dr} = \frac{2}{\bar{u}R_i^2} \int_0^{R_i} ru(r)T_f(x, r, t)dr$$

Sendo os transientes na micro-escala muito pequenos, o primeiro termo da equação (4), relacionado ao acúmulo de energia no fluido é negligenciado e, aplicando o operador  $\frac{2}{\bar{u}R_i^2} \int_0^{R_i} ru(r)(\cdot)dr$  nas equações (4), (5) e (6), obtém-se uma formulação clássica por parâmetros concentrados (*lumped analysis*) (Cotta & Mikhailov, 1997) para o problema de transferência de calor por convecção forçada, dada por:

$$\frac{\partial T_{f,b}(x, t)}{\partial x} = \frac{2h_i(x)}{\rho_f C_{pf} \bar{u} R_i} (T_p(x, 0, t) - T_f(x, t)), \quad t > 0; \quad 0 < x < L_x \quad (7)$$

$$T_{f,b}(x = 0, t) = T_{in} \quad (8)$$

onde  $h_i$  é o coeficiente de troca térmica por convecção, considerando o escoamento plenamente desenvolvido no canal, e  $\bar{u}$  representa a velocidade do escoamento (Pletcher et al., 2012), dada por

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R_i^2}$$

onde  $Q$  é a vazão no microcanal.

## 2.2 Solução do Problema Direto

A solução numérica para o sistema de equações da placa e do fluido (1), (2) e (3) e (7) e 8) será feita através do método de diferenças finitas em sua formulação explícita, pela implementação de um código computacional na linguagem de programação *Python* 3. Este método consiste em discretizar o domínio contínuo modelado por uma equação diferencial parcial. A EDP é convertida em equações algébricas fazendo uso da aproximação das derivadas como diferenças a partir da série de Taylor (Pletcher et al., 2012; Ozisik, 1994). Utilizou-se aproximações de segunda ordem nas derivadas espaciais e primeira ordem nas derivadas temporais, de acordo com o esquema Forward Time Centered Space (FTCS) para a equação da placa e Upwind de primeira ordem para a equação do fluido (Ozisik, 1994; Pletcher et al., 2012).

Para o esquema FTCS, tem-se:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (9a)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x^2)} \quad (9b)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y^2)} \quad (9c)$$

onde o índice  $n$  representa o instante na malha temporal, enquanto os índices  $i$  e  $j$  representam as posições espaciais, nas malhas de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Dessa maneira,  $T_{i,j}^n$  é a temperatura do nó da malha discretizada na posição  $i, j$  e no instante de tempo  $n$ .

Para o esquema *Upwind*, aplicado na equação do fluido, tem-se

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (10)$$



Substituindo a equação (10) na equação (7) obtém-se a expressão da aproximação para equação do fluido, dada por:

$$T_{fi}^n = \frac{1}{1 + r_{up}} (T_{fi}^n + r_{up} T_{pi,0}) \quad (11a)$$

$$r_{up} = \frac{2hi\Delta x}{\rho_f c_f \bar{u} R_i} \quad (11b)$$

Substituindo as equações (9a), (9b) e (9c) na equação (1), tem-se a expressão para os nós internos da malha espacial da placa, dada por:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n) + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n) + \frac{q_w \Delta t}{L_z \rho c_p} + \frac{h_e \Delta t}{L_z \rho c_p} (T_{i,j}^n - T_\infty) \quad (12)$$

Onde  $\alpha = k/\rho c_p$  é a difusividade térmica do material, que é a razão do transporte difusivo pela taxa de energia armazenada. Utilizando então a estratégia de nós fictícios para discretização dos contornos do problema, obtém-se um sistema de equações algébricas utilizadas no processo iterativo de solução computacional.

## 2.3 Problema Inverso

O problema inverso abordado no presente trabalho visa a estimativa dos coeficientes de transferência de calor por convecção  $h_i$  e  $h_e$  via inferência Bayesiana. Nessa abordagem, os parâmetros incertos  $h_i$  e  $h_e$  são considerados variáveis aleatórias e o objetivo reside na determinação da função densidade de probabilidade a posteriori desses parâmetros, a partir de dados de temperatura observados. Uma vez determinada a densidade de probabilidade a posteriori, propriedades estatísticas como valor médio, desvio padrão e intervalo de credibilidade podem ser obtidas.

De acordo com o teorema de Bayes, a densidade de probabilidade a posteriori conjunta dos parâmetros incertos do modelo é dada por (Kaipio & Somersalo, 2006).

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (13)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor contendo os parâmetros incertos,  $\mathbf{Y}$  é o vetor contendo os dados observados,  $\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})$  é a função de verossimilhança,  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  é a função densidade de probabilidade a priori dos parâmetros, que descreve a informação que se tem sobre

os mesmos antes de se considerar qualquer informação sobre os dados observados, e  $\pi(\mathbf{Y})$  é a verossimilhança marginal (evidência do modelo), que desempenha um papel de uma constante de normalização, quando a densidade a posteriori é explorada por métodos de amostragens.

Considerando os erros de medição como aditivos, independentes dos parâmetros incertos e seguindo uma distribuição Gaussiana de probabilidade, com média zero e matriz de covariância  $\mathbf{W}$  conhecida, a função de verossimilhança é dada por

$$\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_d}} \sqrt{\det \mathbf{W}}} \exp \left( -\frac{1}{2} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})] \right) \quad (14)$$

onde  $N_d$  é o número de dados observados considerado na análise inversa, que corresponde ao número de componentes do vetor  $\mathbf{Y}$ , que contém a resposta observada, e do vetor  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})$ , que contém a resposta prevista pelo modelo.

Embora a Eq. (14) represente o modelo probabilístico completo para obtenção de informações sobre os parâmetros incertos do modelo, na maioria dos casos ela é intratável analiticamente. Portanto, para se obter informações sobre a função densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros, pode-se recorrer a métodos de amostragem, como os métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC). No presente trabalho, o algoritmo de amostragem de Monte Carlo via Cadeia de Markov Transicional (*Transitional Markov Chain Monte Carlo*) foi considerado para amostragem da função densidade de probabilidade a posteriori.

### 2.3.1 Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov Transicional - TMCMC

O método TMCMC inicia gerando  $N_s$  amostras independentes da densidade de probabilidade a priori  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  dos parâmetros incertos. Nos estágios intermediários, as densidades de probabilidade amostradas são gradualmente modificadas de modo que, no último estágio do método, a densidade amostrada é a densidade alvo, ou seja, a densidade a posteriori  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$ .

Em um estágio  $j$  do método, onde  $j = 0, \dots, m$ , a densidade de probabilidade amostrada é dada por

$$\pi_j(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) \propto \pi(\boldsymbol{\theta}) \pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})^{q_j}$$

onde  $q_j \in [0, 1]$  é tal que  $q_0 = 0 < q_1 < \dots < q_m = 1$ , sendo  $m$  a quantidade total de estágios considerada. Consequentemente, para  $j = 0$ ,  $\pi_0(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  é a densidade a priori  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  e para  $j = m$ ,  $\pi_m(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  se torna a distribuição a posteriori  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$ . Assim, o método TMCMC gradualmente empurra as amostras da priori para a posteriori, a partir de uma transição de distribuições (Betz et al., 2016). A velocidade desta transição é controlada pelo coeficiente  $q_j$ . Ching & Chen (2007) propuseram a seleção de  $q_j$  de tal forma que o coeficiente de variação (CoV) de  $\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})^{q_{j+1}-q_j}$  seja aproximadamente igual a  $v_t$ , onde  $v_t$  é um valor prescrito desejado. O valor de  $q_{j+1}$  pode ser determinado como

$$q_{j+1} = \arg \min(|\text{CoV}_j(q) - v_t|) \quad (15)$$

onde  $\text{CoV}_j(q)$  é o coeficiente de variação do conjunto  $\{\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}_{j,k})^{q-q_j}\}$ , com  $k = 1, 2, \dots, N_s$  e  $\boldsymbol{\theta}_{j,k}$  denota a  $k$ -ésima amostra do estágio  $j$ .

O TMCMC utilizado neste trabalho é baseado no algoritmo proposto por Betz et al. (2016) e apresentado a seguir. Cumpre destacar que o presente trabalho aborda apenas o problema inverso de estimação de parâmetros. Problemas de seleção de modelos não são aqui abordados e, por este motivo, os passos do TMCMC utilizados para a determinação da evidência do modelo são omitidos do algoritmo apresentado no que segue.

1. Para  $j = 0$  e  $q_0 = 0$ , gere  $N_s$  amostras da distribuição a priori  $\pi(\boldsymbol{\theta})$ .
2. Encontre o valor de  $q_{j+1}$  a partir da Eq. (15). Se  $q_{j+1} > 1$  então faz-se  $q_j = 1$ .
3. Para todas as amostras  $k = 1, \dots, N_s$  calcule os pesos de plausibilidade  $w_{j,k}$ :

$$w_{j,k} = (\pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}))^{q_j - q_{j-1}} \quad (16)$$

4. Calcule a média dos pesos de plausibilidade como

$$S_j = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} w_{j,k} \quad (17)$$

## 5. Calcule a matriz de covariância da distribuição Gaussiana auxiliar

$$\Sigma_j = \beta^2 \sum_{k=1}^{N_s} \left[ \frac{w_{j,k}}{S_j N_s} (\boldsymbol{\theta}_{(j-1,k)} - \bar{\boldsymbol{\theta}}_j)(\boldsymbol{\theta}_{(j-1,k)} - \bar{\boldsymbol{\theta}}_j)^T \right] \quad (18)$$

onde

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_j = \frac{\sum_{l=1}^{N_s} w_{j,l} \boldsymbol{\theta}_{(j-1,l)}}{\sum_{l=1}^{N_s} w_{j,l}} \quad (19)$$

e  $\beta$  é um fator de escala.

6. Para cada  $l$  em  $\{1, \dots, N_s\}$ : faz-se:  $\boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c = \boldsymbol{\theta}_{(j-1,l)}$ . Após isso, para  $k = 1, \dots, N_s$ .

- Selecione aleatoriamente o índice  $l$  do conjunto  $\{1, \dots, N_s\}$ , onde cada  $l$  tem uma probabilidade  $\frac{w_{(j,l)}}{\sum_{n=1}^{N_s} w_{(j,n)}}$ .
- Propõe-se uma nova amostra  $\boldsymbol{\theta}^c$  a partir da densidade Gaussiana auxiliar com média  $\boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c$  e matriz de covariância  $\Sigma_j$ , dada pela Eq. (18).
- Gera-se uma amostra  $r$  de uma distribuição Uniforme entre  $[0, 1]$
- Se  $r \leq \frac{\pi_j(\boldsymbol{\theta}^c|\mathbf{Y})}{\pi_j(\boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c|\mathbf{Y})}$ , então  $\boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c = \boldsymbol{\theta}^c$ , caso contrário não faz-se nada.
- Faz-se  $\boldsymbol{\theta}_{(j,k)} = \boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c$
- faça  $w(j, l) = \pi(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}_{(j,l)}^c)^{q_j - q_{j-1}}$

7. O valor do fator de escala  $\beta$  é então escolhido de forma adaptativa, conforme apresentado a seguir.

- No início de cada estágio de amostragem faça  $N_{adapt} = 1$ ; Performe  $N_a$  passos de MCMC
- Avalie o coeficiente  $c_a = (p_{acr} - t_{acr})/\sqrt{N_{adapt}}$ , onde  $p_{acr}$  é a taxa de aceitação média nos últimos  $N_a$  passos de MCMC e  $t_{acr}$  é a taxa alvo de aceitação.
- Modifique  $\beta$  baseado no valor de  $c_a$ . Faça  $\beta_{new} = \beta_{old} \cdot \exp(c_a)$ .
- Acrescente o valor de  $N_{adapt}$  em 1 e faça  $\beta_{old} = \beta_{new}$ .
- Repita o procedimento até que o número de amostras escolhido seja gerado.

É sugerido um valor  $N_a = 100$  (Betz et al., 2016).

8. Se  $q_j = 1$  então pare a iteração, caso contrário faça  $j = j + 1$  e retorne ao passo 2.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção apresenta resultados numéricos relacionados ao problema inverso Bayesiano de estimação dos coeficientes de transferência de calor por convecção de um dissipador térmico com microcanal, ilustrado na Figura 1. Como discutido em seções anteriores, esses coeficientes são difíceis de serem obtidos analiticamente ou até mesmo experimentalmente. Principalmente no caso do coeficiente  $h_i$  de transferência de calor por convecção, entre a face do microcanal e o escoamento interno, pelo fato de não se conhecer o comportamento do escoamento do fluido em toda a região do microcanal. Uma variação espacial deste termo é esperada pela natureza do problema em questão. Sendo assim, neste trabalho, foram considerados três modelos distintos para o coeficiente  $h_i$ , conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Modelos considerados para o coeficiente do troca térmica  $h_i$

Modelo	Descrição	Vetor de parâmetros incertos
$\mathcal{M}_0$	$h_i(x) = c$	$\theta = [c, h_e]^T$
$\mathcal{M}_1$	$h_i(x) = bx + c$	$\theta = [b, c, h_e]^T$
$\mathcal{M}_2$	$h_i(x) = ax^2 + bx + c$	$\theta = [a, b, c, h_e]^T$

Fonte: autores (2024)

Nas análises numéricas apresentadas a seguir, foram considerados dados observados (*dados experimentais sintéticos*) de temperatura, obtidos a partir da resposta de um modelo de referência acrescida de um ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão de 0,3 °C. Serão abordados 6 casos distintos. Nos Casos 1A, 2A e 3A, os modelos de referência, utilizados para a geração dos dados observados, são iguais aos modelos considerados no processo de inversão, situação comumente denominada de *crime inverso*. Sendo assim, nesses casos, os parâmetros incertos do modelo no processo de inversão possuem valores de referência, que são os valores dos parâmetros utilizados na geração dos dados observados. Os modelos de referência, assim como os valores de referência dos parâmetros, utilizados na geração dos dados observados nos Casos 1A, 2A e 3A são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Modelos e parâmetros de referência para a geração dos dados observados nos Casos 1A, 2A e 3A

Caso	Modelo de Referência	Parâmetros de Referência	Valores de Referência
1A	$\mathcal{M}_0$	$\theta = [c, h_e]^T$	$[750; 15]^T$
2A	$\mathcal{M}_1$	$\theta = [b, c, h_e]^T$	$[-10; 950; 15]^T$
3A	$\mathcal{M}_2$	$\theta = [a, b, c, h_e]^T$	$[0, 5; -35; 1500; 15]^T$

Fonte: autores (2024)

Nos Casos 1B, 2B e 3B, os dados observados foram obtidos a partir de um modelo mais complexo, tridimensional, implementado no *software* COMSOL Multiphysics. Em todos os casos considerados, medidas de temperatura foram obtidas nas posições  $x = 0,02$  m, ao longo de  $y$ , e  $y = 0,0005$  m, ao longo de  $x$ . As medidas foram obtidas em 10 instantes de tempo, de 0 até o sistema atingir o regime permanente com incrementos de 30 segundos.

A Tabela 3 apresenta as propriedades termofísicas do fluido (água) e da placa (polímero). As dimensões da placa são  $L_x = L_y = 40$  mm,  $L_z = 1$  mm e o raio do microcanal  $R_i = 225$   $\mu$ m. Os demais parâmetros, considerados deterministicamente conhecidos, estão listados na Tabela 4.

Tabela 3 – Propriedades Térmicas da Água e do Polímero

Substância	$\rho c_p$ (J/m <sup>3</sup> K)	$k$ (W/mK)
Água	$4,187 \cdot 10^6$	0,6
Polímero	$1,565 \cdot 10^6$	0,158

Fonte: autores (2024)

Tabela 4 – Valores atribuídos aos parâmetros

Parâmetro	Valor
$T_i$	20°C
$T_\infty$	20°C
$T_0$	50°C
$q_w$	500 W/mK
$Q$	0,5 mL/min

Fonte: autores (2024)

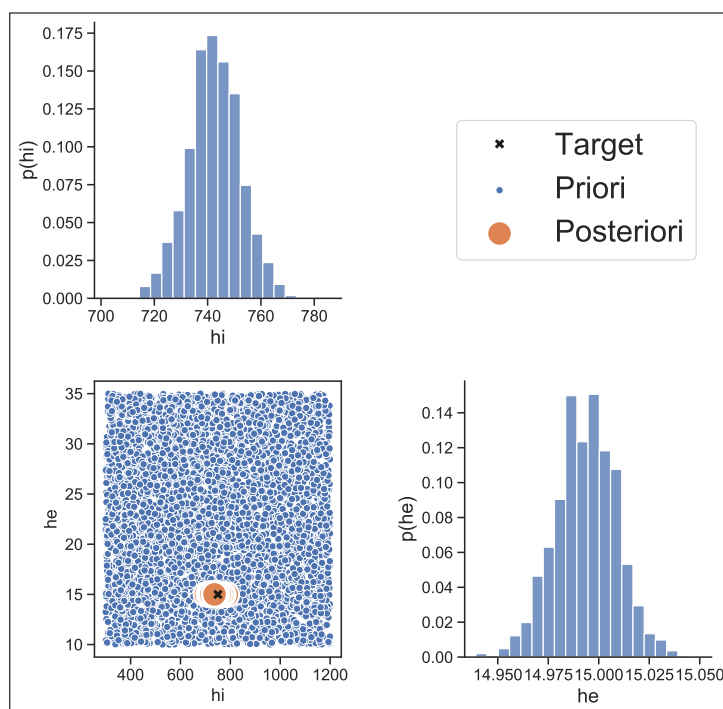
Em todos os casos considerados, os parâmetros do TMCMC foram adotados como  $N_s = 5000$  amostras por estágio e valor desejado do CoV dos pesos de plausibilidade  $v_t = 100\%$ . Os resultados apresentados foram obtidos por meio de códigos computacionais desenvolvidos em Python 3.

### 3.1 Caso 1A

No primeiro caso estudado, considerou-se o modelo  $\mathcal{M}_0$  tanto no processo de inversão quanto na geração dos dados experimentais sintéticos (ver Tabela 2). As funções densidade de probabilidade a priori dos parâmetros incertos do modelo foram adotadas como:  $h_i \sim \mathcal{U}[300, 1200]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ , onde  $\mathcal{U}[u_1, u_2]$  representa uma distribuição uniforme no intervalo entre  $u_1$  e  $u_2$ .

A Figura 2 apresenta as densidades de probabilidade marginais a posteriori, assim como a dispersão dos parâmetros incertos do modelo. Pode-se observar que as amostras da densidade a posteriori dos parâmetros apresentam médias aproximadamente iguais aos respectivos valores de referência, utilizados na simulação da resposta experimental sintética.

Figura 2 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráfico de dispersão dos parâmetros - Caso 1A



Fonte: autores (2024)

Algumas propriedades estatísticas dos parâmetros incertos, tais como média, coeficiente de variação (CoV) e intervalo de credibilidade (IC), são apresentadas na Tabela 5.

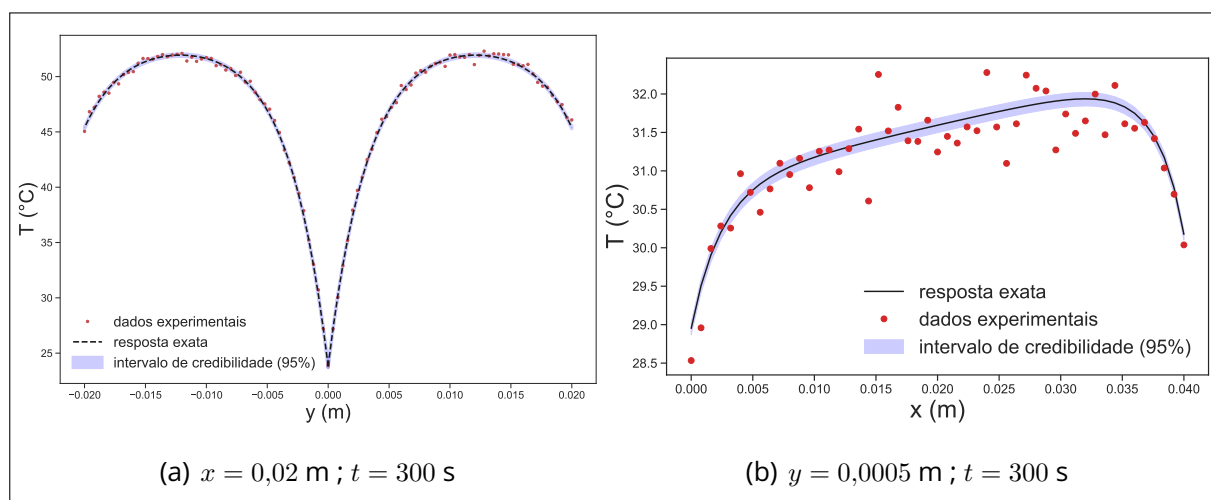
Tabela 5 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 1A

Parâmetro	Valor de Referência	Média	Erro (%)	CoV (%)	IC(95%)
$h_i$	750	752,11401	0,28	1,52	[729,65140; 774,57661]
$h_e$	15	15,00401	0,03	0,12	[14,96920; 15,03878]

Fonte: autores (2024)

Na Tabela 5, percebe-se que as médias dos valores amostrados para cada parâmetro apresentaram erros percentuais inferiores a 1%, em relação aos respectivos valores exatos. A dispersão dos parâmetros foi caracterizada por coeficientes de variação inferiores a 2%. Ademais, os intervalos de credibilidade dos parâmetros contiveram os correspondentes valores exatos. No processo de inversão, foram amostrados oito estágios. Contando todos os estágios, tem-se um total de 40.000 amostras, sendo que, apenas as últimas 5.000 amostras são, de fato, amostras da função densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros.

Figura 3 – Intervalo de 95% de Credibilidade da resposta do modelo - Caso 1A



Fonte: autores (2024)

A Figura 3 apresenta os dados experimentais simulados e o intervalo de credibilidade de 95% associado às curvas de temperatura previstas pelo modelo ajustado. Para fins de comparação, a curva de temperatura obtida com o modelo de



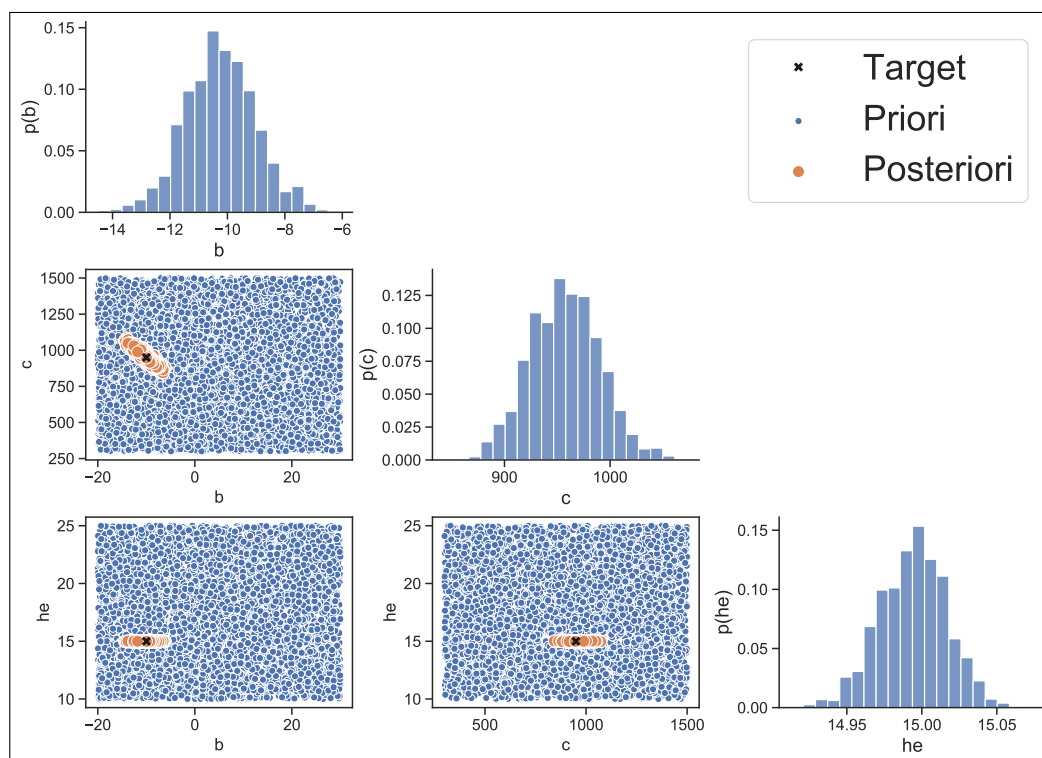
referência (resposta exata) também é apresentada. Da Figura 3, observa-se claramente um bom ajuste entre as temperaturas previstas pelo modelo e os dados experimentais simulados, inclusive na região próxima ao microcanal.

### 3.2 Caso 2A

Neste caso, considerou-se o modelo  $\mathcal{M}_1$  tanto no processo de inversão quanto na geração dos dados experimentais sintéticos. As funções de densidade de probabilidade a priori foram adotadas como:  $b \sim \mathcal{U}[-20, 30]$ ,  $c \sim \mathcal{U}[300, 1500]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ .

As funções densidade de probabilidade marginais a posteriori dos parâmetros do modelo e os correspondentes gráficos de dispersão são apresentados na Figura 4.

Figura 4 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráficos de dispersão dos parâmetros - Caso 2A



Fonte: autores (2024)

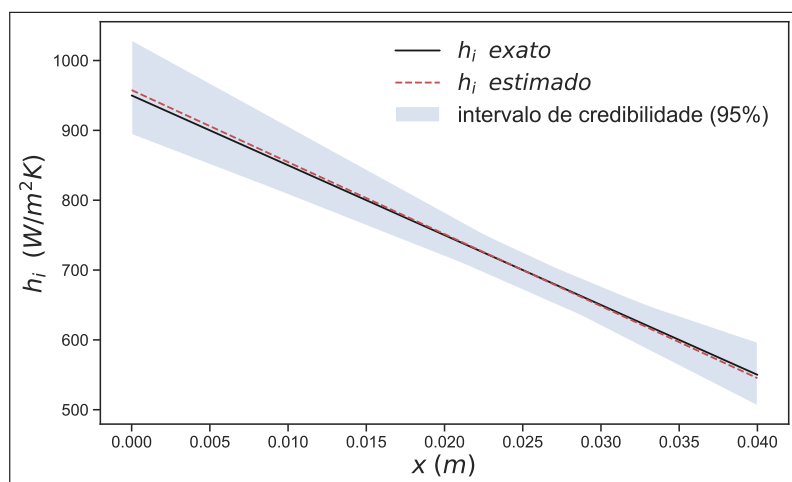
As propriedades estatísticas dos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_1$ , para o Caso 2A, são apresentadas na Tabela 6. Como pode ser observado, estimativas acuradas foram obtidas para os parâmetros do modelo, com desvios relativos menores do que 4%. Observa-se também que o intervalo de credibilidade estimado engloba os correspondentes valores de referência dos parâmetros.

Tabela 6 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 2A

Parâmetro	Valor de Referência	Média	Erro (%)	CoV (%)	IC(95%)
$b$	-10	-10,31097	3,11	11,77	[-11,63187; -8,95401]
$c$	950	957,67154	0,81	3,42	[920,60484; 992,58707]
$h_e$	15	14,99778	0,15	0,17	[14,95826; 15,04173]

Fonte: autores (2024)

A Figura 5 apresenta a curva de referência do coeficiente de troca térmica no microcanal e a correspondente curva estimada no processo de inversão, juntamente com o seu intervalo de credibilidade de 95%.

Figura 5 – Intervalo de 95% de Credibilidade do coeficiente de troca térmica  $h_i(x)$  - Caso 2A

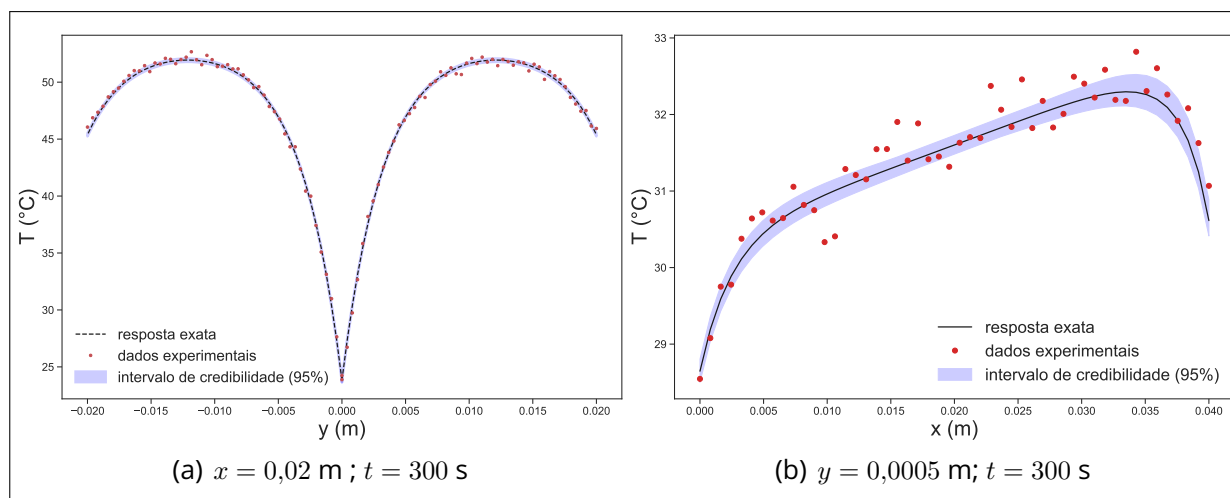
Fonte: autores (2024)

Os dados experimentais simulados e o intervalo de credibilidade de 95% associado às curvas de temperatura previstas pelo modelo são apresentados na Figura 6. Novamente, pode-se observar um bom ajuste entre as temperaturas previstas pelo modelo e os dados experimentais simulados, inclusive na região próxima ao microcanal.

### 3.3 Caso 3A

As funções de densidade de probabilidade a priori para os parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_2$ , no Caso 3A, foram adotadas como:  $a \sim \mathcal{U}[0, 1.5]$ ,  $b \sim \mathcal{U}[-52, -10]$ ,  $c \sim \mathcal{U}[1000, 1800]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ .

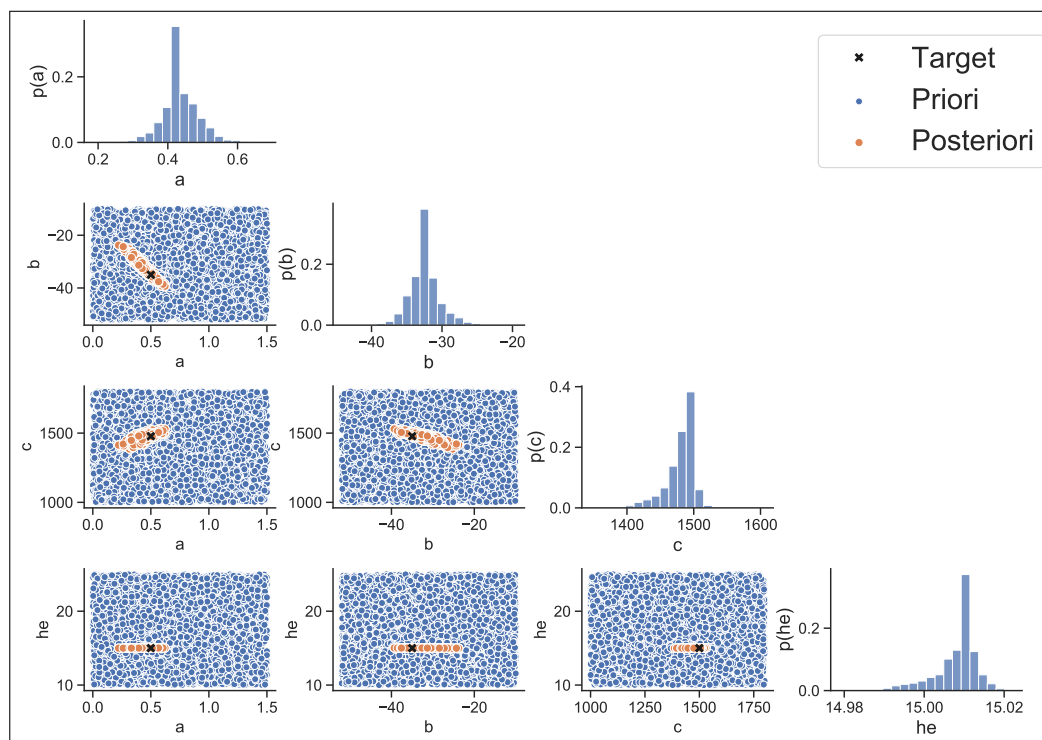
Figura 6 – Intervalo de 95% de Credibilidade da resposta do modelo - Caso 2A



Fonte: autores (2024)

As funções densidade de probabilidade marginais a posteriori, assim como a dispersão dos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_2$ , são apresentadas na Figura 7. Percebe-se, neste caso, uma maior dispersão das amostras da densidade a posteriori em torno dos correspondentes valores de referência.

Figura 7 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráficos de dispersão dos parâmetros - Caso 3A



Fonte: autores (2024)

As propriedades estatísticas dos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_2$ , para o Caso 3A, são apresentadas na Tabela 7.

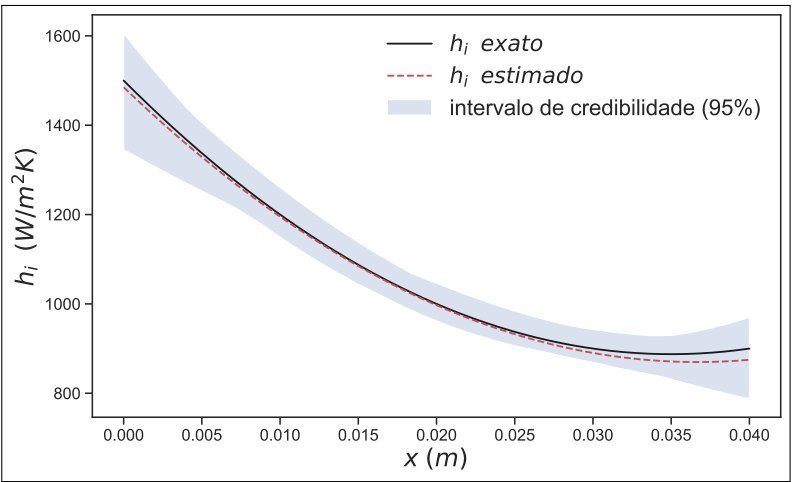
Tabela 7 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 3A

Parâmetro	Valor de Referência	Média	Erro (%)	CoV (%)	IC(95%)
$a$	0,5	0,43738	8.52	16.49	[0.28921, 0.56557]
$b$	-35	-33,54960	4.14	9.77	[-37.59494, -25.50427]
$c$	1500	1485.06977	0.99	2.13	[1384.53017, 1505.60937]
$h_e$	15	15.00230	0.007	0.05	[14.98429, 15.01344]

Fonte: autores (2024)

A Figura 8 apresenta a curva de referência do coeficiente de troca térmica no microcanal e a correspondente curva estimada, juntamente com o seu intervalo de credibilidade de 95%. Pode-se observar claramente a estimativa acurada do coeficiente de troca térmica no microcanal, obtida no processo de inversão para este caso.

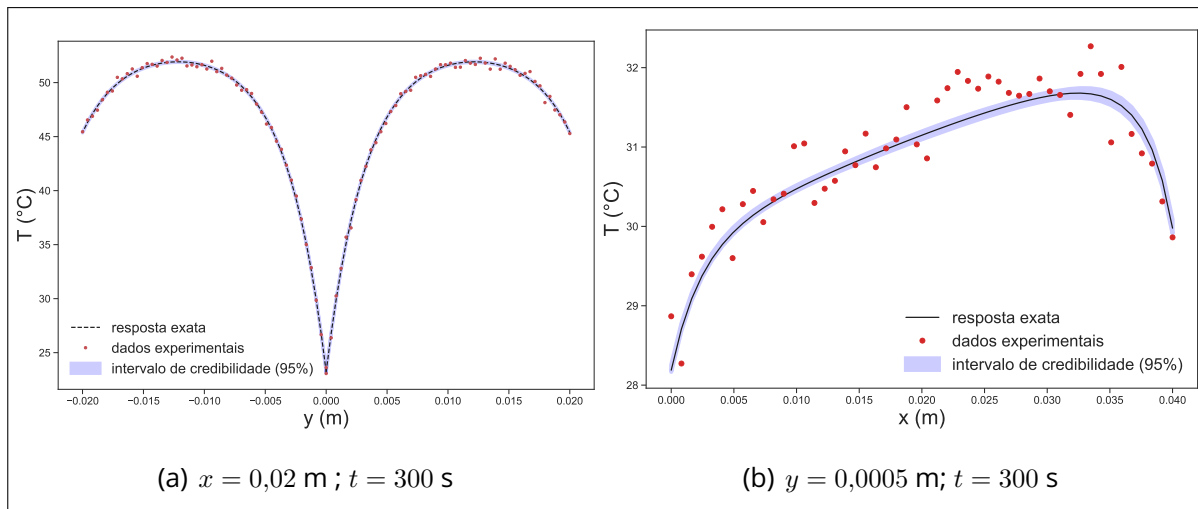
Figura 8 – Intervalo de 95% de Credibilidade do coeficiente de troca térmica  $h_i(x)$  - Caso 3A



Fonte: autores (2024)

A Figura 9 apresenta os dados experimentais simulados e o intervalo de credibilidade de 95% associado às curvas de temperatura previstas pelo modelo, no caso em questão. Um bom ajuste entre as temperaturas previstas e os dados experimentais simulados pode ser observado em toda a região considerada.

Figura 9 – Intervalo de credibilidade de 95% da resposta do modelo - Caso 3A



Fonte: autores (2024)

A Tabela 8 apresenta o número de estágios e o custo computacional do algoritmo TMCMC para a amostragem da densidade de probabilidade a posteriori nos Casos 1A, 2A e 3A.

Tabela 8 – Número de estágios e custo computacional nos Casos 1A, 2A e 3A

Caso	Número de estágios	Custo Computacional
1A	8	$\approx 2\text{h } 5 \text{ min}$
2A	11	$\approx 2\text{h } 53 \text{ min}$
3A	11	$\approx 3\text{h } 5 \text{ min}$

Fonte: autores (2024)

Na sequência, serão apresentados resultados de estimação dos parâmetros dos modelos apresentados na Tabela 1, porém com medições de temperatura obtidas a partir de um experimento simulado que considera um modelo tridimensional mais complexo e preciso do problema em questão. O modelo foi desenvolvido no *software* COMSOL Multiphysics 6.0, com o objetivo de simular dados experimentais mais realistas e também para evitar o *crime inverso*.

O experimento simulado consiste na solução do problema tridimensional representado na Figura 1(a), com física de condução de calor em sólidos e um estudo de regime transiente. Para representar o escoamento no microcanal, foram impostas condições de contorno de convecção na face interna do cilindro (microcanal) com  $h_i(x)$

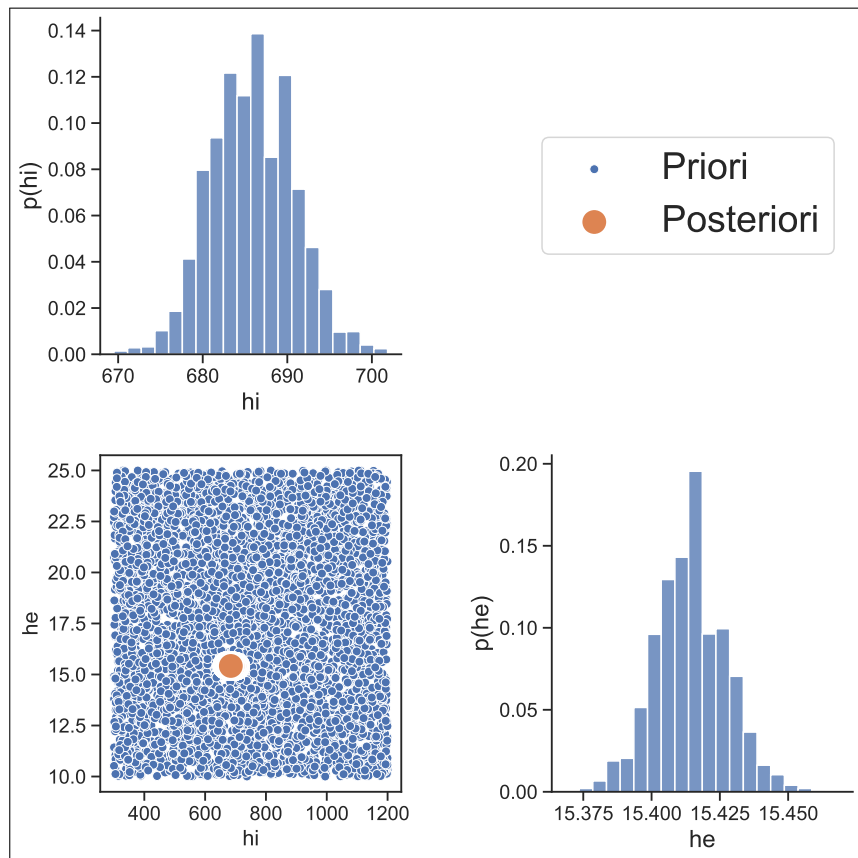
definido de acordo com os casos-teste de referência. Três casos foram considerados (1B, 2B e 3B) com  $h_i(x)$  seguindo, respectivamente, as funções apresentadas na Tabela 1. Valores iguais aos apresentados na Tabela 2 foram utilizados para os correspondentes parâmetros na definição do coeficiente de troca térmica no microcanal. Foi escolhida então uma malha de elementos finitos extra-fina, tetraédrica, com geração automática selecionando a opção *Physics-controlled mesh*. Cumpre destacar que, nos casos a seguir, embora as funções apresentadas na Tabela 1 tenham sido utilizadas para definir o coeficiente de troca térmica no microcanal do modelo tridimensional, os parâmetros incertos dos modelos utilizados no processo de inversão ( $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ ) não possuem valores de referência, uma vez que há discrepâncias de modelagem que não foram consideradas na formulação do problema inverso. Ou seja, devido às discrepâncias entre os modelos utilizados na inversão e o modelo utilizado para a geração dos dados experimentais simulados, os valores estimados para os parâmetros incertos podem divergir dos valores utilizados para a definição do coeficiente de troca térmica. Abordagens que consideram a discrepância do modelo na formulação de problemas inversos de estimação de parâmetros podem ser encontradas nos trabalhos de Kennedy & O'Hagan (2001) e Ramancha et al. (2022), dentre outros.

Para a solução do problema inverso, foram utilizados dados experimentais simulados extraídos da face superior da placa ( $z = L_z$ , Figura 1(a)). Esse procedimento replica a aquisição de medidas de temperatura através de termografia por infravermelho, pois no caso de um experimento real, esta seria a face exposta e, portanto, facilmente acessível para obtenção de medidas experimentais.

### 3.4 Caso 1B

As funções de densidade de probabilidade a priori para os parâmetros do modelo utilizado no processo de inversão ( $\mathcal{M}_0$ ) foram adotadas como:  $h_i \sim \mathcal{U}[300, 1200]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ . Cabe ressaltar que, diferentemente dos casos anteriores, neste caso há uma discrepância entre o modelo utilizado na inversão e o modelo utilizado para a geração dos dados experimentais simulados (modelo tridimensional). A Figura 10 ilustra as densidades de probabilidade marginais a posteriori, assim como a dispersão dos parâmetros do modelo.

Figura 10 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráfico de dispersão dos parâmetros - Caso 1B



Fonte: autores (2024)

Tabela 9 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 1B

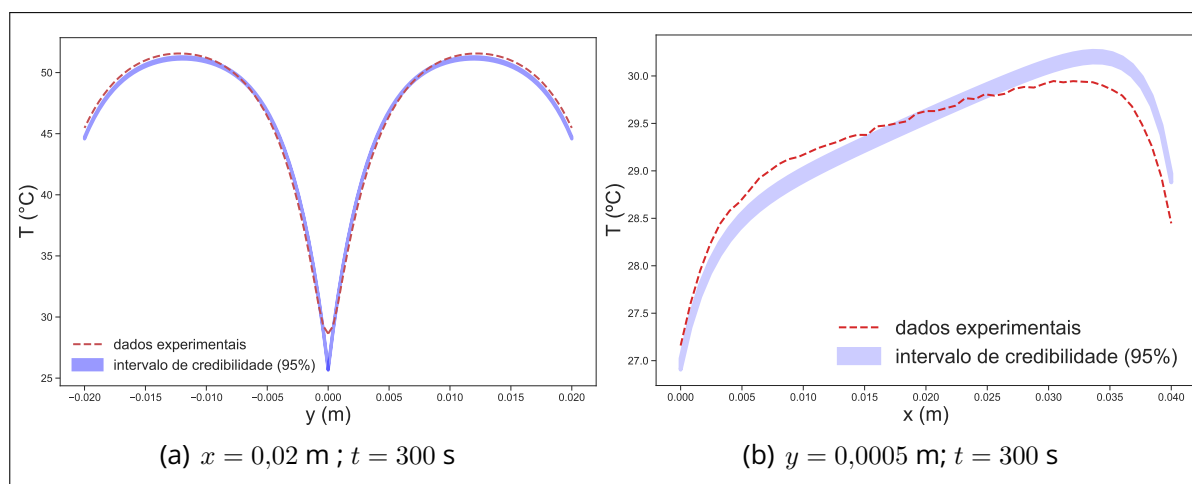
Parâmetro	Valor COMSOL	Média	CoV (%)	IC(95%)
$h_i$	750	685,91382	0,71	[676,35759; 695.47004]
$h_e$	15	15,41447	0,08	[15,38877; 15,44018]

Fonte: autores (2024)

As propriedades estatísticas referentes aos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_0$ , para o Caso 1B, são apresentadas na Tabela 9. Pode-se observar que, neste caso, o valor estimado para o coeficiente de troca térmica do microcanal é próximo do valor utilizado no modelo tridimensional, com desvio relativo menor do que 10%. Entretanto, o intervalo de credibilidade estimado não engloba o valor do coeficiente de troca térmica do microcanal no modelo tridimensional. Isso se deve à discrepância existente entre os modelos não considerada na formulação do problema inverso. No

entanto, na Figura 11, fica evidente o bom ajuste entre as temperaturas calculadas com o modelo simplificado e os dados experimentais simulados. Os maiores desvios ocorrem justamente na região próxima ao microcanal, onde o modelo simplificado apresenta a maior limitação.

Figura 11 – Intervalo de Credibilidade de 95% da resposta do modelo - Caso 1B



Fonte: autores (2024)

### 3.5 Caso 2B

As funções de densidade de probabilidade a priori dos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_1$ , considerado, neste caso, no processo de inversão, foram adotadas como:  $a \sim \mathcal{U}[-20, 30]$ ,  $b \sim \mathcal{U}[300, 1500]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ . As densidades de probabilidade marginais a posteriori, assim como os gráficos de dispersão dos parâmetros, são apresentados na Figura 12.

Tabela 10 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 2B

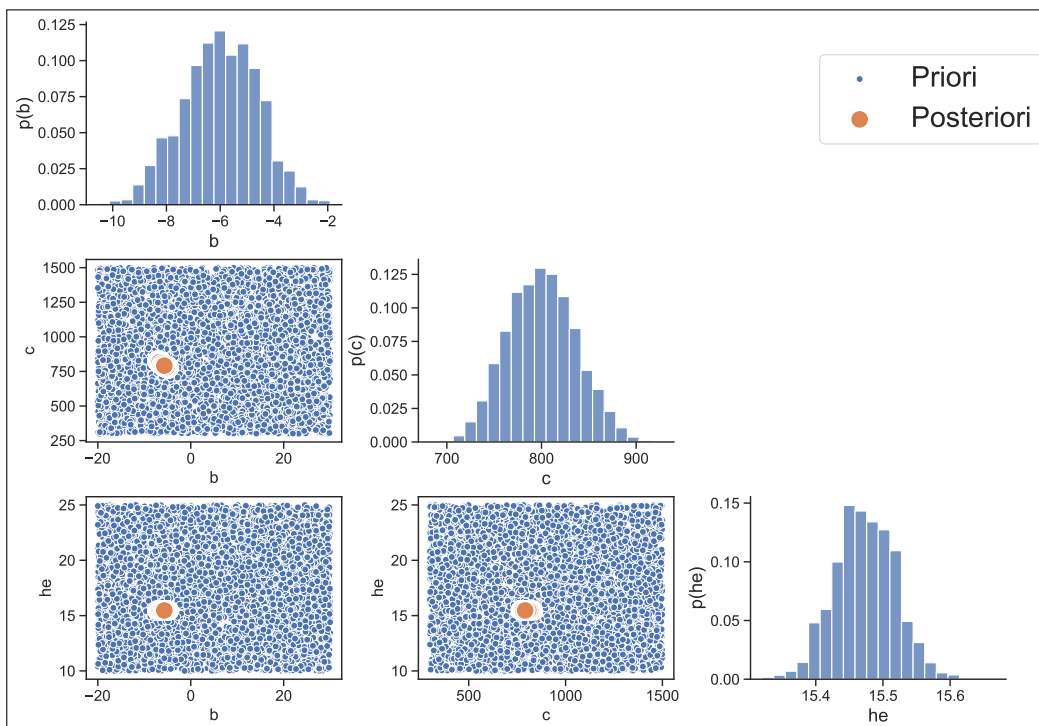
Parâmetro	Valor COMSOL	Média	CoV (%)	IC(95%)
$a$	-10	-5,93143	-6,65	[-6,70493; -5,15794]
$b$	950	797,80336	1,26	[778,07702; 817,52970]
$h_e$	15	15,47370	0,09	[15,44773; 15,49967]

Fonte: autores (2024)



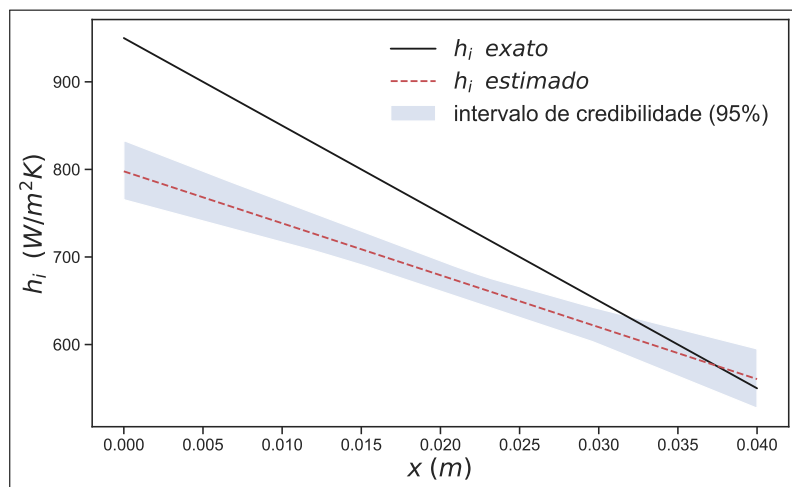
A Tabela 10 apresenta as propriedades estatísticas referente aos parâmetros incertos do modelo  $\mathcal{M}_1$ , para o Caso 2B. Esses resultados são melhor visualizados na Figura 13, que apresenta a curva utilizada na definição do coeficiente de troca térmica no microcanal do modelo tridimensional e a correspondente curva estimada no modelo simplificado ( $\mathcal{M}_1$ ), juntamente com o seu intervalo de credibilidade de 95%. Como pode ser observado, a função utilizada na simulação dos dados experimentais não é inteiramente abrangida pelo intervalo de credibilidade estimado. Isso se deve à discrepância existente entre os modelos e não considerada na formulação do problema inverso. No entanto, na Figura 14, fica evidente o bom ajuste entre as temperaturas calculadas com o modelo simplificado e os dados experimentais simulados. Os maiores desvios ocorrem justamente na região próxima ao microcanal, onde o modelo simplificado apresenta a maior limitação.

Figura 12 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráficos de dispersão dos parâmetros - Caso 2B



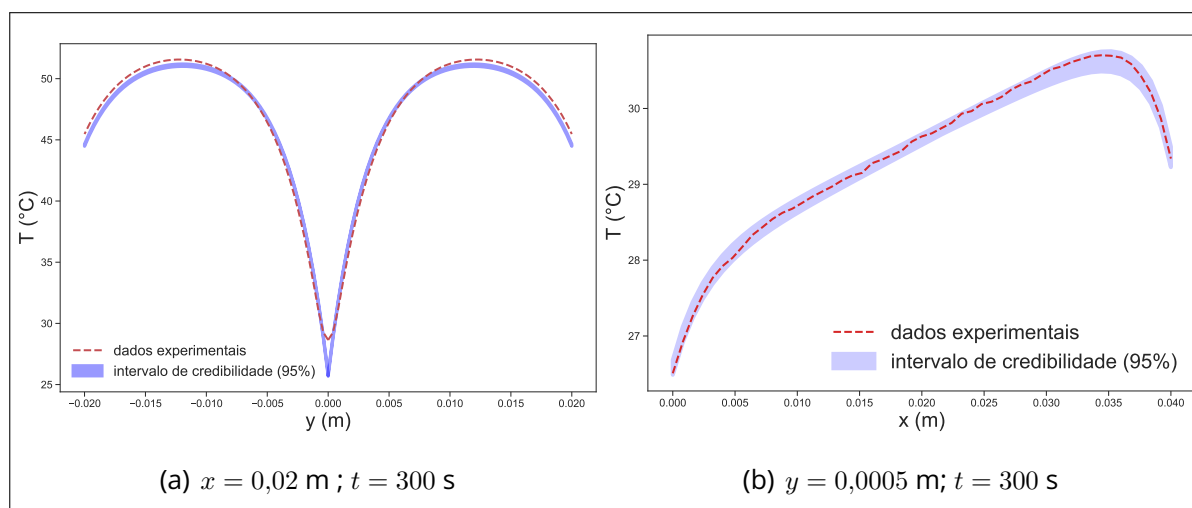
Fonte: autores (2024)

Figura 13 – Intervalo de 95% de Credibilidade do coeficiente de troca térmica  $h_i(x)$  - Caso 2B



Fonte: autores (2024)

Figura 14 – Intervalo de credibilidade de 95% da resposta do modelo - Caso 2B



Fonte: autores (2024)

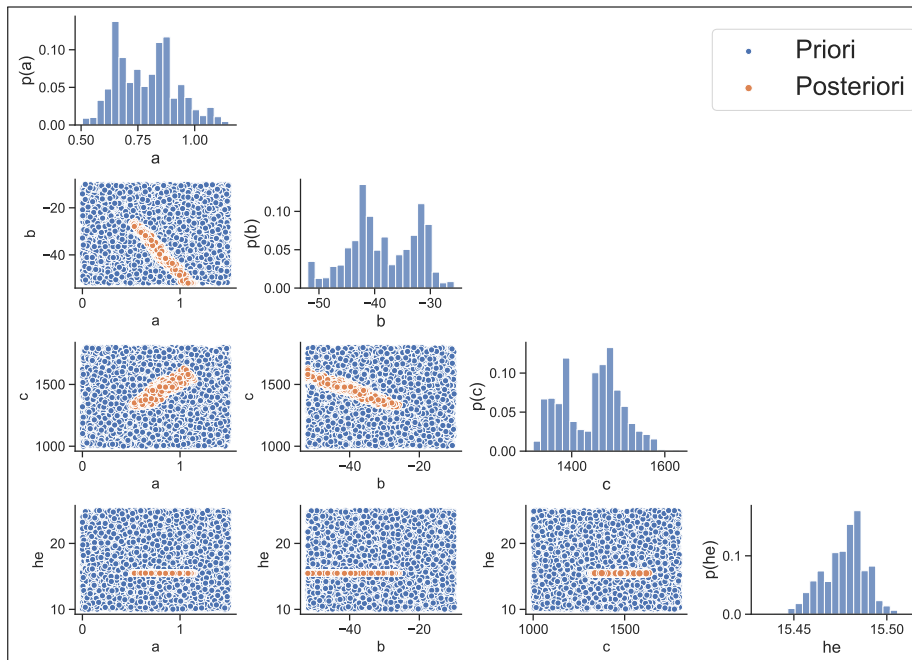
### 3.6 Caso 3B

Por fim, o Caso 3B considera o modelo  $\mathcal{M}_2$  no processo de inversão e o modelo tridimensional para a geração dos dados experimentais simulados. As funções densidade de probabilidade a priori dos parâmetros do modelo foram adotadas como:  $a \sim \mathcal{U}[0, 1.5]$ ,  $b \sim \mathcal{U}[-52, -10]$ ,  $c \sim \mathcal{U}[1000, 1800]$  e  $h_e \sim \mathcal{U}[10, 25]$ .

A Figura 7 apresenta as funções densidade de probabilidade marginais a posteriori e os gráficos de dispersão dos parâmetros incertos do modelo. Assim como no Caso 3A, neste caso, pode-se também observar uma maior dispersão das amostras

da densidade a posteriori, associadas aos parâmetros do coeficiente de troca térmica no microcanal.

Figura 15 – Densidades de probabilidade a posteriori e gráficos de dispersão dos parâmetros - Caso 3B



Fonte: autores (2024)

As propriedades estatísticas referentes aos parâmetros do modelo  $\mathcal{M}_2$ , para o Caso 3B, são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 – Informações estatísticas dos parâmetros incertos - Caso 3B

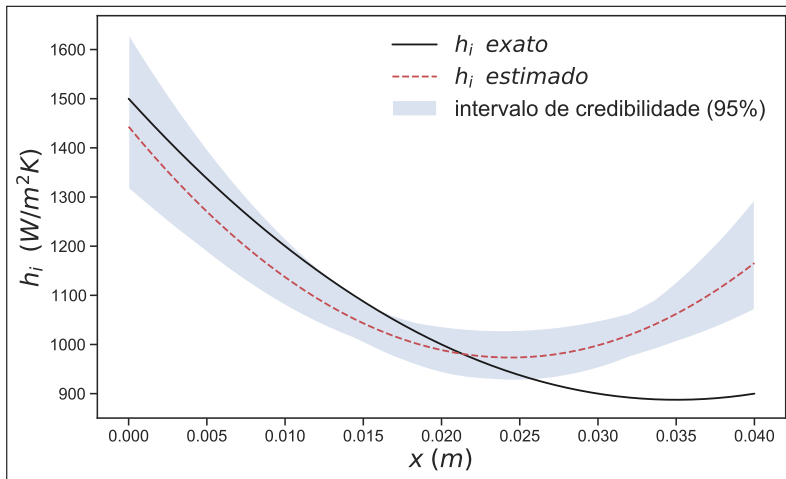
Parâmetro	Valor COMSOL	Média	CoV (%)	IC(95%)
$a$	0,5	0,78925	16,78	[0,52956; 1,04894]
$b$	-35	-38,50794	15,77	[-50,41341; -26,60247]
$c$	1500	1443,09330	4,46	[1316,88505; 1569,30156]
$h_e$	15	15,47734	0,07	[15,45501; 15,49967]

Fonte: autores (2024)

A Figura 16 apresenta a curva utilizada na definição do coeficiente de troca térmica no microcanal do modelo tridimensional e a correspondente curva estimada no modelo simplificado ( $\mathcal{M}_2$ ), juntamente com o seu intervalo de credibilidade de 95%. Como pode ser observado, a função utilizada na simulação dos dados experimentais é quase totalmente abrangida pelo intervalo de credibilidade estimado. Na Figura 17 novamente fica evidente o bom ajuste entre as temperaturas calculadas com o

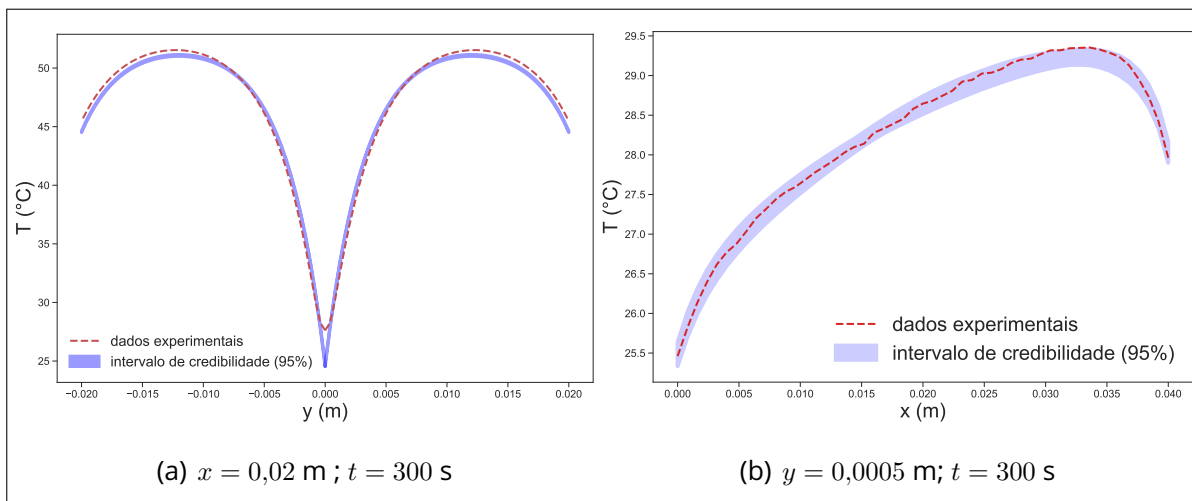
modelo simplificado e os dados experimentais simulados, com os maiores desvios ocorrendo na região próxima ao microcanal.

Figura 16 – Intervalo de 95% de Credibilidade do coeficiente de troca térmica  $h_i(x)$  - Caso 3B



Fonte: autores (2024)

Figura 17 – Intervalo de 95% de Credibilidade da resposta do modelo - Caso 3B



Fonte: autores (2024)

A Tabela 12 exibe a quantidade de estágios e o custo computacional do algoritmo TMCMC para a amostragem da densidade de probabilidade a posteriori nos Casos 1B, 2B e 3B.

Tabela 12 – Número de estágios e custo computacional nos Casos 1B, 2B e 3B

<b>Caso</b>	<b>Número de estágios</b>	<b>Custo Computacional</b>
1B	9	≈ 2h 54min
2B	12	≈ 3h 28min
3B	12	≈ 3h 30min

## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho considerou a formulação e a solução, no contexto da inferência Bayesiana, do problema inverso de estimação dos coeficientes de transferência de calor por convecção de um dissipador térmico (placa) com um microcanal. A formulação do problema inverso considerou medidas de temperatura em determinados pontos da superfície da placa. Três casos distintos de estimação de parâmetros foram considerados: (1) Os coeficientes de troca térmica de convecção são constantes em todo o domínio; (2) O coeficiente de convecção do escoamento interno apresenta uma variação espacial linear; (3) O coeficiente de convecção do escoamento interno apresenta uma variação espacial quadrática. Na solução do problema inverso, foram utilizados dados experimentais sintéticos obtidos de duas maneiras distintas. Primeiramente, considerou-se (*crimes inversos*), ou seja, situações onde o próprio modelo utilizado no processo de inversão foi utilizado também para a geração dos dados experimentais simulados. No segundo caso, dados experimentais simulados foram obtidos de um modelo tridimensional, implementado no *software* COMSOL Multiphysics. Para a amostragem da densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros incertos dos modelos, foi utilizado o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov Transicional (*Transitional Markov Chain Monte Carlo* - TMCMC). As análises numéricas apresentadas mostraram que estimativas acuradas foram obtidas para as curvas do coeficiente de transferência de calor no microcanal, nos três casos distintos de crime inverso considerados. Consequentemente, nestes casos, observou-se um bom ajuste entre as temperaturas previstas pelos modelos e os dados experimentais simulados, inclusive na região próxima ao microcanal. Já nos casos onde os dados experimentais simulados foram gerados por um modelo tridimensional, diferente, portanto, dos modelos utilizados no processo de inversão, as estimativas do coeficiente de troca térmica no microcanal foram diferentes dos correspondentes

valores utilizados no modelo tridimensional. Essas diferenças ocorreram devido à existência de discrepâncias de modelagem que não foram consideradas na formulação do problema inverso. No entanto, ainda assim observou-se um bom ajuste entre as temperaturas previstas pelos modelos e os dados experimentais simulados. As maiores diferenças foram observadas na região do microcanal, onde os modelos simplificados, utilizados no processo de inversão, apresentam suas maiores limitações.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem o apoio financeiro das agências de fomento CNPq e FAPERJ.

## REFERÊNCIAS

- Bazán, F., Bedin, L., & Bozzoli, F. (2019). New methods for numerical estimation of convective heat transfer coefficient in circular ducts. *International Journal of Thermal Sciences*, 139:387–402. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.02.025>.
- Betz, W., Papaioannou, I., & Straub, D. (2016). Transitional markov chain monte carlo: observations and improvements. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(5):04016016. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001066](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001066).
- Bokar, J. & Ozisik, M. (1995). An inverse analysis for estimating the time-varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct. *International journal of heat and mass transfer*, 38(1):39–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(94\)00146-m](https://doi.org/10.1016/0017-9310(94)00146-m).
- Chen, K., Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., & Pontes, P. C. (2022). Heat transfer analysis of compressible laminar flow in a parallel-plates channel via integral transforms. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 138:106368. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106368>.

- Ching, J. & Chen, Y.-C. (2007). Transitional markov chain monte carlo method for bayesian model updating, model class selection, and model averaging. *Journal of engineering mechanics*, 133(7):816–832. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:7\(816\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:7(816)).
- Cotta, R. M., Knupp, D. C., & Naveira-Cotta, C. P. (2016). *Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems*, volume 164. Springer.
- Cotta, R. M. & Mikhailov, M. D. (1997). *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. Wiley Chichester.
- Kaipio, J. & Somersalo, E. (2006). *Statistical and computational inverse problems*, volume 160. Springer Science & Business Media.
- Kennedy, M. & O'Hagan, A. (2001). Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 63:425—464.
- Mercone, S., Frésard, R., Caignaert, V., Martin, C., Saurel, D., Simon, C., André, G., Monod, P., & Fauth, F. (2005). Nonlinear effects and joule heating in i-v curves in manganites. *Journal of applied physics*, 98(2):023911. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1993750>.
- Mota, C. A., Orlande, H. R., De Carvalho, M. O. M., Kolehmainen, V., & Kaipio, J. P. (2010). Bayesian estimation of temperature-dependent thermophysical properties and transient boundary heat flux. *Heat Transfer Engineering*, 31(7):570–580. DOI: <https://doi.org/10.1080/01457630903425635>.
- Ozisik, M. (1994). *Finite Difference Methods in Heat Transfer* CRC.
- Ozisik, M. N. & Orlande, H. R. (2021). *Inverse heat transfer: fundamentals and applications*. CRC press.
- Parwani, A. K., Talukdar, P., & Subbarao, P. (2012). Estimation of inlet temperature of a developing fluid flow in a parallel plate channel. *International journal of thermal sciences*, 57:126–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.02.009>.
- Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., & Anderson, D. (2012). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC press.

- Ramancha, M., Conte, J., & Parno, M. (2022). Accounting for model form uncertainty in bayesian calibration of linear dynamic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 171:108871.
- Razzaghi, H., Kowsary, F., & Ashjaee, M. (2019). Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient. *Applied Thermal Engineering*, 154:63–75. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068>.
- Tuckerman, D. B. & Pease, R. F. W. (1981). High-performance heat sinking for vlsi. *IEEE Electron device letters*, 2(5):126–129. DOI: <https://doi.org/10.1109/edl.1981.25367>.
- Yarin, L., Mosyak, A., & Hetsroni, G. (2009). Velocity field and pressure drop in single-phase flows. *Fluid Flow, Heat Transfer and Boiling in Micro-Channels*, pages 103–144. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-78755-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78755-6_3).

## Contribuições dos autores

### 1 – Lucas da Silva Asth (Corresponding Author)

Mestre em Modelagem Computacional

<https://orcid.org/0000-0002-6189-1068> • [lucas.asth@iprj.uerj.br](mailto:lucas.asth@iprj.uerj.br)

Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Software; Validação; Visualização; Redação - Rascunho Original; Redação – Revisão & Edição

### 2 – Diego Campos Knupp

Doutor em Engenharia Mecânica

<https://orcid.org/0000-0001-9534-5623> • [diegoknupp@iprj.uerj.br](mailto:diegoknupp@iprj.uerj.br)

Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Redação - Rascunho Original; Redação – Revisão & Edição

### 3 – Leonardo Tavares Stutz

Doutor em Engenharia Mecânica

<https://orcid.org/0000-0003-3005-765X> • [ltstutz@iprj.uerj.br](mailto:ltstutz@iprj.uerj.br)

Contribuição: Conceitualização; Metodologia; Redação - Rascunho Original; Redação – Revisão & Edição

### 4 – Luiz Alberto da Silva Abreu

Doutor em Engenharia Mecânica

<https://orcid.org/0000-0002-7634-7014> • [luiz.abreu@iprj.uerj.br](mailto:luiz.abreu@iprj.uerj.br)

Contribuição: Redação – Revisão & Edição



## **5 – Bruno Carlos Lugão**

Doutor em Modelagem Computacional

<https://orcid.org/0000-0002-5610-7021> • [brunocarloslugao@gmail.com](mailto:brunocarloslugao@gmail.com)

Contribuição: Conceitualização; Metodologia

## **Como citar este artigo**

Asth, L. da S., Stutz, L. T., Knupp, D. C., Abreu, L. A. da S., & Lugão, B. C. (2025). Transitional Markov Chain Monte Carlo para estimação dos coeficientes de troca térmica de um dissipador térmico com microcanais. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.47, e84238. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X84238>.