






Matemática

Métodos matemáticos: uma aplicação nas ciências agrárias

Mathematical methods: an application in the agrarian Sciences

Juliano Silveira Meira¹ , Lidiane Buligon¹ ,
Charles Rogério Paveglio Szinvelski¹ , Andressa Ana Martins¹ ,
Cleber Cassol Pires¹ 

¹Universidade federal de Santa Maria, RS, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem matemática para um problema de prático que tem origem na Zootecnia. Especificamente, o tema está relacionado ao estudo do cálculo das exigências nutricionais de energia para manutenção de cordeiros da raça Texel. O processo de modelagem consiste em obter um modelo matemático a partir do ajuste de funções aos dados experimentais, podendo assim realizar o cálculo do ponto fixo da função. O experimento foi realizado no Laboratório de Ovinocultura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Um dos objetivos da pesquisa era determinar a exigência de Energia Metabolizável para manutenção (EMm), que segundo a metodologia empregada pelos pesquisadores, consiste em obter o ponto de equilíbrio da Produção de Calor (PC) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Em termos matemáticos, o objetivo é obter o melhor ajuste de curva para os valores experimentais, utilizando o método dos mínimos quadrados linear e o ponto de equilíbrio pelo método de iteração de ponto fixo. Esse trabalho busca disponibilizar um aporte teórico dos métodos matemáticos usados na modelagem. A motivação deste estudo é levar a matemática aplicada para áreas da ciências agrárias.

Palavras-chave: Ponto de equilíbrio; Ponto fixo; Modelagem; Métodos numéricos; Energia metabolizável para manutenção; Zootecnia

ABSTRACT

This work presents a mathematical approach to a practical problem that originates from Zootecnia. Specifically, the theme is related to the study of the calculation of the nutritional requirements of energy for the maintenance of lambs of the Texel breed. The modeling process consists of obtaining a mathematical model from the adjustment of functions to the experimental data, so that it can perform the calculation of the fixed point of the function. O experimento foi realizado no Laboratório de Ovinocultura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). One of the objectives of the research was

to determine the requirement of Metabolizable Energy for Maintenance (EMm), which according to the methodology used by the researchers, is to obtain the point of balance of Heat Production (PC). In mathematical terms, the objective is to obtain the best curve fit for the experimental values using the linear least squares method and the equilibrium point by the fixed point iteration method. This work seeks to provide a theoretical contribution of the mathematical methods used in the modeling. The motivation of this study is to bring applied mathematics to areas of agrarian science.

Keywords: Break-even point; Fixed point; Modeling; Numerical methods; Metabolizable energy for maintenance; Zootechny

1 INTRODUÇÃO

Para ajudar na tarefa de entender melhor o nosso mundo e explicar os fenômenos oriundos da natureza, muitas vezes descrevemos um fenômeno específico matematicamente por meio de um modelo explica Frank et al. (2014). Os modelos podem ser expressos em termos de gráficos, de tabelas, funções ou de equações, variando desde o mais simples aos mais complexos. Esses modelos podem ainda serem obtidos a partir de dados experimentais de campo ou de laboratório ou podem ser deduzidos de alguma teoria geral. Um bom modelo matemático é aquele que produz resultados que estão em conformidade com as observações do mundo físico (Patrocínio Jr, 2006; Anton, 2000).

Frank et al. (2014) complementam que, um modelo matemático é uma idealização do fenômeno do mundo real e nunca será uma representação completamente precisa da realidade. No entanto, apesar de suas limitações, um modelo matemático pode fornecer resultados e conclusões próximos do comportamento do problema real.

Para Bassanezi (2006) uma das maiores dificuldades para adotar o processo de modelagem é a transposição de barreiras ofertadas pelo ensino tradicional, no qual tem-se explícito o objeto de estudo, meramente teórico e voltado ao conteúdo exigido nos programas das disciplinas. Dessa forma, tem-se um aluno propenso a adquirir muitas habilidades de resoluções de cálculos, em contrapartida, poucos conseguem utilizar destas habilidades para resolver problemas relacionados ao seu cotidiano. O autor acrescenta que a modelagem matemática abrangente e capaz de analisar e sugerir interferências em processos empíricos ou fenômenos naturais, é por excelência o método científico utilizado nas ciências factuais.

Uma área contida nas ciências factuais, é a Zootecnia, definida como Ciência dedicada ao estudo da criação dos animais segundo Ferreira et al. (2006), mais especificamente para este trabalho, o estudo sobre os ovinos. Na zootecnia a área de Nutrição e Alimentação gera pesquisas que envolvem:

Compreender os processos químicos, físicos e biológicos que ocorrem no trato gastrointestinal para que os animais possam tirar proveito máximo dos nutrientes para atender as exigências nutricionais, bem como saber escolher, formular e fornecer alimentos visando o máximo desempenho animal e mínimo custo (UFSM, 2017).

Dentre as raças de ovinos estudados, encontram-se os cordeiros da raça Texel, animais cuja produção está em constante crescimento na região Sul do Brasil. As exigências nutricionais de ovinos, são definidas com base em estudos internacionais, porém as condições climáticas, as diversidades metodológicas e a diversidade de raça são aspectos fundamentais que interferem na criação, por isso a importância de desenvolver pesquisas nesse sentido (Martins, 2017).

Dentre as exigências nutricionais estudadas, tem-se as exigências nutricionais de energia. As exigências de energia líquida, são separadas em exigência de Energia Metabolizável para manutenção e exigência de energia para ganho (gordura, musculatura, entre outros). Destas, tem-se que a exigência de energia metabolizável para manutenção, é a energia para manter a estabilidade fisiológica do animal, ou seja, a energia necessária apenas para que seu corpo funcione sem perdas nem ganhos (Galvani, 2008). Portanto, em momentos de crise por falta de alimentação para a criação desses animais, ou qualquer outro problema adverso, faz-se necessário ter o conhecimento do mínimo de energia requerida para esses animais, sem que eles tenham uma dieta deficitária, acarretando assim, em perda de funções importantes para o funcionamento orgânico do animal.

Uma alternativa utilizada por Martins (2013) para calcular as exigências de Energia Metabolizável para manutenção (EMm) foi o cálculo do ponto de equilíbrio da função de regressão linear do logaritmo da Produção de Calor (PC) ($PC, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM) ($CEM, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) (Lofgreen; Garret, 1968 apud Martins, 2013).

O problema prático enunciado acima é um exemplo de uma situação-problema na qual pode-se aplicar um processo de modelagem matemática, em que converte-se

o problema real, que é obter o valor de exigência de Energia Metabolizável para manutenção, em um problema matemático, por meio de dados experimentais de Produção de Calor (PC) e do Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Para tal, usa-se técnicas numéricas da teoria da aproximação para ajustar o conjunto de dados disponíveis, obtidos em experimentos de campo ou em laboratório, por meio de funções elementares (Mínimos Quadrados linear ou não linear) e o método do ponto fixo, para calcular o ponto de equilíbrio (Burden; Faires, 2013; Franco, 2006; Ruggiero; Lopes, 2000). Este número obtido, corresponde o valor em que a Produção de Calor é igual o Consumo de Energia Metabolizável, portanto, o organismo do animal está funcionando sem déficit de energia e sem energia sobrando para o ganho de massa muscular, gordura, entre outros (Martins, 2013).

A necessidade de trabalhar este problema no presente estudo, surge da riqueza de conteúdos matemáticos envolvidos nesse cálculo do ponto de equilíbrio, que é deixado em segundo plano, ao trabalhar somente com ferramentas computacionais. Além disso, ao abordar matematicamente o problema, a aplicação dos conceitos são melhores justificadas, ou seja, sua aplicação será baseada em um método matemático provado e validado, trazendo credibilidade a solução.

O conjunto de dados que será utilizado como base para o processo de modelagem desenvolvido neste trabalho, foi coletado em uma pesquisa de pós graduação em Zootecnia. A metodologia utilizada pelos pesquisadores do laboratório de Ovinocultura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), está descrita na dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Zootecnia (Martins, 2013).

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo construir um estudo matemático, acerca de um problema de origem da área de Nutrição e Alimentação, do curso de Zootecnia relatado anteriormente. Especificamente refere-se ao cálculo da exigência de Energia Metabolizável para Manutenção. Para isso, necessita-se modelar o problema de natureza prática, por meio de métodos matemáticos. O processo de obtenção do modelo matemático, consiste em propôr funções de ajuste para os dados experimentais, calcular o erro do método numérico utilizado, verificar a função que melhor representa os dados coletados e então encontrar o ponto fixo, cujo significado é o ponto de equilíbrio.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para compreender os cálculos dos ajustes de funções aos dados experimentais e do ponto de equilíbrio entre a Produção de Calor (PC) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM), será feita uma explanação dos principais conceitos utilizados para esses cálculos.

Essa fundamentação teórica não trará definições e teoremas utilizados na aproximação do método dos mínimos e no Teorema do ponto fixo. Tais definições e teoremas podem ser encontrados nas bibliografias Franco (2006), Ruggiero and da Rocha Lopes (2000) e Burden and Faires (2013), que são usados para a descrição dos métodos numéricos. Os conceitos complementares de álgebra linear estarão baseados em Boldrini et al. (1984) e Hefez and Fernandez (2016).

2.1 Aproximação dos Mínimos Quadrados

Segundo Franco (2006), o método dos mínimos quadrados consiste em aproximar uma função $y = f(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por uma função $F(x)$ que seja combinação linear de funções conhecidas, ou ainda, diz-se que é feito o ajuste de $f(x)$ por $F(x)$, ou seja:

$$f(x) \simeq a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) = F(x) \quad (1)$$

de tal modo que a distância de $f(x)$ a $F(x)$ seja a menor possível em algum sentido.

A substituição de $f(x)$ por uma função $F(x)$ é indicada quando a utilização da função principal, apresenta alguns inconvenientes, tais como:

- $f(x)$ é definida por meio de processos não finitos como integrais, soma de séries, etc;
- $f(x)$ é conhecida através de pares de pontos, obtidos através de dados experimentais, e deseja-se substituir por uma função que o gráfico se ajuste aos pontos obtidos dos experimentos.

Este segundo, é o inconveniente encontrado na elaboração deste trabalho.

Estes inconvenientes podem ser superados, dependendo de uma escolha apropriada para a função $F(x)$.

Nesta abordagem do **Método dos Mínimos Quadrados** para aproximação de funções, tem-se como base a projeção ortogonal de um vetor sobre um sub-espço, isto é, o problema consiste em aproximar uma função $f(x)$ de E por uma função $F(x)$ de E' tal que a distância de $f(x)$ a E' seja mínima. Assim, o que pretende-se é que $dist(f(x), F(x))$ seja mínima. Utilizando a definição de produto escalar e a definição de distância entre dois vetores, tem-se que:

$$dist(f(x), F(x)) = \|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\langle f - F, f - F \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^m [f(x_i) - F(x_i)]^2} \quad (2)$$

Tal distância deve ser mínima.

Na verdade, o que se deseja obter é $Q = \|f(x) - F(x)\|^2$ seja mínima, daí a justificativa para o nome **mínimos quadrados**.

Como os dados deste trabalho, consistem em pares de pontos, veremos o método dos mínimos quadrados para o caso discreto. Para o caso contínuo ver Ruggiero and da Rocha Lopes (2000).

2.2 Caso Discreto

Sejam dados os pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ escolhidas de alguma forma.

Sejam m pontos tabelados, n o número de funções escolhidas ou o número de coeficientes $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, a se determinar, tais que $m \geq n$.

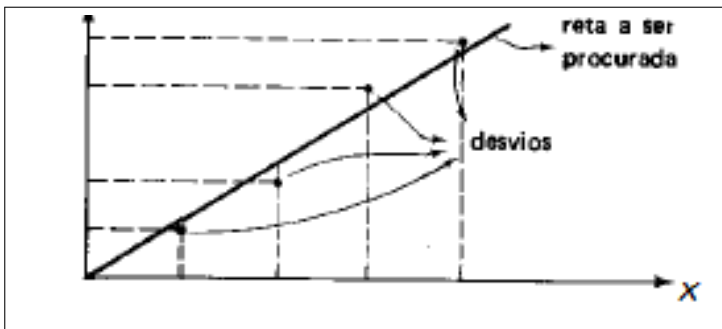
O objetivo é então encontrar os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tais que a função $F(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Diz-se que este é um modelo linear, pois os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ aparecem linearmente, embora as funções g_k possam não serem lineares em x .

A Figura 1 ilustra um exemplo de aproximação linear para $n = 2$, com $g_1(x) = 0$ e $g_2(x) = x$. Pode-se observar que esta configuração apresenta uma interpretação para $d(x_i), i = 1, 2, \dots, 5$, o qual, segundo Boldrini et al. (1984), denomina desvio. Segundo estes autores, define-se $d(x_i) = f(x_i) - F(x_i)$, o desvio como a diferença entre o valor dado tabelado e o valor dado pela reta em cada $x_i, i = 1, \dots, n$. Então pode-se relacionar $d(x_i)$ com os vetores da definição de distância entre vetores, juntamente

com o Teorema da Melhor Aproximação, isto é, pode-se dizer que a Equação (2) é a raiz quadrada da soma dos desvios ao quadrado. Sendo assim, para que se aproxime $F(x)$ de $f(x)$ precisa-se determinar a_2 tal que a soma dos desvios ao quadrado seja mínima, para determinar a reta $F(x) = a_2x$ procurada.

Figura 1 – Interpretação geométrica para os desvios $d(x_i)$



Fonte: autores (2024)

Dentro dos critérios dos quadrados mínimos, os coeficientes a_i , que fazem com que $F(x)$ se aproxime de ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função¹

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - F(x_i))^2$$

Isto é

$$Q = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - (a_1g_1(x_i) + a_2g_2(x_i) + \dots + a_n g_n(x_i))]^2 \quad (3)$$

Conforme sabe-se do Cálculo Diferencial, para encontrar os coeficientes que minimizam a função, deve-se inicialmente encontrar seus pontos críticos. Para isso considera-se as derivadas parciais para cada a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, iguais a zero, como segue:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1g_1(x_i) - \dots - a_n g_n(x_i)] [-g_k(x_i)] = 0, \text{ com } k = 1, 2, \dots, n$$

¹Define-se o erro de truncamento para o caso discreto como a soma dos quadrados das diferença entre os valores estimados e os dados coletados, ou seja, a soma dos quadrados dos desvios, e é dado pela Expressão 3.

Assim, para $k = 1, \dots, n$ tem-se o sistema de equações:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1 g_1(x_i) - \dots - a_n g_n(x_i)] g_1(x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1 g_1(x_i) - \dots - a_n g_n(x_i)] g_2(x_i) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1 g_1(x_i) - \dots - a_n g_n(x_i)] g_n(x_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tag{4}$$

Pode-se reescrever as equações do Sistema (4) como

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_1(x_i) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_1(x_i) \right] a_n &= \sum_{i=1}^m f(x_i) g_1(x_i) \\ \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_2(x_i) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_2(x_i) \right] a_n &= \sum_{i=1}^m f(x_i) g_2(x_i) \\ &\vdots \\ \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_n(x_i) \right] a_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_n(x_i) \right] a_n &= \sum_{i=1}^m f(x_i) g_n(x_i) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

De maneira matricial e usando a definição de produto escalar, o Sistema (5) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_n \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_2, g_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_n, g_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f \rangle \end{bmatrix} \tag{6}$$

O Sistema (6) é o sistema linear normal associado ao Método dos Mínimos Quadrados.

Como é conhecida a forma das funções g , e os valores de $f(x_i)$, pode-se resolver o sistema e encontrar os coeficientes a_i que melhor ajustam a função estimada aos dados experimentais.

A suposição da função que será usada para aproximação aos dados experimentais, dependerá quase que exclusivamente da visualização do gráfico de dispersão dos dados. Tal análise é feita pelo teste de alinhamento, conforme descrito em Franco (2006).

A partir do gráfico discreto dos dados, supõem-se funções elementares, como polinomiais (1º grau até graus maiores), exponenciais, logarítmicas, ou mais complexas como trigonométricas e polinômios especiais (Legendre, Laguerre), para as funções g_1, g_2, \dots, g_n .

Neste trabalho, após verificar o gráfico de dispersão, foram supostas as funções do tipo afim, a exponencial e a função potência. Por isso, serão estes os ajustes de funções que serão estudados a seguir.

2.2.1 Ajuste Linear

Para o caso linear (afim) será usado como base $\{1, x\} = \{g_1, g_2\}$. Sendo assim o ajuste será feito pela função $F(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x)$, para $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$, resultando em

$$F(x) = a_1 + a_2x \quad (7)$$

Utilizando o sistema de equações normais (6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \end{bmatrix} \quad (8)$$

Substituindo $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$ no sistema matricial (8) segue que:

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle x, f \rangle \end{bmatrix} \quad (9)$$

Utilizando a definição de produto escalar, obtém-se o sistema matricial (10)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m 1 \cdot 1 & \sum_{i=1}^m 1 \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot 1 & \sum_{i=1}^m x_i \cdot x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m 1 \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

De maneira similar:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum_{i=1}^m 1 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^m x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (11)$$

O sistema de equações lineares (11) tem solução dada pela Equação (12) e pela Equação (13) para a_1 e a_2 , respectivamente:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (12)$$

e

$$a_2 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (13)$$

Obtendo assim a função $F(x)$ que melhor aproxima os dados representados por $f(x)$ por meio do método dos Mínimos Quadrado, em casos em que o ajuste é linear nos coeficientes.

Porém, há casos em que o gráfico de dispersão sugere a aproximação por uma função não linear em seus parâmetros, por exemplo, uma exponencial ou uma função potência, como mostrados a seguir.

2.2.2 Ajuste Exponencial

Para aplicar o método dos mínimos quadrados desenvolvido na Seção 2.2.1, isto é, resolver o problema de aproximar $f(x)$ por uma função do tipo exponencial e a partir dela obter o Sistema de Equações Normais 6, é necessário linearizar a função exponencial.

Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

com

$$f(x) \simeq ae^{bx}, \quad (14)$$

tal função pode ser reduzida, por uma transformação logarítmica ², ao problema de aproximar

$$\ln f(x) \simeq \ln a + bx.$$

²cabe lembrar que, dentre as possíveis bases, pode-se utilizar a que for mais conveniente, desde que no momento de retornar aos parâmetros originais, a transformação exponencial utilize da mesma base

Nomeando $F(x) = \ln f(x)$, $a_1 = \ln a$ e $a_2 = b$, obtém-se:

$$F(x) \simeq a_1 + a_2x \quad (15)$$

Sendo assim, pode-se identificar $g_1 = 1$ e $g_2 = x$.

Ora, o problema original (21) foi reduzido ao de aproximar $f(x)$ por uma função linear em seus parâmetros. Portanto o método dos quadrados mínimos pode ser agora aplicado ao problema linearizado (20).

Logo, pode-se encontrar os parâmetros utilizando as Equações (12) e (13).

Após encontrar os parâmetros a_1 e a_2 , pode-se aplicar as transformações inversas necessárias para calcular os parâmetros originais a e b .

Como são feitas duas transformações, uma para linearizar o problema para aplicar o método dos mínimos quadrados e depois a transformação inversa para obter os parâmetros originais, acontece que estes não serão, em geral, ótimos no sentido do método dos mínimos quadrados, pois o método foi aplicado no problema linearizado.

2.2.3 Ajuste por uma função potência

Em casos, o ajuste pode ser feito por uma função potência (muitos autores utilizam a nomenclatura função do tipo geométrica). Neste caso, a função também não é linear nos parâmetros.

Para utilizar o método dos mínimos quadrados, primeiramente deve-se aplicar uma transformação para que se obtenha uma função linear nos parâmetros.

Seja

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Com

$$h(x) = ab^x \quad (16)$$

primeiramente aplica-se o logaritmo na base e (novamente a base é escolhida de modo conveniente.), tem-se então:

$$\ln h(x) = \ln a + b \ln x$$

Nomeando $F(x) = \ln h(x)$, $\ln a = a_1$, $b = a_2$ e $\ln x = X$

$$F(X) = a_1 + a_2X \quad (17)$$

Onde $g_1 = 1$ e $g_2 = X$.

Feita a linearização (22), usa-se as equações (12) e (13), para obter os parâmetros a_1 e a_2 . Aplicando a transformação inversa, obtêm-se a e b . Tais parâmetros encontrados para a função original (16), não são ótimos, no sentido do método dos mínimos quadrados, pois o método não foi aplicado ao problema original.

Após ter feito os ajustes citados anteriormente, deve-se decidir qual deles apresenta a função que mais se aproxima de $f(x)$.

3 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON

Quando se têm estudos práticos, em que dispõe-se um conjunto de dados com duas variáveis, sugere-se pensar o quão essas variáveis estão relacionadas, ou seja, o que acontece com uma das variáveis se a outra modifica seu comportamento. Cabe ressaltar que, não se distinguem variáveis dependentes e variáveis independentes, pois geralmente não pode-se afirmar qual variável varia em função de qual (Schield, 1995).

Tal verificação, pode ser feita se ao visualizar o gráfico de dispersão, se os dados estiverem próximos a uma reta, então a relação é forte, do contrário, tem-se uma relação fraca entre ambas variáveis (Moore et al., 2007).

Graficamente, pode-se ter uma ideia da relação entre os dados, porém pode-se calcular matematicamente por meio do ângulo entre dois vetores.

Para isso sejam $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ valores de cada variável em cada uma das medições. Destes valores podem ser considerados os vetores $\vec{u} = \{x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_m - \bar{x}\}$ e $\vec{v} = \{y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_m - \bar{y}\}$ num espaço n -dimensional, em que \bar{x} e \bar{y} são as médias aritméticas entre todos os x_i e y_i , respectivamente. Considerando tais vetores, verifica-se o que acontece se existir um número λ tal que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Neste caso, pode-se perceber que se \vec{u} variar, \vec{v} varia proporcionalmente, com isso \vec{u} e \vec{v} estão fortemente relacionados. Segundo Boldrini et al. (1984) essa condição é equivalente a condição de que os vetores tenham a mesma direção, ou seja, o ângulo entre estes vetores deve ser ou 0 ou π , então o cosseno do ângulo deve ser 1 ou -1. Ainda, segundo este autor, o valor do cosseno do ângulo formado entre estes dois vetores é uma medida de relação entre x e y , e para esta medida chama-se coeficiente de correlação linear, neste trabalho, denomina-se coeficiente de correlação de Pearson, denotado pela letra grega ρ ou por r .

Logo pode-se calcular o valor desse coeficiente, utilizando a definição do cosseno do ângulo entre dois vetores,

$$\rho = r = \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Pelas definição de norma de um vetor e de produto escalar usual, pode-se reescrever tal equação como:

$$\rho = r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (18)$$

Logo, quanto mais próximo de 1 ou -1 estiver o valor desse coeficiente, maior será a correlação entre essas variáveis.

4 ITERAÇÃO DE PONTO FIXO

Esta seção tem como base Burden and Faires (2013).

Um número p é chamado **ponto fixo** de uma dada função g se $g(p) = p$

Porém, para que se tenha um ponto fixo, deve-se verificar um teorema que estipula condições suficientes para sua existência, e ainda mais, condições suficientes para a unicidade do ponto fixo.

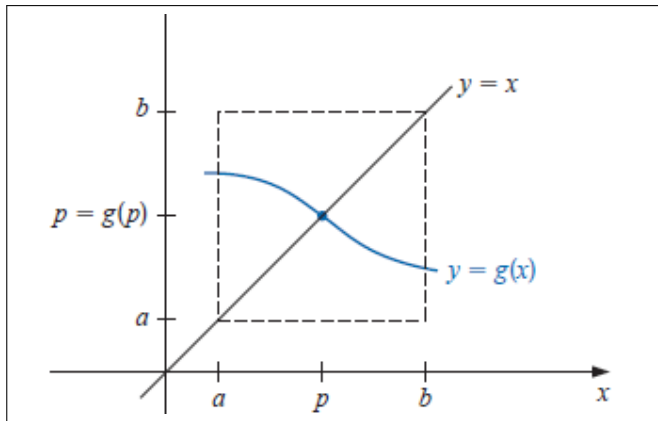
a. Se $g \in C[a, b]$, e $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, g terá um ponto fixo em $[a, b]$

b. Além disso, se $g'(x)$ existir em (a, b) e existir uma constante positiva $k < 1$ com

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in (a, b)$$

então o ponto fixo em $[a, b]$ será único. Veja Figura 2.

Figura 2 – Visualização gráfica do Teorema 4



Fonte: autores (2022)

Demonstração. a. Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, g tem um ponto fixo em uma extremidade. Caso contrário, $g(a) > a$ e $g(b) < b$. A função $h(x) = g(x) - x$ é contínua em (a, b) , com $h(a) = g(a) - a > 0$ e $h(b) = g(b) - b < 0$.

O Teorema do Valor Intermediário implica a existência de $p \in (a, b)$ para o qual $h(p) = 0$. Esse número p é um ponto fixo de g uma vez que

$$0 = h(p) = g(p) - p \Rightarrow g(p) = p$$

b. Suponha também que $|g'(x)| \leq k < 1$ e que p e q sejam pontos fixos em $[a, b]$. Se $p \neq q$, o Teorema do Valor Médio implica a existência de um número δ entre p e q e, portanto, em $[a, b]$, com

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\delta)$$

Assim,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\delta)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|,$$

o que é uma contradição. Como tem-se uma única hipótese, de que $p \neq q$, então a contradição se deu por sua causa. Logo $p = q$, e o ponto fixo em $[a, b]$ é único. \square

Agora, para determinar a aproximação do ponto fixo de g escolhe-se uma aproximação inicial p_0 e gera-se uma sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, definindo $p_{n+1} = g(p_n)$, para cada $n \geq 0$. Se a sequência convergir para p e g for contínua, então

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = g(p)$$

então será obtida uma solução para $x = g(x)$.

Desses resultados, define-se o ponto de equilíbrio. Um ponto x pertencente ao domínio de g é um ponto de equilíbrio de uma função, se é um *ponto fixo* de g , ou seja, $g(x) = x$.

5 MODELO APLICADO

O tema no qual será feita a aplicação, é na área de Zootecnia, mais especificamente em relação a nutrição animal. Tal escolha, deve-se ao fato da região em que esse trabalho está inserido é predominantemente desenvolvida em torno da agricultura e da pecuária, em especial, tem-se a produção de ovinos, prática em constante crescimento nessa região.

O modelo a ser estudado basea-se na pesquisa realizada com ovinos por (Martins, 2013). Tal pesquisa defende que a formulação de rações balanceadas, a redução de custos e o ganho máximo de rendimento de um animal, depende do estudo e conseqüentemente do conhecimento detalhado das necessidades fisiológicas do animal, juntamente com a necessidade de alimentação para ganho, e que o ganho seja o máximo possível, sem excesso ou perdas.

No Brasil atualmente, as exigências nutricionais de ovinos, são baseadas em recomendações de sistemas de avaliação de alimentos e exigências nutricionais internacionais, para a realização do cálculo de dietas (Martins, 2013).

Para resolver esse problema, Martins (2013) realizou uma pesquisa acerca das exigências nutricionais de cordeiros da raça Texel. Como os ambientes dos quais se têm as bases dos cálculos de exigências são diferentes do que se encontra no Brasil, no que tange os aspectos climáticos, de nutrição, entre outros fatores que interferem no cálculo, fez jus a necessidade de tal pesquisa.

Dentre as exigências nutricionais estudadas, têm-se as exigências nutricionais de energia. Segundo Martins (2017), a energia é um nutriente fundamental para determinar a limitação da produção de ovinos. A necessidade energética escassa, resulta em tardança no crescimento, aumento da idade a puberdade, diminuição da fertilidade, diminuição na produção de lã e leite, e ampliação do risco a doenças e parasitas (Martins, 2017).

Tabela 1 – Dados experimentais do Consumo de Energia metabolizável e da produção de calor

| CEM (Kcal/Kg PV 0,75/DIA) | PC (Kcal/Kg PV 0,75/DIA) |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 115,50 | 114,54 |
| 108,44 | 107,54 |
| 113,83 | 112,87 |
| 116,77 | 115,55 |
| 114,48 | 113,24 |
| 117,02 | 115,51 |
| 141,13 | 130,57 |
| 138,42 | 130,10 |
| 140,95 | 127,88 |
| 146,06 | 135,30 |
| 135,72 | 127,40 |
| 131,47 | 123,63 |
| 196,87 | 168,41 |
| 177,74 | 165,19 |
| 216,05 | 195,25 |
| 214,81 | 189,10 |
| 207,04 | 186,00 |

Fonte: autores (2022)

As exigências de energia líquida, são separadas em exigência de Energia Metabolizável para manutenção, e exigência de energia para ganho (gordura, musculatura, entre outros). Destas, têm-se que a exigência de Energia Metabolizável para manutenção é a energia para manter a estabilidade fisiológica do animal, ou seja, a energia necessária apenas para que seu corpo funcione sem perdas ou ganhos (Galvani, 2008). Portanto, para que em momentos de crise, ou qualquer outro problema adverso, faz-se necessário ter o conhecimento do mínimo de energia requerida para esses animais, sem que eles tenham uma dieta deficitária, acarretando assim, em perda de funções importantes para o funcionamento orgânico do animal.

Os dados experimentais usados nesse estudo se encontram dispostos na Tabela 1, em que cada linha, corresponde ao valor obtido para um animal.

A sequência utilizada para o cálculo do ponto de equilíbrio inicia com o gráfico de dispersão dos dados da Tabela 1, ilustrado pela Figura 3. Em seguida, a partir da visualização gráfica, supõe-se funções de ajuste calculadas pelo método dos Mínimos Quadrados. O coeficiente de correlação de Pearson será o índice utilizado para a escolha da função que melhor ajusta os dados coletados.

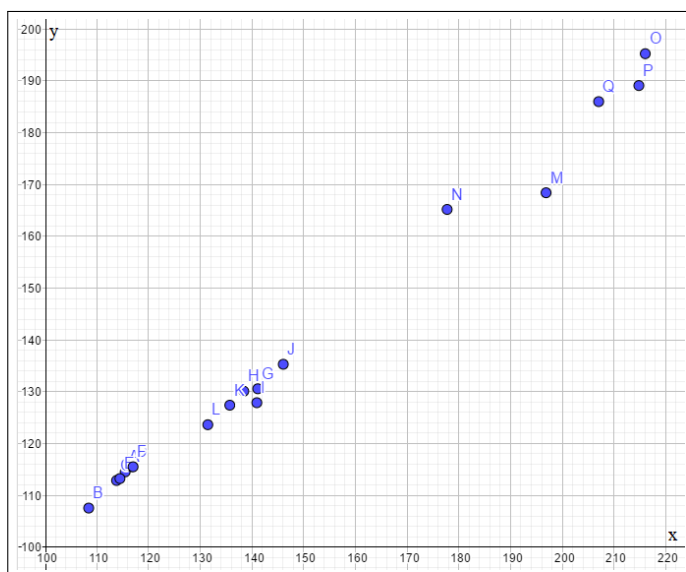
Observe que uma análise rápida da Figura 3 conduz à uma ideia de que a função afim é a função que melhor ajusta os dados disponíveis. Porém, com uma análise mais criteriosa, pode surgir o questionamento sobre se outros tipos de funções poderiam representar estes dados melhor do que uma função afim, como exemplo, uma função exponencial, ou uma função potência. Por este questionamento, serão analisadas três tipos de funções, e concluir a que melhor representa os dados da Tabela 1.

Para a análise, será utilizado x_i para cada um dos valores de CEM e $y_i = f(x_i)$ para cada valor do PC. O domínio das funções ajuste são

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Figura 3 – Ilustração gráfica dos dados da Tabela 1



Fonte: autores (2022)

5.1 Ajuste linear

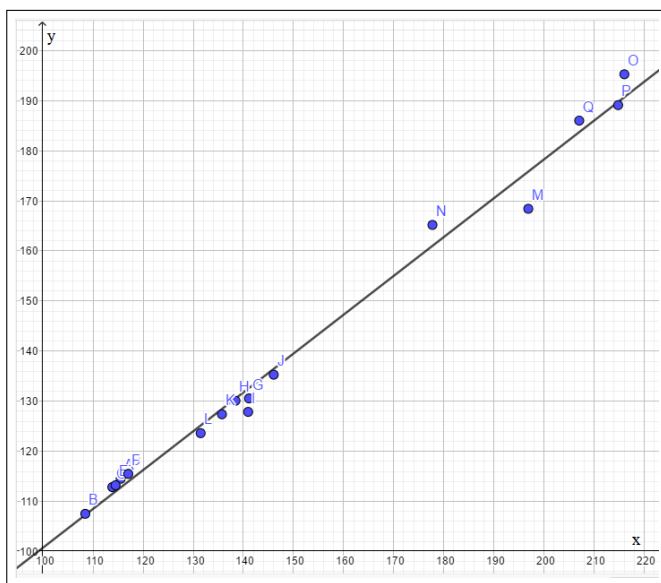
Utilizando conceitos estudados na seção 2.2.1, pode-se ajustar os dados da Tabela 1 por uma função afim. Realizando os cálculos pode-se obter a função:

$$F(x) = 0,7747x + 23,3130 \quad (19)$$

Tendo obtido a função do ajuste linear, pode-se calcular o erro de truncamento e o coeficiente de correlação de Pearson, resultando em 141,8003 e 0,9950, respectivamente.

A Figura 4 apresenta graficamente o ajuste linear. Observe que o coeficiente de correlação é próximo de 1 e visualmente o ajuste está próximo dos dados experimentais.

Figura 4 – Ajuste linear e os dados experimentais



Fonte: autores (2022)

5.2 Ajuste exponencial

Utilizando os conceitos trabalhados na seção 2.2.2, pode-se ajustar os dados da Tabela 1, desta forma obtendo a função do ajuste exponencial:

$$F(x) \simeq 0,0023x + 1,7937 \tag{20}$$

Esta função representa o ajuste exponencial linearizado. Pode-se então encontrar a função original, aplicando as funções inversas, obtendo

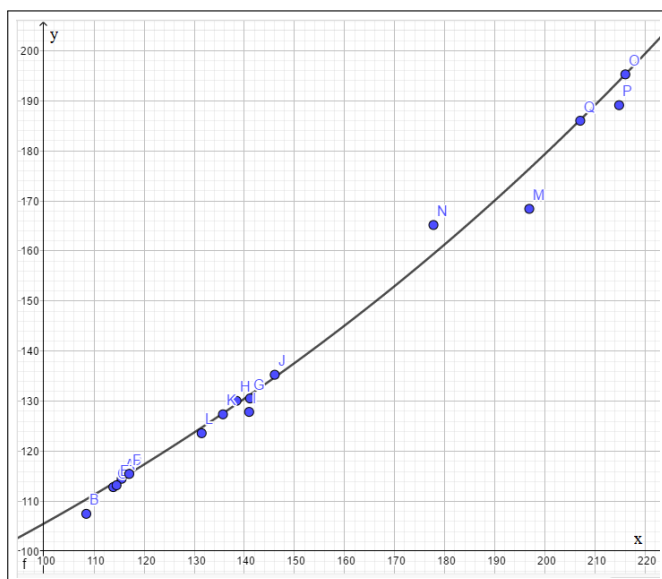
$$f(x) \simeq 62,1871 * 10^{0,0023x} \tag{21}$$

A partir disso, pode-se calcular o erro de truncamento. O erro de truncamento será calculado com a função linearizada, e com a aproximação original, para que no

final dos ajustes feitos neste trabalho, possa se ter uma comparação com uma maior variedade de parâmetros. Com isso, o erro de truncamento para a função linearizada é 0,0009 enquanto que o erro de truncamento para a aproximação original é 144,3346.

O coeficiente de correlação de Pearson para a função é 0,9962. Vale lembrar que para o coeficiente de correlação, usou-se os dados experimentais linearizados.

Figura 5 – A função de ajuste exponencial e os dados experimentais



Fonte: autores (2022)

A Figura 5 apresenta o gráfico dos valores experimentais e da curva de ajuste exponencial. Visualmente a curva apresenta uma boa concordância com os dados. Além disso, o coeficiente de correlação é melhor que o obtido pelo ajuste linear.

5.3 Ajuste por uma função potência

O último ajuste a ser feito nesse trabalho, é o ajuste por uma função potência. Para isso, utiliza-se os conceitos da seção 2.2.3 para ajustar os dados experimentais da Tabela 1. Com isso obtém-se a função potência linearizada ajustada aos dados:

$$F(X) \simeq 0,8275X + 0,3456 \quad (22)$$

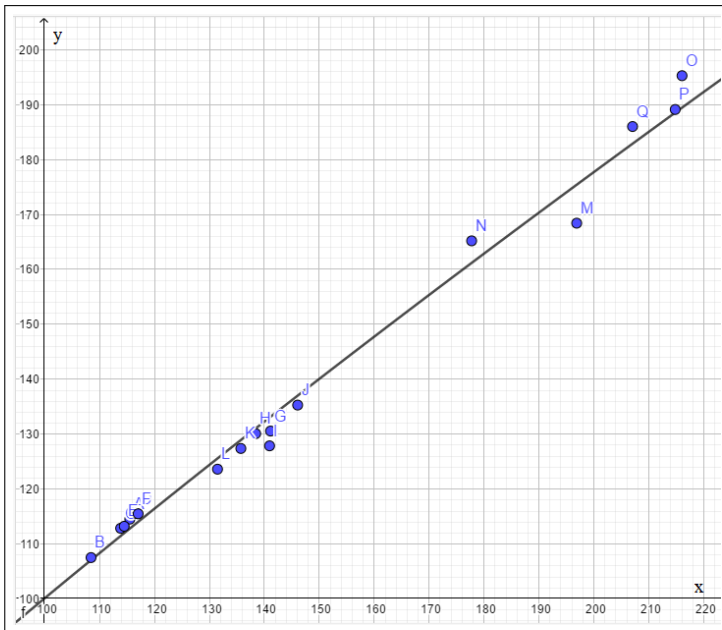
Utilizando as funções inversas, obtém-se o ajuste original da função potência

$$f(x) \simeq 2,2162 * x^{0,8275} \quad (23)$$

Do mesmo modo do ajuste exponencial, calcula-se o erro de truncamento utilizando a função linearizada e a função original, obtendo assim 0,0011 e 164,0438, respectivamente.

O coeficiente de correlação de Pearson, deve ser calculado utilizando os valores de x_i e y_i linearizados. Com isso obtém-se o valor do coeficiente de correlação 0,9946.

Figura 6 – A função potência de ajuste e os pontos analisados



Fonte: autores (2022)

A Figura 6 ilustra graficamente o ajuste representado pela Equação ?? e os dados experimentais. Novamente, visualizando a função obtida ajusta os dados disponíveis. No entanto, o coeficiente de correlação é um pouco menor do que para o caso exponencial.

Após os três ajustes, deve-se analisar qual delas melhor se ajusta aos dados experimentais. Para isso, devemos utilizar como função que melhor ajusta os dados, a função em que o Coeficiente de Correlação de Pearson é o mais próximo de 1, pois é esse ajuste em que os dados estão melhores relacionados.

Um fato que cabe ser observado é que quando linearizamos os dados, o erro calculado pelo método dos mínimos quadrados, não é mínimo, com isso não pode-se usar o erro de truncamento como índice para a escolha da função de ajuste Burden and Faires (2013).

A Figura 7 apresenta um resumo dos erros calculados para as três funções de ajustes propostas. Pode-se concluir que a função que apresenta o coeficiente de correlação mais próximo de 1 é a função exponencial. Portanto, é esta a função que representa o modelo proposto e usada para o cálculo do ponto de equilíbrio neste trabalho.

Pode-se ainda observar que a utilização do erro total de truncamento (primeira coluna da Figura 7 como parâmetro para o melhor ajuste, pode induzir uma análise equivocada, uma vez que, ao linearizar os dados, a função original de ajuste, perde a condição de erro mínimo do método dos mínimos quadrados.

Figura 7 – Quadro comparativo entre os erros do método dos mínimos quadrados das funções e os coeficientes de correlação de Pearson

| Função | Erro de truncamento total das funções ajuste | Erro de truncamento utilizando as funções linearizadas | Coefficiente de Correlação de Pearson |
|-------------|--|--|---------------------------------------|
| Afim | | 141,8003 | 0,9950 |
| Exponencial | 144,3346 | 0,0009 | 0,9962 |
| Potência | 164,0438 | 0,0011 | 0,9946 |

Fonte: autores (2022)

5.4 Ponto de equilíbrio

Conforme descrito por Martins (2017) a Exigência de Energia metabolizável para manutenção, pode ser determinada pelo ponto de equilíbrio entre a Produção de Calor (PC) e o Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Pela Definição 4, o ponto de equilíbrio é dado pelo ponto fixo da função que relaciona as duas variáveis. Para tal, utiliza-se Função 21, que melhor ajusta os dados coletados, conforme mostrado na seção 5.2. Portanto a melhor função de aproximação é dada por $f(x) = 62,1781 \cdot 10^{0,0023x}$. A seguir verifica-se a existência e a unicidade do ponto de equilíbrio em um intervalo da função de ajuste, para isso utiliza-se o Teorema 1.

Seja então $I = (0, 210)$. Como f está definida para qualquer x real, então está definida para $x \in (0, 210)$. Utilizando a regra da cadeia para derivadas, obtendo

$$f'(x) = 0,3293 \cdot 10^{0,0023x}$$

Como $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ então f é crescente.

Também $f(0) = 62,1781 > 0$ e $f(210) = 189,0874 < 210$ é o maior valor para $f(x)$. Então $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, logo pode ser encontrado ponto fixo nesse intervalo.

De outra forma, tem-se um único ponto fixo, quando $|f'(x)| < 1, \forall x \in (a, b)$

Então

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow |0,3293 \cdot 10^{0,0023x}| < 1$$

Pelas propriedades de módulo,

$$|0,3293 \cdot 10^{0,0023x}| < 1 \Rightarrow -1 < 0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$$

Sabe-se que

$$0,3293 \cdot 10^{0,0023x} > 0 \forall x \in \mathbb{R},$$

portanto

$$0 < 0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$$

É necessário ainda que seja verificado para quais valores de x , obtém-se $0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$.

Dividindo ambos os membros da inequação por 0,3293, segue

$$10^{0,0023x} < 3,0367$$

Aplicando \log em ambos, tem-se

$$0,0023x < \log 3,0367$$

Como $\log 3,0367 = 0,4824$ e dividindo ambos os membros por $0,0023$ Resulta assim em

$$x < 209,74$$

Logo para $x \in (0, 209,74)$ têm-se um único ponto fixo.

Define-se a sequência

$$p_{n+1} = 62,1871 \cdot 10^{0,0023 \cdot p_n}$$

Nessa sequência, p_n equivale aos valores de CEM, enquanto que os valores de $p_n + 1$ equivalem aos valores de PC.

Tabela 2 – Sequência convergindo para o ponto fixo da função (21)

| n | p_n | $p_{n+1} = 62,1871 \cdot 10^{0,0023 p_n}$ |
|-----|----------|---|
| 0 | 105 | 108,4427 |
| 1 | 108,4427 | 110,4380 |
| 2 | 110,4380 | 111,6112 |
| 3 | 111,6112 | 112,3068 |
| 4 | 112,3068 | 112,7213 |
| 5 | 112,7213 | 112,9690 |
| 6 | 112,9690 | 113,1173 |
| 7 | 113,1173 | 113,2062 |
| 8 | 113,2062 | 113,2595 |
| 9 | 113,2595 | 113,2914 |
| 10 | 113,2914 | 113,3106 |
| 11 | 113,3106 | 113,3221 |
| 12 | 113,3221 | 113,3290 |
| 13 | 113,3290 | 113,3332 |
| 14 | 113,3332 | 113,3357 |
| 15 | 113,3357 | 113,3372 |
| 16 | 113,3372 | 113,3381 |
| 17 | 113,3381 | 113,3386 |
| 18 | 113,3386 | 113,3389 |
| 19 | 113,3389 | 113,3391 |
| 20 | 113,3391 | 113,3392 |
| 21 | 113,3392 | 113,3393 |
| 22 | 113,3393 | 113,3393 |

Fonte: autores (2022)

Tomando uma aproximação inicial dentro do intervalo (0;209,74), por exemplo $p_0 = 105$, teremos então a sequência convergente ilustrada na Tabela 2.

Após 22 iterações obtém-se $x_{22} = 113,3393$ para um erro de 10^{-4} , que é a aproximação para um ponto fixo procurado e portanto um ponto de equilíbrio da função. Logo, a EMm para cordeiros da raça Texel, nas condições analisadas, foi de aproximadamente $113,34 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido teve como base, dados obtidos pela pesquisa realizada por Martins (2013). O experimento realizado pelo laboratório de ovinicultura da UFSM tinha como objetivo estudar as exigências nutricionais de cordeiros da raça Texel criados no Sul do Brasil. Entre as exigências, calculou-se a exigência de Energia Metabolizável para manutenção (EMm).

A metodologia usada pelos pesquisadores para calcular o valor da EMm, foi calcular o ponto de equilíbrio do ajuste exponencial para a Produção de Calor (PC) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Matematicamente, o ponto do equilíbrio é calculado pelo método do ponto fixo.

As funções propostas para o ajuste foram, a afim, exponencial e potência, a escolha destas funções foi em decorrência do gráfico de dispersão do conjunto de dados experimentais. O melhor ajuste foi obtido para a função exponencial, a qual apresenta o melhor valor para o coeficiente de correlação. Este resultado, está de acordo com o sugerido pela pesquisa original, porém, neste estudo o ajuste exponencial linearizado (Seção 2.1.3) foi diferente do obtido por Martins (2013). Tal discrepância será investigada futuramente. Como consequência da diferença encontrada entre as funções ajustadas, o ponto de equilíbrio calculado também foi diferente. Na pesquisa original este valor foi de $82 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ e neste estudo $113,34 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$.

Estudos na área mostram valores semelhantes, com $104 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ obtido por ARC (1980) e $114,6 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ por Galvani (2008), sugerindo que a modelagem matemática empregada descreve de maneira satisfatória o problema real motivador deste trabalho.

Este estudo estabeleceu um intercâmbio entre a linguagem usual da área específica (Zootecnia) com a linguagem Matemática. O processo de obtenção de um modelo matemático que descreveu o problema real dependeu de conhecimentos adquiridos previamente, e feito por meio de uma revisão teórica.

Com esse trabalho, espera-se uma utilização menos concisa dos conteúdos matemáticos, nos estudos de EMM de ovinos. Assim, a matemática estará cumprindo seu papel, o de basear resultados e valores obtidos em outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ARC, A. R. C. (1980). *The nutrient requirements of ruminant livestock: technical review*. 2. ed. Commonwealth Agricultural Bureaux.
- Bassanezi, R. C. (2006). *Temas e Modelos*. São Paulo: LTC.
- Boldrini, Costa, Figueiredo, & Wetzler (1984). *Algebra Linear*. São Paulo: Harbra.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (2013). *Análise Numérica*. São Paulo: Cengage Learning.
- Ferreira, W. M., Barbosa, S. B. P., Carrer, C. R. O., de Carvalho, F. F. R., & Filho, R. A. C. C. (2006). Zootecnia brasileira: Quarenta anos de história e reflexões. *Revista Acadêmica: Ciência animal*, 4(3):77-93.
- Franco, N. B. (2006). *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Frank, R. G., William, P. F., & Steven, B. H. (2014). *A First Course in Mathematical Modeling*. Cengage Learning.
- Galvani, D. B. (2008). *Exigências e eficiência de utilização da energia e da proteína por cordeiros confinados*. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Zootecnia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil.
- Hefez, A. & Fernandez, C. S. (2016). *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM.
- Martins, A. A. (2013). *Exigências Nutricionais de Energia e Proteína para Manutenção e Ganho de Cordeiros Texel*. (Tese de Mestrado). Faculdade de Zootecnia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil.

Martins, A. A. (2017). *Exigências de Energia, Proteína, Cálcio e Fósforo para Manutenção e Ganho de Cordeiros Corriedale*. Doutorado em zootecnia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

Moore, D. S., McCabe, G. P., & Craig, B. A. (2007). *Introduction to the Practice of Statistics*. Nova Iorque: W. H. Freeman and Company.

Ruggiero, M. A. G. & da Rocha Lopes, V. L. (2000). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: Pearson Makron Books.

Schild, M. (1995). Correlation, determination and causality in introductory statistics. *American Statistical Association, Section on Statistical Education*.

UFSM (2017). *Áreas de atuação: Área de Nutrição e Alimentação*. Recuperado de: <http://www.zootecnia.ufsm.br/index.php/zootecnia/areas-de-atuacao>.

Contribuições dos autores

1 – Juliano Silveira Meira

Mestre em Matemática

<https://orcid.org/0000-0001-8848-1029> • juliano.meira@hotmail.com

Contribuição: Conceituação; Metodologia; Validação; Curadoria de dados; Análise Formal; Investigação; Recursos; Escrita – Primeira Redação; Escrita – Revisão e Edição; Visualização de dados; Supervisão; Administração do Projeto; Obtenção de Financiamento

2 – Lidiane Buligon

Doutorado em Física

<https://orcid.org/0000-0002-5907-3584> • prof.buligon@gmail.com

Contribuição: Conceituação; Metodologia; Validação; Curadoria de dados; Análise Formal; Investigação; Recursos; Escrita – Primeira Redação; Escrita – Revisão e Edição; Visualização de dados; Supervisão; Administração do Projeto; Obtenção de Financiamento

3 – Charles Rogério Paveglio Szinvelski

Computer Scientist

<https://orcid.org/0000-0002-8845-6453> • charless@ufsm.br

Contribuição: Escrita – Revisão e Edição

4 – Andressa Ana Martins

Pós-doutorado em produção animal

<https://orcid.org/0009-0009-2735-1074> • dessa@hotmail.com

Contribuição: Curadoria de dados; Recursos

5 – Cleber Cassol Pires

Professor

<https://orcid.org/0000-0001-6736-7542> • pirescleber@hotmail.com

Contribuição: Curadoria de dados; Recursos

Como citar este artigo

Meira, J. S., Buligon, L., Szinvelski, C. R. P., Martins, A. A., & Pires, C. C. (2024). Métodos matemáticos: uma aplicação nas ciências agrárias. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v.46, e72131. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460X72131>.