

Ensino

Obtenção dos elementos do Triângulo de Pascal por uma nova relação de recursividade

Obtaining the elements of Pascal's Triangle by a new recurrence relation

Bruno Luca ¹ , Vinicius Freitas de Oliveira ¹ 

¹Centro Universitário Adventista de São Paulo, Engenheiro Coelho, SP, Brazil

RESUMO

O Triângulo de Pascal trata-se de um arranjo numérico, construído a partir de números binomiais e embora seja inserido apenas no Ensino Médio, diversas possíveis aplicações podem ser vistas já no Ensino Fundamental. A análise e desenvolvimento desses arranjos promovem ao estudante competências que envolvem o raciocínio crítico e lógico-matemático, indo ao encontro com as colocações da Base Nacional Comum Curricular. Neste sentido, o presente artigo promoveu um estudo detalhado do Triângulo de Pascal, indicando, além das ferramentas já conhecidas, uma nova relação de recursividade que permite a obtenção de elementos do triângulo apenas com operações elementares, sem uso de análise combinatória. Essa nova relação também foi inserida no contexto das equações de diferenças, tratando-se da equação de diferenças linear homogênea de primeira ordem que possui como solução a própria equação da combinação simples. Embora a equação recursiva tenha a limitação da dependência do elemento anterior ao que se deseja calcular, o seu uso permite inúmeras possibilidades no ensino e neste sentido algumas aplicações foram evidenciadas.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal; Triângulo aritmético; Recursividade; Equações de diferenças

ABSTRACT

Pascal's Triangle is a numerical arrangement, constructed from binomial numbers and although is taught only in High School, several possible applications can already be seen in Elementary School. The analysis and development of these arrangements foster the student's skills that involve critical and logical-mathematical reasoning, in line with the provisions of Brazil's National Common Curricular Base (BNCC). In this sense, this article promoted a detailed study of Pascal's Triangle, indicating, in addition to the already known tools, a new recurrence relation which permits obtaining elements of the triangle only with elementary operations, without the use of combinatorial analysis. This new relation was also inserted in the context of the difference equations, being a homogeneous linear differential equation that has the combination formula itself as a solution. Despite the recursive equation having the

limitation of depending on the preceding element to the one to be calculated, its usage offers countless possibilities in education, and in this sense, some applications were evidenced.

Keywords: Pascal's Triangle; Arithmetic triangle; Recurrence; Difference equations

1 INTRODUÇÃO

O Triângulo de Pascal, também conhecido como Triângulo Aritmético, consiste em um arranjo triangular de elementos numéricos que possuem diversas relações matemáticas entre si (Fossa, 2017). O triângulo recebeu esse nome em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), sendo possível utilizá-lo na resolução de diversos problemas matemáticos. Segundo Davis (2010), dentre as possibilidades de aplicação do triângulo aritmético estão os seguintes objetos de conhecimento: produtos notáveis, binômio de Newton, trigonometria, sequência de Fibonacci, progressões aritméticas, triângulo de Sierpinski, matemática financeira, geometria geral e fractal, álgebra linear e análise combinatória.

Embora esteja muito presente nos livros didáticos do Ensino Médio, cabe ressaltar que o termo Triângulo de Pascal (ou Triângulo Aritmético) não é citado no currículo brasileiro, seja na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ou nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+), entretanto a sua abordagem está relacionada ao desenvolvimento de competências e habilidades do Ensino Médio e alguns reflexos que podem ser vistos ainda no Ensino Fundamental. Neste contexto, Souza (2019) atribui essa aprendizagem aos temas estruturadores da parte flexível do currículo, possíveis de serem implementados no Projeto Político Pedagógico da escola.

O modo mais usual de obtenção dos infinitos elementos do Triângulo de Pascal se dá através de análise combinatória, a saber, combinação simples entre a linha e a coluna do elemento a ser calculado. Dessarte, Santiago (2016) afirma que não é incompleto e intuitivo ao aluno do ensino básico obter os elementos do triângulo aritmético por análise combinatória, fatorial ou até mesmo pela relação de Stifel, desenvolvida por meio da manipulação de fatoriais. Além disso, a mera utilização de análise combinatória não proporciona ao aluno o desenvolvimento do raciocínio inerente à percepção e processamento de padrões numéricos. A BNCC afirma que,

embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. (Brasil, 2018, p. 519).

Entretanto, conforme Souza (2021), o processo de ensino-aprendizagem de números binomiais, análise combinatória e do binômio de Newton ainda se apresentam como um evidente desafio para o professor do Ensino Médio, devido ao fato desses temas serem complexos aos alunos. Além disso, a autora ainda afirma que o estudo e a compreensão do Triângulo de Pascal, suas principais propriedades e, mormente, sua formação, é de suma importância para a edificação da lógica necessária no aprendizado da matemática. Já no Ensino Fundamental, Rosadas (2016) afirma que a aprendizagem dos produtos notáveis poderia ser melhor desenvolvida se as primeiras linhas do Triângulo de Pascal pudessem ser introduzidas como recursos básicos.

O Triângulo Aritmético é pouco explorado na Educação Básica, sendo que em grande parte ocorre como assunto introdutório ou complementar a outros temas, enquanto deveria ser utilizado também como uma ferramenta de expansão do raciocínio lógico e motivação ao estudo da matemática por parte dos alunos (Rosadas, 2016). Por essa ótica, o estudo deste arranjo triangular vai ao encontro do desenvolvimento de diversas competências e habilidades propostas no currículo nacional.

O ensino, a análise e o desenvolvimento do Triângulo de Pascal propiciam ao estudante a oportunidade de avultar o raciocínio lógico-matemático, além de adquirir competências e habilidades alusivos à outros objetos de conhecimento de forma mais inteligível (Lopes and Carneiro, 2020). Essas colocações vão ao encontro da BNCC, que ressalta a importância de abarcar métodos e técnicas de ensino que despertem o interesse do aluno, desenvolvendo neste “a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos” (Brasil, 2018, p. 298).

Segundo Souza (2022) o estudo do Triângulo de Pascal em conexão com a análise combinatória permite que os estudantes deixem de lado a aprendizagem mecanizada e evidenciem as deduções e experimentos, de forma que sejam capazes de resolver problemas rotineiros. A BNCC enfatiza essa realidade ao dizer que os estudantes do

Ensino Médio “devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e de resolução de problemas”(Brasil, 2018, p. 529).

Os PCN+ também evidenciam essa ideia, expressando a importância da análise das diferentes situações e a tomada de decisão mediante diferentes caminhos de resolução. O documento também afirma que “a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.” (Brasil, 2002, p. 112).

Desse modo, o objetivo geral deste trabalho consiste em apresentar e analisar o Triângulo de Pascal, sua história, suas principais propriedades e propor uma nova relação de recursividade para obter os elementos numéricos do arranjo triangular. A lógica recursiva por traz da relação proposta assemelha-se no que Pascal pensou em 1654, que, por sinal, teve um significado eminente para a época, com uma exposição clara do método de indução matemática, segundo Boyer (1996), Blaise Pascal descobriu que “em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo, inclusive” (Boyer, 1996, p. 254).

A relação proposta torna-se importante pois permite que o usuário consiga obter qualquer elemento do Triângulo de Pascal apenas com operações elementares, sem a necessidade do uso de análise combinatória ou fatorial. A única condição necessária que, por sua vez pode ser vista como uma desvantagem, é o conhecimento do elemento anterior de mesma linha.

Todavia, a inserção da nova relação no processo de ensino-aprendizagem poderá ser um fator de avanço nas dificuldades expostas anteriormente. Além disso, o uso de uma relação recursiva poderá desenvolver habilidades referentes ao pensamento computacional, principalmente no que tange à linguagem algorítmica, como a BNCC afirma:

Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma (Brasil, 2018, p. 271).

Mais especificamente, essa nova relação será entendida e discutida como uma equação de diferenças, cuja solução é o próprio coeficiente binomial. Ressalta-se, porém, que uma equação não anula a outra, sendo complementares na obtenção de competências e habilidades inerentes dos objetos de conhecimento. Por fim, além da apresentação do modelo, o presente trabalho apresentará alguns exemplos de aplicação a fim de comparar a usabilidade e eficiência da relação tradicional com a relação proposta e proporcionar ao leitor professor algumas possibilidades no ensino.

2 O TRIÂNGULO DE PASCAL

2.1 Dados históricos

Sabe-se que os primeiros estudos relacionados a esse triângulo tiveram sua origem séculos antes de Blaise Pascal. De acordo com Silva (2015), esses desenvolvimentos iniciais do triângulo aritmético foram realizados pelo matemático indiano Pingala, em sua obra "Chandra Sutra", por volta do ano 200 a.C. Depois de Pingala, outros estudos foram desenvolvidos por Samaw'al (1130-1180), Yang Hui (1238-1298), Apianus (1495-1551), Michel Stifel (1487-1567) e Nicola Fontana Tartaglia (1499-1559).

Figura 1 – O triângulo aritmético por Yang Hui

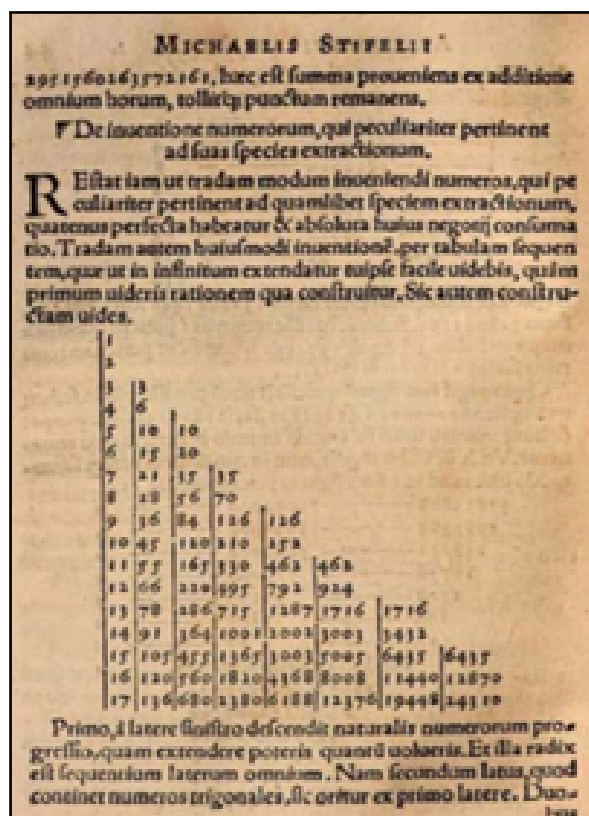


Fonte: Affonso (2014)

A obra de Yang Hui aborda estudos que relacionam a soma de séries com o Triângulo Aritmético. Tais estudos foram publicados pelo matemático Zhu Shijie (1260-1330) em seu livro "Precioso espelho dos quatro elementos", o qual contém o Triângulo de Yang Hui, tal como era então conhecido na Ásia. Segundo Boyer (1996), tal triângulo reproduz o que posteriormente foi chamado de Triângulo de Pascal. O Triângulo de Yang Hui está apresentado na Figura 1.

Já na Europa, o precursor do triângulo aritmético foi o matemático Michel Stifel (1487-1567), que explorou algumas das propriedades do triângulo, postulando uma relação, a qual recebe seu nome. De acordo com Affonso (2014), Stifel apresentou seus estudos do triângulo em sua obra "Arithmetica Integra", de 1544. Essa versão do triângulo aritmético, elaborada por Stifel, pode ser observada na Figura 2.

Figura 2 – O triângulo aritmético por Michel Stifel

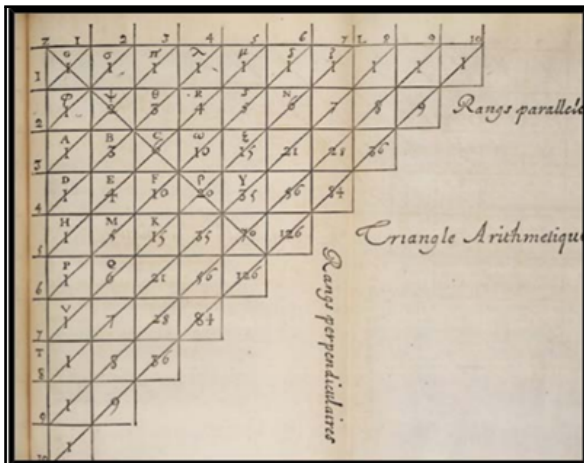


Fonte: Affonso (2014)

A despeito das renomadas e admiráveis supracitadas obras, segundo Fossa (2017), Pascal não apenas desenvolveu o conceito do Triângulo Aritmético, representado pela Figura 3, de modo independente de seus antecessores matemáticos, mas também apresentou uma definição detalhada do mesmo, assim

como demonstrou inúmeras das suas aplicações em seu *Tratado sobre o Triângulo Aritmético*. Conforme Boyer (1996), devido principalmente ao maior e mais específico estudo e desenvolvimento do triângulo aritmético, ele passou a carregar o sobrenome de Blaise Pascal.

Figura 3 – Construção do triângulo aritmético, segundo Pascal



Fonte: Affonso (2014)

As contribuições de Blaise Pascal e Michel Stifel foram importantes não apenas para o desenvolvimento científico, mas também no ensino da Matemática, pois apresentam relações e recursos de propriedades matemáticas, tais como análise combinatória e fatorial.

2.2 Revisão teórica

O triângulo aritmético é infinito e simétrico, sendo que cada linha possui um elemento a mais que a linha precedente, onde o primeiro e o último elemento de cada linha é igual a um. A determinação de seus elementos é obtida por combinações simples, definidas por

Definição 1: Sejam n e k números naturais, com $n \geq k$. Definimos por coeficiente binomial n sobre k , e indicamos por $\binom{n}{k}$, o número dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,k} \quad (1)$$

O número n é chamado de numerador e o número k de denominador de $\binom{n}{k}$.

A Definição 1 também representa o coeficiente binomial $\binom{n}{k} = C_{n,k}$. Esse número $C_{n,k}$, chamado de combinação simples em análise combinatória, representa a quantidade de combinações de k elementos formados a partir de um conjunto de n elementos. Mais especificamente, no Triângulo de Pascal, cada componente é calculado por combinações simples da n -ésima linha e k -ésima coluna, com $n, k \geq 0$. A fim de exemplificar essas composições, estão apresentadas a seguir as combinações das cinco primeiras linhas e colunas do triângulo:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	$\binom{0}{0}$				
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

(2)

Desta maneira, aplicando a Definição 1 na Equação (2), para cada uma das combinações, tem-se

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	1				
Linha 1	1	1			
Linha 2	1	2	1		
Linha 3	1	3	3	1	
Linha 4	1	4	6	4	1

(3)

Exemplo 1: No Triângulo de Pascal o elemento localizado na quarta linha e segunda coluna é igual a 6, afinal,

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{12}{2} = 6$$

A seguir, serão apresentadas as principais e mais usuais propriedades e teoremas no contexto do Triângulo de Pascal. Essas e outras proposições também podem ser vistas com suas demonstrações em Morgado et al. (2020).

Proposição 1: Relação de Stifel

A soma de dois números binomiais com denominadores consecutivos e mesmo numerador é igual a um número binomial cujo numerador possui uma unidade a mais que os numeradores das parcelas da soma e o denominador é o maior dos denominadores das parcelas. Assim,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (4)$$

Demonstração: Por meio da Definição 1 tem-se

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{[n-(k+1)]!(k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)k!} \end{aligned}$$

Em seguida, somando-se as frações tem-se:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)k!} \\ &= \frac{(k+1+n-k)n!}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

No triângulo aritmético, a Proposição 1 revela que todo e qualquer termo é obtido pela soma dos dois elementos diretamente acima, conforme exemplifica a Figura 4.

Figura 4 – Relação de Stifel no Triângulo de Pascal

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4		Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	$\binom{0}{0}$										
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				Linha 0	1				
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			Linha 1	1	1			
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		Linha 2	1	2	1		
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	Linha 3	1	3	3	1	
						Linha 4	1	4	6	4	1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023

Proposição 2: No Triângulo de Pascal, a soma de todos os elementos da linha n é 2^n . Ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{5}$$

Demonstração: A demonstração da Proposição 2 se dará pelo princípio da indução finita. Assim, note que (5) é válida para $n = 0$, pois

$$\binom{0}{0} = 2^0 = 1$$

Em seguida, assumindo que a Equação (5) é válida para $n = k$, ou seja

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

provemos que também será válida para $n = k + 1$. De fato, como $\binom{k+1}{0} = 1 = \binom{k}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = 1 = \binom{k}{k}$, segue que

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k}{k}. \tag{6}$$

Por conseguinte, pela Relação de Stifel (Proposição 1), tem-se

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{1} &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \\ \binom{k+1}{2} &= \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \\ &\vdots \\ \binom{k+1}{k-1} &= \binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-1} \\ \binom{k+1}{k} &= \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \end{aligned}$$

E assim, de 6, segue que

$$\begin{aligned} &\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = \\ \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k} &= \\ &2 \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] \end{aligned}$$

Por fim, pela hipótese de indução, segue que

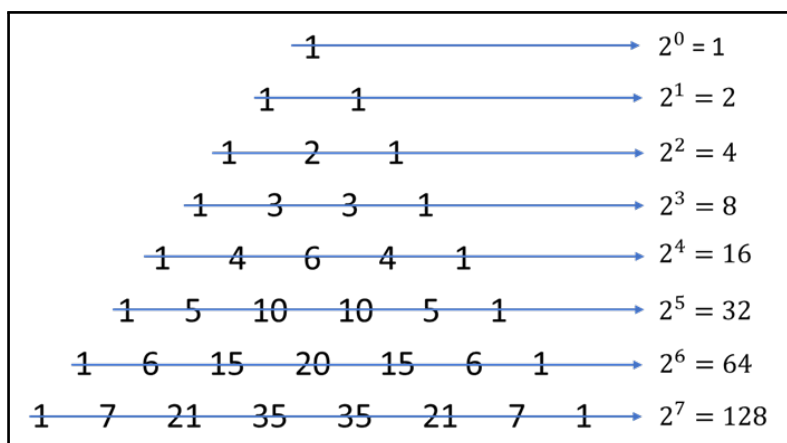
$$\begin{aligned} \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1}, \end{aligned}$$

Exemplo 2: A soma dos elementos da quarta linha do triângulo aritmético é igual 16, afinal, pela Proposição 2, segue que

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$$

Note que o resultado do Exemplo 2 também pode ser confirmado na Figura 5, onde também são apresentadas as somas dos elementos das 8 primeiras linhas do triângulo.

Figura 5 – Relação de Stifel no Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023

Proposição 3: A soma dos termos de qualquer coluna até determinada linha é igual ao elemento da coluna e linha subsequentes. Ou seja,

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1} \tag{7}$$

Demonstração: Pela igualdade $\binom{k+1}{k+1} = 1 = \binom{k}{k}$ e pela Relação de Stifel (Proposição 1), tem-se:

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{k+1} &= \binom{k}{k} \\ \binom{k+2}{k+1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\ &\vdots \\ \binom{k+n}{k+1} &= \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k+1} \\ \binom{k+n+1}{k+1} &= \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} \end{aligned}$$

Por conseguinte, somando-se tais igualdades, segue que

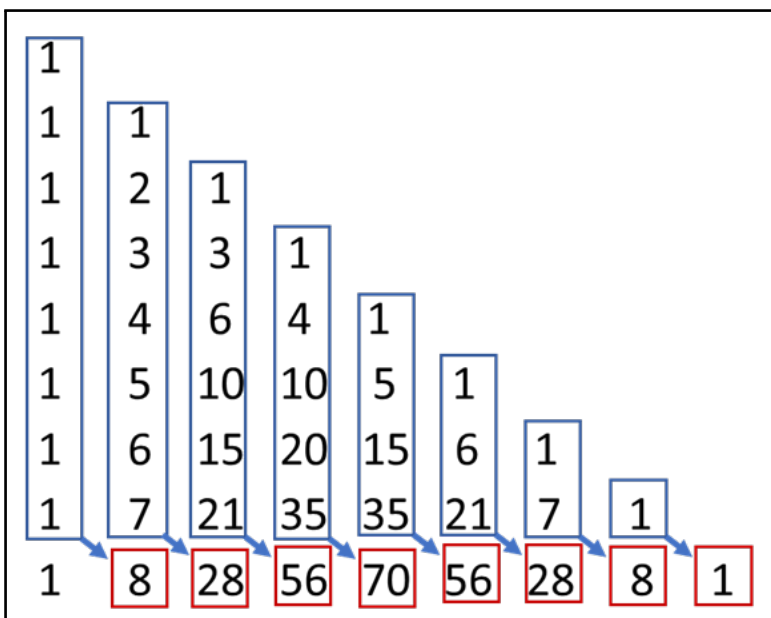
$$\begin{aligned} \binom{k+1}{k+1} + \binom{k+2}{k+1} + \dots + \binom{k+n}{k+1} + \binom{k+n+1}{k+1} &= \\ \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} + \dots + \binom{k+n-1}{k} + & \\ \binom{k+n-1}{k+1} + \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} & \end{aligned}$$

E, portanto

$$\binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{k+n}{k}$$

O Exemplo evidenciou a Propriedade 3, onde verificou-se que o elemento da oitava linha e terceira coluna é igual à soma dos elementos da segunda coluna até a sétima linha. Desta maneira, a Figura 6 destaca essa observação, a partir do Triângulo de Pascal, e evidencia outras aplicações da Propriedade 3.

Figura 6 – Aplicação gráfica da Propriedade 3



Source: Elaborado pelos autores, 2023.

Teorema 1: Binômio de Newton Sejam x e y números reais e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \quad (8)$$

Demonstração: A demonstração do Teorema 1 se dará pelo princípio da indução finita. Desta maneira, note que a Equação 8 é válida para $n = 0$, afinal,

$$(x + y)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} x^0 \cdot y^0 = 1$$

Por conseguinte, assumindo que a Equação 1 é válida para $n = p$, ou seja

$$(x + y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^k \quad (9)$$

queremos provar que também será válida para $n = p + 1$. Multiplicando $(x + y)$ em ambos os lados da Equação 9, tem-se

$$\begin{aligned} (x + y)^{p+1} &= (x + y) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^k \\ &= x \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^k + y \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^k \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^{k+1} \end{aligned}$$

Retirando-se do primeiro somatório a parcela para $k = 0$ e do segundo somatório a parcela para $k = p$, tem-se

$$\begin{aligned} (x + y)^{p+1} &= x^{p+1} + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} x^{p+1-k} \cdot y^k + y^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} x^{p-k} \cdot y^{k+1} \\ &= x^{p+1} + y^{p+1} + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} x^{p+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k-1} x^{p+1-k} \cdot y^k \end{aligned}$$

Colocando $(x^{p-k+1} \cdot y^k)$ em evidência, tem-se

$$(x + y)^{p+1} = x^{p+1} + y^{p+1} + \sum_{k=1}^p \left[\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \right] x^{p+1-k} \cdot y^k,$$

que, pela Relação de Stifel Proposição 1, segue que

$$(x + y)^{p+1} = x^{p+1} + y^{p+1} + \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} \cdot y^k$$

Por fim, como x^{p+1} é a parcela do somatório quando $k = 0$ e y^{p+1} é a parcela do somatório quando $k = p + 1$, conclui-se que

$$(x + y)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} \cdot y^k$$

Note que na expansão da Equação (8), para os cinco primeiros valores naturais de n , obtém-se o seguinte:

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

Destaca-se, assim, que os coeficientes da expansão binomial de $(x + y)^n$ são iguais aos elementos da linha n do triângulo de Pascal, na sua exata ordem.

2.3 Recursividade na matemática

Recursividade caracteriza aquilo que é cíclico e padronizado, sendo objeto de estudo principalmente da matemática e da ciência da computação. Segundo Cutland (1980), a recursão trata-se de um método para definir uma função na qual cada um de seus termos é obtido por valores definidos anteriormente e, possivelmente, usando outras funções também já fixadas. Lima et al. (2004) afirma que inúmeras sequências são delineadas recursivamente. O autor explica essa característica como a possibilidade de encontrar uma regra ou padrão que propicia o cálculo de qualquer termo da sequência em função do(s) antecessor(es).

Tem-se, como um de vários exemplos, a sequência de Fibonacci, cujos 10 primeiros elementos são:

$$F_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\dots).$$

Verifica-se que somando dois termos consecutivos, F_1 e F_2 , obtém-se o próximo termo, F_3 . Fazendo uso desse mesmo recurso, é possível obter os próximos termos ($F_2 + F_3 = F_4$; $F_3 + F_4 = F_5$; e assim sucessivamente). Tal procedimento utilizado para calcular os infinitos elementos da sequência resume-se em uma regra definida por recursividade:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \tag{10}$$

com $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $F_0 = F_1 = 1$.

Segundo Lima et al. (2004), também é possível obter os infinitos elementos da sequência recursiva por meio da determinação de um modelo matemático, de acordo com a posição que cada termo ocupa. Tal modelo é denominado de termo geral. No exemplo da sequência de Fibonacci, cada elemento pode ser definido por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \quad (11)$$

desde que $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $F_0 = F_1 = 1$.

De acordo com Marques (2022), a exposição das sequências recursivas é modificada ao longo da Educação Básica, sendo que no Ensino Fundamental I as sequências são descritas a partir de linguagem não algébrica. Já entre o sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental II, tem-se a introdução da linguagem algébrica. Por fim, do sétimo ano em diante, prioriza-se a descrição das sequências recursivas através do termo geral.

No contexto da ciência da computação é comum denominar a Equação 11 como uma relação (ou função) de recursividade. Neste contexto, pode-se dizer que essas funções de recorrência são equações que definem uma ou mais sequências pelo método recursivo. O Teorema da Recursão, enunciado abaixo e disponível em Bloch (2011), garante a existência e unicidade das funções recursivas. Ressalta-se que, como não faz parte do objetivo do trabalho, a demonstração do Teorema 2 fica a cargo do leitor, também possível de encontrar em Bloch (2011).

Teorema 2: Teorema da Recursão.

Dado um conjunto não vazio A , com $a \in A$ e uma função $g : A \rightarrow A$, existe apenas uma única função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ que satisfaça:

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(s(n)) = g(f(n)) \end{cases}$$

Diversas propriedades do Triângulo Aritmético também podem ser trabalhadas sob a ótica do método recursivo. As próprias propriedades reveladas por Blaise Pascal, que sucedem mais de 600 anos da descoberta do triângulo, foram descritas por

recursividade (Boyer, 1996). Como exemplo de relação recursiva no triângulo, destaca-se nas próximas linhas a Relação de Stifel (Proposição 1).

Exemplo 4: Sejam os elementos do Triângulo de Pascal denominados por $T_{n,k}$, com $n \in \mathbb{N}$ representando o número da linha e $k \in \mathbb{N}$ representando o número da coluna. Assim, para n ou k iguais a zero, $T_{n,k} = 1$, e pela Relação de Stifel (Proposição 1) tem-se:

$$T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + T_{n-1,k} \quad (12)$$

Perceba que a determinação da equação do termo geral em sequências como (12) pode se tornar um processo complexo e trabalhoso, especialmente no contexto de estudantes da Educação Básica. Conforme Marques (2022), tal metodologia é característica da matemática indutiva, sendo denominada de generalização. Vale destacar que, de acordo com Lins and Gimenez (1997), a generalização necessita mais que um simples cálculo, exigindo um raciocínio profundo não-imediatista, chamado pelo texto de alto nível, englobando a determinação de relações e processos não-algoritmos. Esse tipo de maturidade intelectual é progressiva, contudo, o uso da recursão torna-se uma excelente ferramenta nas descobertas e análises de padrões.

2.4 Equações de diferença

As equações de diferenças, também conhecidas como equações discretas, desempenham um papel importante na modelagem de problemas em que a variável independente é medida em intervalos discretos. As técnicas de resolução e as análises qualitativas dessas equações se fazem importante na solução de problemas como (11) e (12). Nesta seção, algumas abordagens sobre as equações de diferença serão expostas com o objetivo de analisar a nova relação recursiva de obtenção dos elementos do Triângulo de Pascal, a ser discutida na seção 3. Por conseguinte, as próximas linhas terão como referência Elaydi (2005).

Definição 2: Dada a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma equação de diferenças (ou equação discreta) de primeira ordem é definida pela relação:

$$x(k+1) = f(k, x(k)), \quad \text{com } k \in \mathbb{N}, \quad k \geq k_0. \quad (13)$$

Definição 3: Sejam $a(k)$ e $g(k)$ funções reais definidas para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0 \geq 0$. Define-se um problema de valor inicial para uma equação de diferenças linear de primeira ordem não-homogênea por:

$$x(k+1) = a(k)x(k) + g(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad k \geq k_0. \quad (14)$$

Quando $g(k) = 0$, ou seja,

$$y(k+1) = a(k)y(k), \quad y(k_0) = y_0, \quad k \geq k_0, \quad (15)$$

diz-se que a equação é homogênea.

A única solução de 15 pode ser obtida por iterações, veja (Elaydi, 2005, p. 3), e é dada por

$$y(k) = \begin{cases} y_0, & k = k_0 \\ \left[\prod_{i=k_0}^{k-1} a(i) \right] y_0, & k \geq k_0 \end{cases} \quad (16)$$

Exemplo 5: A fim de exemplificar o uso da equação 16, considere o seguinte problema

$$y(k+1) = 2^k y(k), \quad y(0) = y_0 \quad (17)$$

Assim, como a equação de diferenças 17 é linear de primeira ordem homogênea, por (16), segue que

$$\begin{aligned} y(k) &= \left[\prod_{i=0}^{k-1} 2^i \right] y_0 \\ &= (2^k)^k y_0 \\ &= 2^{k^2} y_0 \end{aligned}$$

Note que a relação recursiva de Fibonacci, exposta em (11), trata-se de uma

equação de diferenças (Definição 2), contudo não é linear de primeira ordem, uma vez que não satisfaz a Equação 14. A saber, (11) é uma equação de diferenças linear de segunda ordem, contudo, esse tipo de equação não é de interesse deste trabalho. Ao leitor interessado, leia (Elaydi, 2005, p. 79).

3 UMA NOVA RELAÇÃO DE RECURSIVIDADE

Como apresentado na seção 2.2, há inúmeras relações intrínsecas do Triângulo de Pascal que permitem o cálculo e estudo de outras relações matemáticas, como o próprio Binômio de Newton. Entretanto, na determinação primária de cada elemento do triângulo, faz-se necessário o conhecimento e uso de análise combinatória e, conseqüentemente, fatorial. Desta maneira, na tentativa de calcular os elementos do triângulo sem fazer o uso dessas ferramentas, uma nova relação foi encontrada.

Destaca-se que esta nova proposta, exposta nas próximas linhas, foi desenvolvida pelo primeiro autor deste artigo, quando ainda era estudante do Ensino Médio. Tal equação foi engendrada de modo empírico, através de intensa observação do Triângulo de Pascal, na tentativa de descobrir uma nova relação e um definitivo padrão entre os infinitos elementos do triângulo aritmético. O Teorema 3, escrito de forma autoral, propõe a nova relação, que obtém os termos do triângulo de maneira recursiva.

Teorema 3: Sejam $n \in \mathbb{N}$ o número da linha e $k \in \mathbb{N}$ o número da coluna, com $k \leq n$ e $T_{n,k}$ o elemento da n -ésima linha e k -ésima coluna do Triângulo de Pascal. Se $k = 0$, então assume-se $T_{n,k} = 1$, caso contrário, $T_{n,k}$ pode ser obtido por:

$$T_{n,k} = \frac{(n - k + 1)T_{n,k-1}}{k} \quad (18)$$

Demonstração: Note que, como $T_{n,k-1}$ representa um elemento do Triângulo de Pascal, então, $T_{n,k-1} = C_{n,k-1}$ e, pela Definição 1, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{(n - k + 1)T_{n,k-1}}{k} &= \frac{(n - k + 1)C_{n,k-1}}{k} \\
 &= \frac{(n - k + 1)\binom{n}{k-1}}{k} \\
 &= \frac{(n - k + 1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{k} \\
 &= \frac{n!}{k!(n - k)!}
 \end{aligned}$$

E, como $T_{n,k} = C_{n,k} = \binom{n}{k}$, conclui-se que

$$T_{n,k} = \frac{(n - k + 1)T_{n,k-1}}{k}$$

Note que o nível de dificuldade é reduzido, comparando as operações feitas pela Definição 1 e pela Equação Recursiva 18. A fim de evidenciar essas diferenças, a Tabela 1 expressa a obtenção dos seis elementos da quinta linha do triângulo. Com ela, você poderá notar que o Teorema 3 possibilita o cálculo dos diversos elementos sem o uso da combinação. Essa vantagem é ainda mais evidenciada quanto maior for o valor da linha.

Tabela 1 – Obtenção dos elementos

Elemento/Método	Definição 1	Teorema 3
$\binom{5}{0}$	$C_{5,0} = \frac{5!}{5!0!} = 1$	$T_{5,0} = 1$
$\binom{5}{1}$	$C_{5,1} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$	$T_{5,1} = \frac{(5 - 1 + 1)T_{5,0}}{1} = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5$
$\binom{5}{2}$	$C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$	$T_{5,2} = \frac{(5 - 2 + 1)T_{5,1}}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$
$\binom{5}{3}$	$C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$	$T_{5,3} = \frac{(5 - 3 + 1)T_{5,2}}{3} = \frac{3 \cdot 10}{3} = 10$
$\binom{5}{4}$	$C_{5,4} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5 \cdot 4!}{1!4!} = 5$	$T_{5,4} = \frac{(5 - 4 + 1)T_{5,3}}{4} = \frac{2 \cdot 10}{4} = 5$
$\binom{5}{5}$	$C_{5,5} = \frac{5!}{0!5!} = 1$	$T_{5,5} = \frac{(5 - 5 + 1)T_{5,4}}{5} = \frac{1 \cdot 5}{5} = 1$

3.1 A nova relação como uma equação de diferenças

Ao observar a relação recursiva 18, exposta pelo Teorema 3, pode-se perceber uma certa aderência com um sistema dinâmico discreto, variando-se a partir de $k \in \mathbb{N}$. Perceba também que a Equação 18 enquadra-se na Definição 18 e, para simplificar a notação, será escrita como

$$T_n(k+1) = \frac{(n-k)T_n(k)}{k+1} \quad (19)$$

Note que $n \in \mathbb{N}$ é um parâmetro fixo para a Equação 19 e, portanto, não possui influência na análise a ser feita. Pela Definição 14 é fácil notar que a nova relação recursiva pode ser vista como uma equação de diferenças linear homogênea de primeira ordem, adequando-se à Equação 15, com $k_0 = 0$ (linha inicial igual a zero) e $a(k) = \frac{(n-k)}{k+1}$. Assim, por 16, a única solução da Equação 19 será dada por

$$T_n(k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-k}{k+1} \right] y_0$$

Como $T_n(0) = 1$ (veja Teorema 3), segue que

$$\begin{aligned} T_n(k) &= \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-k}{k+1} \right] \\ &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-k-1}{k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k-1)}{k!} \end{aligned}$$

Multiplicando $(n-k)!$ tanto no numerador, quanto no denominador da fração, tem-se

$$\begin{aligned} T_n(k) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k-1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \end{aligned}$$

Devido às relações anteriores, causando um cenário de surpresa nos autores, a solução da equação de diferenças 19 trata-se da própria combinação $C_{n,k}$ (Definição 1). Desta maneira, pode-se dizer que o coeficiente binomial trata-se da solução da equação de diferenças proposta neste trabalho.

4 APLICAÇÕES

De forma a validar o uso do Teorema 3 no contexto da Educação Básica, as próximas linhas serão destinadas à expor exemplos de aplicações em que a nova relação pode ser facilmente utilizada.

4.1 Binômio de Newton

O Teorema 1 já trouxe o Triângulo de Pascal como uma alternativa para determinar os coeficientes da expansão binomial de $(x + y)^n$. Com o Teorema 3 a determinação desses coeficientes fica ainda mais simples, uma vez que esses valores são elementos de uma linha do triângulo aritmético. Por exemplo, tendo o binômio $(x + y)^8$, é possível determinar seus coeficientes por meio da nova relação da seguinte forma:

- **1º coeficiente:** $T_{8,0} = 1$
- **2º coeficiente:** $T_{8,1} = \frac{(8 - 1 + 1)T_{8,0}}{1} = \frac{8 \cdot 1}{1} = 8$
- **3º coeficiente:** $T_{8,2} = \frac{(8 - 2 + 1)T_{8,1}}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$
- **4º coeficiente:** $T_{8,3} = \frac{(8 - 3 + 1)T_{8,2}}{3} = \frac{6 \cdot 28}{3} = 56$
- **5º coeficiente:** $T_{8,4} = \frac{(8 - 4 + 1)T_{8,3}}{4} = \frac{5 \cdot 56}{4} = 70$
- **6º coeficiente:** $T_{8,5} = \frac{(8 - 5 + 1)T_{8,4}}{5} = \frac{4 \cdot 70}{5} = 56$
- **7º coeficiente:** $T_{8,6} = \frac{(8 - 6 + 1)T_{8,5}}{6} = \frac{3 \cdot 56}{6} = 28$
- **8º coeficiente:** $T_{8,7} = \frac{(8 - 7 + 1)T_{8,6}}{7} = \frac{2 \cdot 28}{7} = 8$
- **9º coeficiente:** $T_{8,8} = \frac{(8 - 8 + 1)T_{8,7}}{8} = \frac{1 \cdot 8}{8} = 1$

Logo, os coeficientes dessa expansão binomial são, respectivamente, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 e 1. Assim, é possível descrever tal expansão binomial:

$$(x + y)^8 = 1x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + 1y^8$$

4.2 Probabilidade

Sabe-se que no cálculo de probabilidade muitas vezes se faz necessário o uso da análise combinatória, presente no Triângulo de Pascal. Neste sentido, para validar o uso do Teorema 3 veja os exemplos a seguir.

Exemplo 6: (Lima et al., 2004, p.109). Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?

De fato, existem $C_{7,1}$ maneiras de abrir o palácio, abrindo apenas uma porta, $C_{7,2}$ modos de abrir o palácio abrindo duas portas aleatórias, e assim sucessivamente, até que as 7 portas sejam abertas, representado por $C_{7,7}$. Desta maneira, o número de maneiras que o palácio poderá ser aberto será a soma das combinações citadas subtraindo-se $C_{7,0}$, que são as possibilidades de não abrir o palácio.

Sabendo-se, primeiramente, que o primeiro elemento $T_{7,0} = 1$, é possível calcular os termos da coluna 1, 2 e 3 da linha 7:

$$T_{7,1} = \frac{T_{7,0} \cdot (7 - 1 + 1)}{1} = \frac{1 \cdot 7}{1} = 7$$

$$T_{7,2} = \frac{T_{7,1} \cdot (7 - 2 + 1)}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$T_{7,3} = \frac{T_{7,2} \cdot (7 - 3 + 1)}{3} = \frac{21 \cdot 5}{3} = 35$$

Em seguida, uma vez que, por ser uma linha ímpar, é válida a simetria entre os elementos da esquerda com os da direita da linha, tem-se que: $T_{7,4} = 35$, $T_{7,5} = 21$, $T_{7,6} = 7$ e $T_{7,7} = 1$. Logo, conclui-se que o número de possibilidades de abrir as 7 portas desse palácio é:

$$7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 - 1 = 127 - 1 = 126$$

Exemplo 7: (Adaptado de Santos (2017)). O número de possibilidades de ocorrência de cair cara ou coroa no lançamento de três moedas é igual a 8. De fato, este número é obtido pela soma dos elementos da terceira linha do Triângulo de Pascal, ou seja,

$$T_{3,0} + T_{3,1} + T_{3,2} + T_{3,3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Confirme este valor ao observar que:

- **uma** possibilidade de três caras (kkk)
- **três** possibilidades de duas coroas e uma cara (ckc,cck,kcc)
- **três** possibilidades de duas caras e uma coroa (kck, kkc, ckk)
- **uma** possibilidade de três coroas (ccc)

O Exemplo 7 evidencia que para saber o número de possibilidades no lançamento de um certo número de moedas, basta analisar a linha do Triângulo de Pascal que se refere a esta quantidade. Cada elemento da linha representa o número de possibilidades de cada combinação de cara ou coroa. Por fim, a soma dos elementos representa o total de diferentes possibilidades no lançamento das moedas.

Exemplo 8: (Adaptado de Santos (2017)). O número de diferentes possibilidades de cair cara ou coroa no lançamento simultâneo de cinco moedas é 32. Afinal, pela mesma motivação utilizada no Exemplo 7 tem-se o desenvolvimento dos termos da linha 5 do triângulo. Assim,

$$T_{5,0} + T_{5,1} + T_{5,2} + T_{5,3} + T_{5,4} + T_{5,5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 \text{ possibilidades}$$

Exemplo 9: (ENEM, 2017). Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de Jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de Partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- a) 64
- b) 56
- c) 49
- d) 36
- e) 28

Analisando o quadro exposto acima, percebe-se que o número de partidas é o elemento do Triângulo de Pascal subsequente ao elemento da quantidade de jogadores. Portanto, os números estão na mesma linha do Triângulo, mas em colunas seguidas. Por exemplo, os números 6 e 15 correspondem ao segundo e terceiro termo da sexta linha do triângulo, respectivamente. Já os números 7 e 21 correspondem ao segundo e terceiro termo da sétima linha do triângulo, respectivamente. E assim sucessivamente.

Logo, pode-se inferir que se a quantidade de jogadores for 8 (o qual equivale ao segundo elemento da oitava linha do triângulo), o número de partidas realizadas será igual ao terceiro elemento da mesma linha. Assim,

$$T_{8,2} = \frac{(8 - 2 + 1)T_{8,1}}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

Portanto, o número de partidas para 8 jogadores será 28.

4.3 Genética

O conjunto de genes dos indivíduos é responsável pela determinação de suas características. Snustad and Simmons (2008) adicionam que cada trecho do DNA produz proteínas específicas, sendo responsável pelo gene. A constituição genética de cada indivíduo, expressa pelos cromossomos herdados por seus genitores, denomina-se genótipo. Já o resultado da expressão gênica é denominado fenótipo. Na herança quantitativa, o total de fenótipos para uma determinada característica é igual

ao total de genes envolvidos, mais um. O cruzamento entre dois indivíduos heterozigotos para todos os pares de genes englobados propicia a obtenção de descendentes com todas as combinações possíveis de genótipos.

O triângulo de Pascal, por sua vez, oferece a obtenção da proporção fenotípica, sendo esta representada pela linha correspondente ao total de fenótipos envolvidos no caso, menos um, uma vez que o Triângulo de Pascal inicia-se pela linha zero. Em outras palavras, para cinco fenótipos, a proporção é observada na linha 4 do triângulo. Também pode ser extraída do triângulo a probabilidade de cada fenótipo específico ser obtido no cruzamento, com os valores proporcionais dispostos em ordem de número de genes dominantes.

Exemplo 10: (Adaptado de Rosadas (2016)). Uma certa característica de um ser vivo é determinada por três pares de genes com herança quantitativa. Devido ao fato de cada gene dominante contribuir da mesma forma e com efeito aditivo, um indivíduo com genótipo AaBbCc apresentaria o mesmo fenótipo de um indivíduo AABbcc, sendo que ambos possuem 3 genes dominantes. Desse modo, qual a probabilidade de um cruzamento gerar um indivíduo com 3 genes dominantes?

O total de fenótipos para uma característica é igual ao total de genes envolvidos mais 1. Logo, como há 3 pares de genes, tem-se 6 genes e 7 fenótipos. Desse modo, a proporção fenotípica esperada no cruzamento entre heterozigotos é determinada pela linha 6 do Triângulo de Pascal. Fazendo uso do Teorema 3 e lembrando do padrão supracitado do decréscimo e acréscimo sucessivo e unitário do numerador e denominador, respectivamente, tem-se o seguinte:

$$T_{6,0} = 1$$

$$T_{6,1} = \frac{1 \cdot 6}{1} = 6$$

$$T_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$T_{6,3} = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20$$

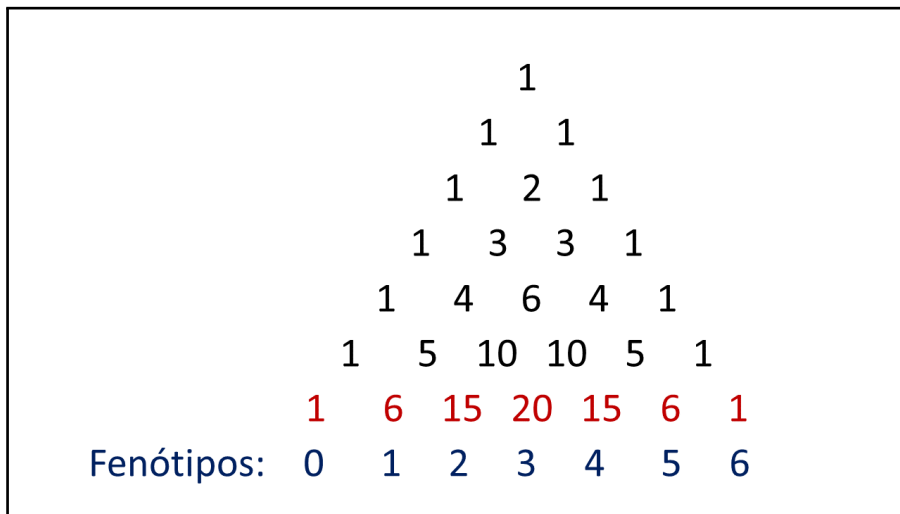
$$T_{6,4} = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$$

$$T_{6,5} = \frac{15 \cdot 2}{5} = 6$$

$$T_{6,6} = \frac{6 \cdot 1}{6} = 1$$

Tais coeficientes estão apresentados na Figura 7, abaixo.

Figura 7 – Fenótipos no Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pelos autores, 2023

Os fenótipos 0 a 6 representam o número de genes dominantes em cada valor proporcional. Já o somatório dos valores da proporção fenotípica, que é igual a dois elevado ao total de genes, descreve o número total de combinações possíveis de genótipos neste cruzamento. Neste exemplo, o total de genótipos é igual a 2^6 , isto é, 64.

Por fim, a probabilidade de um cruzamento gerar um indivíduo com 3 genes dominantes é obtido pelo valor proporcional na linha 6 do triângulo, referente aos 3 genes dominantes, dividido pelo total de combinações. Assim,

$$\frac{20}{64} = \frac{5}{16} = 0,3125 = 31,25\%$$

5 CONCLUSÕES

O Triângulo de Pascal, como pôde ser observado, apresenta um padrão muito interessante de números, o qual possui relação direta com outros teoremas, como o Binômio de Newton. Portanto, ressalta-se as diversas e importantes aplicações na matemática e outras ciências, estando presente também em vários padrões da natureza.

Por conseguinte, evidencia-se que o Teorema 3 oferece uma nova relação no Triângulo de Pascal, possibilitando a obtenção dos infinitos elementos através de

operações básicas, prescindindo o uso de análise combinatória e fatorial. Devido às relações entre as fórmulas apresentadas, conclui-se que a relação recursiva (18) proposta é nada mais que a equação de diferenças que tem como solução o coeficiente binominal.

Como apresentado na introdução deste artigo, a aprendizagem dos produtos notáveis poderia ser melhor desenvolvida se as primeiras linhas do Triângulo de Pascal pudessem ser introduzidas como recursos básicos. Vale destacar, portanto, que a nova relação proposta pode propiciar tal desenvolvimento especialmente no 8º ano do Ensino Fundamental, uma vez que as operações necessárias são usuais. Além disso, o uso e a análise da forma de obtenção da nova relação podem desenvolver no aluno habilidades ressaltadas pela BNCC.

Entretanto, por se tratar de uma equação de recorrência, expõem-se que a relação apresentada possui a limitante da dependência do valor do elemento anterior ao que se deseja calcular. Logo, não é possível determinar um elemento apenas com o valor da sua linha e coluna. Em contrapartida, uma vez que é sabido que o primeiro elemento de todas as linhas (ou colunas) é 1, o uso das simples operações básicas, de forma computacional, pode minimizar o esforço na obtenção dos elementos do triângulo.

Destaca-se também que, apesar de tal limitação da fórmula, a mesma outorga a possibilidade de manter uma semelhante extensão de cálculo para todos os infinitos elementos do triângulo aritmético, a despeito do possível elevado valor da linha do elemento a ser calculado, sendo também uma possível usabilidade no ensino, especialmente no nível básico. A nova relação pode ser utilizada como um exemplo de sequência recursiva para os anos finais do Ensino Fundamental, já a partir do 6º ano, onde esse objeto de conhecimento já aparece como linguagem algébrica.

Finalmente, ressalta-se também que este artigo teve como enfoque a recursividade na matemática, por meio de relações e sequências, contudo, a nova relação também pode ser trabalhada sob a ótica da Ciência da Computação, com uso da programação. Sugere-se que essa abordagem seja feita com estudantes da Educação Básica uma vez que também poderá desenvolver habilidades do pensamento computacional.

REFERÊNCIAS

- Affonso, A. (2014). O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UFF, Niterói, RJ, Brasil.
- Bloch, E. D. (2011). *The Real Numbers and Real Analysis*. Springer.
- Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. Editora Blucher, 3 edition.
- Brasil (2002). *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.
- Cutland, N. (1980). *Computability: an introduction to recursive function theory*. Cambridge University Press.
- Davis, T. (2010). Exploring pascal's triangle. In *Mathematical Circles Topics*.
- Elaydi, S. (2005). *Introduction to Difference Equations*. Springer.
- Fossa, J. A. (2017). Aleae interruptar: uma curiosa aplicação do triângulo de pascal. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 4(11):22–34.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2004). *A Matemática do Ensino Médio volume 2*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Papirus.
- Lopes, M. S. & Carneiro, R. S. (2020). Triângulo de pascal: breve história e uma proposta didática para o ensino. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, 7(1):75–97.
- Marques, F. S. (2022). *Recursividade em práticas educativas investigativas: significados produzidos por participantes de um processo de formação de professores de matemática*. (programa de pós-graduação em educação em ciências e matemática), IFES, Vila Velha, ES, Brasil.

Morgado, A. C., Carvalho, J. B. P., & Fernandez, P. (2020). *Aálise combinatória e probabilidade*. Editora SBM, 11 edition.

Rosadas, V. D. S. (2016). *Triângulo de Pascal: curiosidades e aplicações na escola básica*. (mestrado em matemática), PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Santiago, T. P. (2016). *Triângulo de Pascal: aplicações no ensino fundamental e médio*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UFBA, Salvador, BA, Brasil.

Santos, N. L. P. (2017). *O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UNESP, São José do Rio Preto, SP, Brasil.

Silva, M. O. (2015). *Do triângulo à pirâmide de Pascal*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UESC, Ilhéus, BA, Brasil.

Snustad, D. P. & Simmons, M. J. (2008). *Fundamentos de Genética*. Guanabara, 4 edition.

Souza, C. M. (2021). *Simetrias no Triângulo de Pascal*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UFSJ, São João Del Rei, MG, Brasil.

Souza, C. M. (2022). *Triângulo de Pascal e Análise Combinatória: observando padrões e fazendo conjecturas*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UFF, Niterói, RJ, Brasil.

Souza, C. R. (2019). *Os livros didáticos de Matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton*. (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UTFPR, Pato Branco, PR, Brasil.

Contribuições dos autores

1 – Bruno Luca

Engenheiro Civil

<https://orcid.org/0000-0002-7909-1245> • brunoluca777@gmail.com

Contribuição: Conceitualização – Investigação – Visualização – Redação – Rascunho original

2 – Vinicius Freitas de Oliveira

Mestre em Matemática, Professor do Centro Universitário Adventista de São Paulo
<https://orcid.org/0000-0002-7256-9349> • vinicius.foliveira@unasp.edu.br

Contribuição: Conceitualização – Investigação – Visualização – Redação – Revisão e edição

Como citar este artigo

Luca, B., & Oliveira, V. F. (2024). Obtenção dos elementos do Triângulo de Pascal por uma nova relação de recursividade. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.46, e74096.

DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X74096>.