CIÊNCIA e NATURA

ISSN 2179-460X
Acesso aberto

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 44, e58, 2022 • https://doi.org/10.5902/2179460X70592
Submissão: 04/06/2022 • Aprovação: 17/08/2022 • Publicação: 19/12/2022

Matemática

A finitude dos pontos periódicos da sequência de Conway ordenada

The finitude of the periodic points of the Conway ordered sequence

Eudes Antonio Costa [I], **Fernando Soares de Carvalho** [I], **Élis Gardel da Costa Mesquita** [I]

[I] Universidade Federal do Tocantins, Arraias, TO, Brasil

Resumo

Neste artigo, apresentamos algumas propriedades da sequência de Conway ordenada. Tais propriedades estão relacionadas com órbitas e pontos fixos. Nosso principal resultado é determinar uma limitação para a quantidade de algarismos na órbita de qualquer número natural x, ou seja, começando com qualquer termo inicial finito, os termos da sequências terão comprimento limitado a, no máximo, 21 algarismos e, portanto, as órbitas são relativamente periódicas.

Palavras-chave: Função; Sequência; Órbita; Ponto fixo

Abstract

In this paper, we present some properties of the Conway ordered sequence or counting sequence. Such properties are related to orbits and fixed points. Our main result is to determine a limitation for the number of digits in the orbit of any natural number x, that is, starting with any finite initial term, the sequence terms will have a length limited to a maximum of 21 digits, and therefore the orbits are relatively periodics.

Keywords: Fixed point; Function; Sequence; Orbit

1 INTRODUÇÃO

Uma sequência conhecida e denominada *sequência de Conway* ou também *sequência de olhar e dizer*, foi apresentada por John Conway em Conway (1987), cuja regra de formação é dada por:

Para gerar um elemento da sequência a partir do elemento anterior, leia os dígitos do elemento anterior (da esquerda para a direita), contando o número de dígitos em grupos do mesmo dígito.

Veja um exemplo:

$$1,11,21,1211,111221,312211,13112221,1113213211 \tag{1}$$

É importante destacar que, embora a sequência apresentada em (1) seja iniciada apenas com o dígito (algarismo) 1, a *sequência de Conway* pode ser iniciada por qualquer algarismo. Por exemplo, começando com qualquer $d \in \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ou seja $d \neq 1$, tem-se

$$d,1d,111d,311d,13211d,111312211d,31131122211d,1321132132211d,\ldots$$

Neste trabalho, o foco principal é analisar algumas propriedades de uma sequência, uma variação da *sequência de Conway*, que será chamada de *sequência de Conway ordenada*. Nesta variação da sequência, a lei de formação de cada elemento a partir do primeiro é dada por:

Para gerar um elemento da sequência a partir do elemento anterior, leia os dígitos do elemento anterior em ordem crescente, contando e registrando o número de dígitos em grupos do mesmo dígito.

Agora começando com o dígito 1, tem-se:

$$1,11,21,1112,3112,211213,312213,212223,114213 \tag{2}$$

Aqui também é importante destacar que a sequência apresentada em (2) poderá iniciar com qualquer número natural, por exemplo

$$9282575788,\ 2225273819,\ 114213171819,\ 5112131415171819,\ldots$$

A sequência de Conway ordenada, dada na Equação (2), com termo (dígito) inicial 1 está listada como a sequência A005151 na Enciclopédia Online de Sequências Inteiras (Sloane *et al*., 2003, A005151). Outras variações da sequência de *Conway*, e suas relações com a mesma, são apresentadas nos trabalhos de Brier *et al*. (2020b), Brier *et al*. (2020a) e Martín (2006).

Vale ressaltar que Bronstein e Fraenkel (1994) mostraram que qualquer *sequência de Conway ordenada* com termo inicial finito têm comprimento limitado de seus termos após algumas iterações, e de forma independente, também em Costa e Santos (2019). Neste trabalho, vamos melhorar este resultado, obtendo uma limitação para o comprimento dos termos da sequência após um número finito de iterações. Na seção 2 são apresentadas definições e resultados iniciais para o desenvolvimento do trabalho, tais como, definição da aplicação que gera a sequência de *Conway ordenada* e resultados relacionados à órbita de um ponto (elemento, termo ou número) inicial e também pontos fixos desta sequência. Na seção 3 apresentamos o nosso principal resultado, o Teorema 19; na seção 4 são apresentados resultados com o intuito de estabelecer a cota superior para a quantidade de algarismos nos termos da sequência após algumas iterações; e por fim, a seção 5 é dedicada a demonstração do resultado principal.

2 CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

Em todo o texto, N_n denota o subconjunto de números naturais menores ou iguais a n, isto é, $\mathrm{N}_n = \{0,1,2,3,..,n-1,n\}$, para todo n natural. E ainda, para $n \geq 1$, o conjunto F_n denota o conjunto de todos os números naturais com exatamente n algarismos.

Vamos utilizar a notação $\#x = n$ para expressar a quantidade de algarismos do número natural $x \in \mathrm{F}_n$.

Com o intuito de analisar a *sequência de Conway ordenada*, vamos utilizar a aplicação (função) ϕ de modo que a sequência

$$x_1,\ x_2 = \phi(x_1),\ x_3 = \phi(x_2),\ x_4 = \phi(x_3), \ldots,\ x_n = \phi(x_{n-1}),$$

Seja gerada pelo processo iterativo da *sequência de Conway ordenada*. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 1. *Dado um número natural qualquer com n algarismos, ou seja,* $x\ \phi\ F_n$, *representado por* $x = x_1x_2x_3 \cdots x_n$, *sejam* $0 \leq x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nk} \leq 9$ *os algarismos distintos que aparecem em x, e* $p_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$, *a quantidade de vezes que o algarismo* $x_{nj}\ \phi\ N_9$ *aparece na representação do número x. Definimos,*

$$\phi(x) = P1xn_1P2xn_2 \ldots Pkxn_k.$$

Exemplo 2. *Dado o número* $x = 11645578885022$, *veja que* $x_{n1} = 0$, $x_{n2} = 1$, $x_{n3} = 2$, $x_{n4} = 4$, $x_{n5} = 5$, $x_{n6} = 6$, $x_{n7} = 8$ *e* $x_{n8} = 7$ *são os algarismos distintos; temos também que* $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_4 = 1$, $p_5 = 3$, $p_6 = 1$, $p_7 = 1$ *e* $p_8 = 3$; *assim, a soma* $p_1 + p_2 + \ldots + p_8 = 14$ *é a quantidade de algarismos de x, ou seja,* $\#x = 14$. *Tem-se* $\phi(x) = 1021221435161738$ *e* $\#\phi(x) = 16$.

Segue da Definição 1 que a função ϕ (que tem como domínio o conjunto dos números naturais ou inteiros positivos) é claramente não sobrejetora, por exemplo, não existe *x*, tal que $\phi(x) = 1$. Nem é injetiva, pois para $x = 2020$ e $y = 2200$ temos que $\phi(x) = \phi(y) = 2022$.

O comportamento da *sequência de Conway ordenada* pode ser analisada por sucessivas iterações da aplicação ϕ. Sendo assim, os conceitos de órbita, sequência periódica e ponto fixo serão essenciais, detalhes adicionais podem ser consultados em Devaney (2018).

Definição 3 . *(a) Seja* ϕ *a aplicação de Conway ordenada. Para todo número x natural as iterações de* ϕ *são definidas por,*

$$\phi^0(x) = x,\ \phi^1(x) = \phi(x),\ \phi^k(x) = \phi(\phi^{k-1}(x)),\ k \geq 2.$$

(b) A órbita *de um número x, é o conjunto*

$$O(x) = \{x, \phi(x), \phi 2(x), \ldots, \phi k(x), \ldots\}.$$

Exemplo 4. *A órbita de* $x = 1$*, é dada por,* $\phi(1) = 11$*,* $\phi^2(1) = 21$*,* $\phi^3(1) = 1112$*,* $\phi^4(1) = 3112$*,* $\phi^5(1) = 211213$*,* $\phi^6(1) = 312213$*,* $\phi^7(1) = 212223$*,* $\phi^8(1) = 114213$*,* $\phi^9(1) = 31121314$*,* $\phi^{10}(1) = 41122314$*,* $\phi^{11}(1) = 31221324$*,* $\phi^{12}(1) = 21322314$*,* $\phi^{13}(1) = 21322314$*, . . . , ou seja,*

$$\mathcal{O}(1) = \{1,\ 11,\ 21,\ 1112,\ 3112,\ 211213,\ 312213,\ 212223,\ 114213,\ 31121314,\ 41122314,\ 31221324,\ 21322314,\ 21322314, \ldots\}.$$

Neste caso, observe que, $\phi^n(1) = \phi^{n-1}(1)$*, para todo* $n > 12$*.*

Definição 5. *Diremos que a órbita de x é:*

(a) periódica, ou que x é ponto periódico de ordem m, se para algum inteiro m tivermos $\phi^m(x) = x$*,* $\phi^i(x)\ \phi\!= x$ *e* $\phi^{m+i}(x) = \phi^i(x)$*, para todo* $i < m$*.*

(b) relativamente (eventualmente) periódica de ordem m se a órbita de x não é periódica, mas existe um natural k tal que a órbita de $\phi^k(x)$ *é periódica de ordem m.*

Observação 6. *Note que se x pertencer a uma órbita de período m, então todos os pontos da órbita de x também tem período m.*

Exemplo 7. *Veja que números naturais* $x = 10714213141516172819$ *e* $u = 10812213241516271819$ *tem a incrível propriedade que* $\phi(x) = u$ *e* $\phi(u) = x$*, ou seja, a órbita de x, ou a órbita de u, é periódica de ordem 2 (ou x pertence a um 2-ciclo).*

No Exemplo 4, veja que a órbita de $x = 1$ é relativamente periódica de ordem 1, pois para $k \geq 12$ temos que $\phi^k(x) = \phi^{12}(x)$. Já para $y = 22$ tem-se que $\phi(22) = 22$ é periódica de ordem 1.

Definição 8. *Diremos que um número x no domínio de* ϕ *é um ponto fixo, se* $\phi(x) = x$*, ou seja, uma órbita periódica de ordem 1 é composta por um ponto fixo da função* ϕ*.*

Note que se x é um ponto relativamente periódico de ordem 1, para algum $k > 0$, então $\phi^{k+1}(x)$ é um ponto fixo. De fato, pois teremos $\phi^{k+1}(x) = \phi^k(x)$, ou ainda, $\phi(\phi^{k+1}(x)) = \phi(\phi^k(x)) = \phi^{k+1}(x)$, ou seja, $\phi^{k+1}(x)$ é um ponto fixo. Veja o exemplo 9 a seguir.

Exemplo 9. *Dado o número* $x = \underbrace{11...11}_{2022}$*, a órbita de x é dada por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x) = \quad & \{x,\ 20221,\ 101132,\ 10311213,\ 10411223,\ 1031221314,\\ & 1041222314,\ 1031321324,\ 1031223314,\ 1031223314, \ldots\}\,.\end{aligned}$$

Observe que neste caso, a órbita do número x é relativamente periódica de ordem 1 e possui oito elementos distintos. Logo, $\phi^8(x) = 1031223314$ é um ponto fixo com 10 algarismos.

Exemplo 10. *Seja x = 1234567890, temos*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x) \quad = \quad & \{\,x, 101112131415161718 19,\ 101111213141516171819,\\ & 101211213141516171819,\ 101112213141516171819, \ldots\}\,.\end{aligned}$$

Veja que para qualquer $k \geq 4$, $\phi^k(x) = 101112213141516171819$, *ou seja,* 101112213141516171819 *é um ponto fixo com 21 algarismos.*

Exemplo 11. *Veja que no Exemplo 7, o número* $x = 10714213141516172819$ *é periódico de ordem* 2, *assim considerando a função* $\mu = \phi^4$, *segue que* $\mu(10714213141516172819) = 10714213141516172819$ *.*

Observação 12. *Note que, se o número x tem período m para a função* ϕ, *então* $x, \phi(x), \ldots, \phi^{m-1}(x)$ *são todos pontos fixo da função* $\psi = \phi^m$. *De fato, para* $k = 0,1,\ldots,m-1$, *seja* $y = \phi^k(x)$, *assim*

$$\psi(y) = \psi(\phi^k(x)) = \phi^m(\phi^k(x)) = \phi^k(\phi^m(x)) = \phi^k(x) = y\,.$$

E mais, se x tem período m para a aplicação ϕ, *então x é ponto fixo de qualquer função* $\psi = \phi^{mk}$, *para k natural.*

Salientamos que o único ponto fixo com dois algarismos é $x = 22$. De acordo com o que foi apresentado em Costa e Santos (2019), não temos pontos fixos com 1, 3, 4, 5, 6, 7 ou 9 algarismos. Considerando números com 8 algarismos tem-se pontos fixos, por exemplo, $\phi(10311233) = 10311233$ e $\phi(10213223) = 10213223$. É possível ainda, listar algumas classes de pontos fixos com 8 e 10 algarismos, como pode ser visto no Exemplo 13 a seguir.

Exemplo 13. *(a) Se a e b são números inteiros com* $3 < a < b$, *temos os pontos fixos* *com 8 algarismos:* 31331*a*1*b*, 3112331*a*, 2132231*a*, 3112331*a* e 1031331*a*.

(b) *Se a é um número inteiro com 3 < a, temos os pontos fixos com 10 algarismos:* 103122331a.

Proposição 14. *Sejam* $k \geq 2$ *e* $x = p_1x_{i1}p_2x_{i2}\ldots p_kx_{ik}$ *um ponto fixo de* ϕ*, tal que,* $p_j \neq 2$ *e* $x_{ij} \neq 2$ *para todo* $j \in \{1,\ldots,k\}$*. Considere* $y = p_1x_{i1}p_2x_{i2}\ldots p_kx_{ik}22$ *então* $\phi(y)$ *é um ponto fixo de* ϕ*, com k +2 algarismos.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\phi(y) = y$. Sabemos que $p_{ij} \neq 2$ e $x_{ij} \neq 2$ para todo $j \in \{i_1,\ldots,i_k\}$, assim temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: $x_{i1} < 2 < x_{i2}$ ocorre quando $x_{i1} \in \{0,1\}$ e $2 < x_{i2}$, assim $\phi(y) = p_{i1}x_{i1}22p_{i2}x_{i2}\ldots p_{ik}x_{ik}$.

Segundo caso: $x_{i1} < x_{i2} < 2$ ocorre quando $x_{i1} = 0$ e $x_{i2} = 1$, assim $\phi(y) = p_{i1}x_{i1}p_{i2}x_{i2}22p_{i3}x_{i3}\ldots p_{ik}x_{ik}$. Portanto, em ambos os casos tem-se $\phi(\phi(y)) = \phi(y)$.

É claro que podemos obter pontos fixos com diferentes quantidades de algarismos, como suscitado no Exemplo 15.

Exemplo 15. *Em complemento ao Exemplo 13. Para* 3 < *a* < *b os números da forma x* = 31331*a*1*b são pontos fixos de* ϕ *com 8 algarismos e não aparece nenhum algarismo 2, considerando y* = 31331*a*1*b*22 *tem-se que* $\phi(y)$ = 3122331*a*1*b é um ponto fixo com 10 algarismos. Já o número* 1011113141516171819 *é um ponto fixo com 19 algarismos, e não aparece o algarismo 2, assim para y* = 101111314151617181922*, tem-se que* $\phi(y)$ = 101112213141516171819 *é um ponto fixo de 21 algarismos.*

Uma importante particularidade manifesta para os casos em que no número *x* não aparece o algarismo zero. Para esses números a imagem da função ϕ não se altera se permutarmos a posição dos algarismos. Por exemplo, ϕ (23432) = 222314 = ϕ (22334). Isso ocorre porque os números 23432 e 22334 são formados apenas por uma permutação dos algarismos que o compõe.

Definição 16. *Dado um número* $x = x_1x_2\ldots x_n$ *com n algarismos, considere o número* x' *com n algarismos da forma* $x' = x'_1x'_2\ldots x'_n$*,* obtido de x permutando (trocando a posição de) seus algarismos, isto é, x'_j $(1 \leq j \leq n)$ é igual a algum x_i $(1 \leq i \leq n)$*, com cada* $x_j \in N_9$.

Por exemplo os números 139, 193, 319, 391, 913 e 931 são obtidos por meio de permutações dos algarismos do número 319. Aqui x' indicará qualquer número inteiro obtido de x permutando seus algarismos. Por simplicidade diremos que x' é um número permutado obtido de x. Aqui consideraremos também o caso em que o 0 (zero) aparece como algarismo do número x com $n > 1$ algarismos, ainda assim teremos (consideramos) os números permutados x' com n algarismos. Por exemplo, 012 e 021 são números permutados com 3 algarismos obtidos de 102.

O próximo resultado é de fácil verificação.

Proposição 17. *Costa e Santos (2019) Sejam x e x' números com n algarismos no domínio da função ϕ, então $\phi(x) = \phi(x')$.*

Observação 18. *Os pontos periódicos apresentados neste trabalho foram encontrados a partir de um código utilizando o software Octave, em que cada algarismo que compõe o número x é gerado de forma aleatória e o código roda até que o critério de parada ($\phi^k(x) = x$) é alcançado para algum $k \geq 1$ inteiro.*

3 RESULTADO PRINCIPAL

Em Bronstein e Fraenkel (1994) mostra-se, que começando com qualquer termo inicial x (número natural) finito, todas as sequências (iterações) têm comprimento de seus termos limitado, ou seja, a órbita de x é relativamente periódica. No recente trabalho Costa e Santos (2019) mostraram que se x é um ponto fixo da forma $x = x_1x_2x_3 \cdots x_n$, então $n \leq 100$, ou seja, o número de algarismos de um ponto fixo não é superior a 100 e que os pontos relativamente periódicos teriam no máximo 33 algarismos. Observamos que esta estimativa pode ser melhorada, nosso principal resultado é mostrar que:

Teorema 19. *Para todo número x no domínio da função ϕ, a órbita de $\phi^n(x)$ converge para um ponto (relativamente) periódico com no máximo 21 algarismos.*

A demonstração será apresentada na Seção 5. Todo ponto relativamente periódico e os elementos que formam o período tem no máximo 21 algarismos. Em outras palavras, todo ponto x do domínio da ϕ é periódico ou relativamente periódico, ou seja, a órbita de x estabiliza em um ponto periódico com ordem finita m com no máximo 21 algarismos, isto é, existe um natural $t_0 \geq 1$ tal que $\phi^{t_0}(x) \in F^*_{21}$, em que F^*_n denota o conjunto de todos os números naturais com no máximo n algarismos, com $n \geq 1$. Como consequência direta do Teorema 19, temos o seguinte resultado.

Teorema 20. *Não existe ponto fixo de ϕ com mais de 21 algarismos.*

Demonstração. Suponha que x seja um ponto fixo com mais de 21 algarismos. De acordo com Teorema 19, existe um t inteiro positivo, tal que $\phi^t(x) \in \mathcal{F}^*_{21}$. Mas, se x é ponto fixo então para qualquer t temos $\phi^t(x) = x$, ou seja, $\phi^t(x)$ teria mais de 21 algarismos, contrariando o fato de $\phi^{t_0}(x) \in \mathcal{F}^*_{21}$ para algum t_0. Portanto, concluímos que qualquer x ponto fixo de ϕ tem no máximo 21 algarismos.

4 NÚMERO DE ALGARISMOS NA IMAGEM DA FUNÇÃO

É possível perceber que há uma dificuldade computacional para encontrar pontos (relativamente) periódicos para a função ϕ. De fato, basta observar que dado um número x com n algarismos, tem-se $N = 9 \cdot 10^{n-1}$ números a serem verificados, tornando o trabalho computacional árduo, à medida que o valor de n cresce. Os resultados apresentados nesta seção, têm o intuito de limitar o valor de n, possibilitando a otimização do trabalho computacional.

Proposição 21. *Seja* $x = \underbrace{aa\cdots a}_{p_a\ vezes}$ *um número com* $p_a \geq 1$ *algarismos repetidos, com* $a \in N_9$ *e* $10^{k-1} \leq p_a < 10^k$, *então* $\#\phi(x) = k+1$ *para qualquer* $k \geq 1$ *inteiro.*

Demonstração. Para quaisquer $k \geq 1$ e $p_a \geq 1$ inteiros, como $10^{k-1} \leq p_a < 10^k$, a quantidade de algarismos de p_a é igual a k, ou seja, $\#p_a = k$. Sendo $x = \underbrace{aa\cdots a}_{p_a\ vezes}$, segue que $\phi(x) = p_a a$. Como $\#\phi(x) = (\#p_a)+1$, conclui-se que $\#\phi(x) = k+1$.

Proposição 22. *Costa e Santos (2019) Dado um número x com n algarismos, temos que*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n\,,$$

sendo p_i, $i = 1,2,\ldots,k$, a quantidade de vezes que o algarismo x_{ij} aparece em x.

Demonstração. É uma consequência imediata da Definição 1, tendo em vista que o número x possui n algarismos na representação decimal e que p_{i1} é a quantidade de vezes que o algarismo x_{i1} aparece, p_{i2} é a quantidade de vezes que o algarismo x_{i2} aparece, e assim sucessivamente. Donde obtemos o resultado.

Combinando os dois resultados anteriores, temos

Proposição 23. *Dado um número x com n algarismos, tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, sendo p_i a quantidade de vezes que o algarismo x_{ij} aparece em x, então*

$$\#\phi(x) = \sum_{i=1}^{k}(\#p_i + 1) \cdot$$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k \in N_9$ os $1 \leq k \leq 10$ algarismos distintos do número x. Podemos permutar os algarismos de x, caso seja necessário, de tal forma que

$x' = \underbrace{x_1x_1\ldots x_1}_{p_1}\underbrace{x_2x_2\ldots x_2}_{p_2}\ldots\underbrace{x_kx_k\ldots x_k}_{p_k}$, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.

Para cada bloco de x_j algarismos repetidos faça $y_j = \underbrace{x_jx_j\ldots x_j}_{p_{i_j}}$ Segue da Proposição 21, que o número de algarismos de $\phi(y_j)$

é $\#p_i + 1$, com $10^{k-1} \leq p_i < 10^k$, para algum natural $k \geq 1$. Veja que o número de algarismos de $\phi(x')$ é obtido pela adição do número de algarismos de $\phi(y_j)$, ou seja,

$$\#\phi(x') = \#\phi(y_1) + \#\phi(y_2) + \ldots + \#\phi(y_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\#p_i + 1) \,.$$

Por fim, segue da Proposição 17 que o número de algarismos de $\phi(x')$ é igual ao número de algarismos de $\phi(x)$, donde concluímos o resultado desejado.

Segue diretamente Proposição 23 que

Corolário 24. *Costa e Santos (2019) Dado um número x com n algarismos.*

(a) Se todos os algarismos de x são distintos e $n \leq 10$, então $\phi(x)$ possui 2n algarismos.

(b) Admita que x tenha em sua representação decimal $k < n$ algarismos distintos, com $1 \leq k \leq 10$, então $\phi(x)$ possui no mínimo 2k algarismos.

Uma questão que nos interessa: dado um número *x* com *n* > 1 algarismos, existe uma cota superior para o número de algarismos da função ϕ na primeira iteração? Existe uma cota superior para o número de algarismos da função ϕ após a segunda iteração? Estamos interessados em determinar se a órbita de *x* estabiliza, isto é, se após um número finito de iterações, a órbita de *x* converge para algum ponto (relativamente) periódico.

Exemplo 25. *Sejam* $x = \underbrace{11...11}_{10}$, $y = 1122334455$, $z = 1234567890$ *números com 10 algarismos. A órbita de x é*

$$\mathcal{O}(x) = \{x,\ 101, 1021,\ 102112,\ 103122, 10212213, 10313213,\ 10311233, ...\}\ ,$$

a órbita de y é

$$\mathcal{O}(y) = \{y,\ 2122232425, 1162131415,\ 511213141516,\ 611213142516, ...\}$$

e a órbita de z é

$$\mathcal{O}(z) = \{z, 10111213141516171819, 101111213141516171819,...\}\ .$$

Observando estas órbitas particulares, verifica-se que $\phi(x)$ possui 3 algarismos, $\phi(y)$ possui 10, enquanto que $\phi(z)$ possui 20 algarismos; já $\phi^2(x)$ possui 4 algarismos, $\phi^2(y)$ possui 10 e $\phi^2(z)$ possui 21 algarismos.

Os dois próximos exemplos, e as tabelas, compara a quantidade de algarismos de $\phi(x)$, sendo x um número composto por 30 algarismos e a distribuição dos algarismos é distinta.

Exemplo 26. *Seja x um número formado por 30 algarismos, com $x_1, x_2, ..., x_k$ ϕ {0,1,...,9}, sendo $1 \leq k \leq 10$ os k algarismos distintos do número x. A Tabela 1 exibe a quantidade de algarismos de $\phi(x)$, em que a distribuição dos algarismos em x busca ser "equânime".*

Tabela 1 - Número de algarismos

k	$\#x_i$	$\phi(x)$	$\#(\phi(x))$
1	30	$30x_1$	3
2	15-15	$15x_1 15x_2$	6
3	10-10-10	$10x_1 10x_2 10x_3$	9
4	9-9-9-3	$9x_1 9x_2 9x_3 1x_4$	8
5	6-6-6-6-6	$6x_1 6x_2 6x_3 6x_4 6x_5$	10
6	5-5-5-5-5-5	$5x_1 5x_2 5x_3 5x_4 5x_5 5x_6$	12
7	4-4-4-4-4-4-6	$4x_1 4x_2 4x_3 4x_4 4x_5 4x_6 4x_7$	14
8	4-4-4-4-3-3-3-3	$4x_1 4x_2 4x_3 4x_4 3x_5 3x_6 3x_7 3x_8$	16
9	3-3-3-3-3-3-4-4-4	$3x_1 3x_2 3x_3 3x_4 3x_5 4x_6 4x_7 4x_8 4x_9$	18
10	3-3-3-3-3-3-3-3-3-3	$3x_1 3x_2 3x_3 3x_4 3x_5 3x_6 3x_7 3x_8 3x_9 3x_{10}$	20

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Exemplo 27. *Seja x um número formado por 30 algarismos, com* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ϕ *{0,1, . . . , 9}, sendo* $1 \leq k \leq 10$ *os k algarismos distintos do número x. A Tabela 2 exibe a quantidade de algarismos de* $\phi(x)$*, em que a distribuição dos algarismos em x não é equânime.*

Tabela 2 - Número de algarismos 2

k	$\#x_i$	$\phi(x)$	$\#(\phi(x))$
1	30	$30x_1$	3
2	15-15	$15x_1 15x_2$	6
3	10-10-10	$10x_1 10x_2 10x_3$	9
4	10-10-9-1	$10x_1 10x_2 9x_3 1x_4$	10
5	10-10-8-1-1	$10x_1 10x_2 8x_3 1x_4 1x_5$	12
6	10-10-7-1-1-1	$10x_1 10x_2 7x_3 1x_4 1x_5 1x_6$	14
7	10-10-6-1-1-1-1	$10x_1 10x_2 6x_3 1x_4 1x_5 1x_6 1x_7$	16
8	10-10-5-1-1-1-1-1	$10x_1 10x_2 6x_3 1x_4 1x_5 1x_6 1x_7 1x_8$	18
9	10-10-4-1-1-1-1-1-1	$10x_1 10x_2 6x_3 1x_4 1x_5 1x_6 1x_7 1x_8 1x_9$	20
10	10-10-3-1-1-1-1-1-1-1	$10x_1 10x_2 6x_3 1x_4 1x_5 1x_6 1x_7 1x_8 1x_9 1x_{10}$	22

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

O próximo resultado procura caracterizar a situação descrita nos Exemplos 25 e 27.

Proposição 28. *Dados os número x e y com n algarismos, tal que x tenha* k_1 *algarismos distintos e y tenha* k_2 *algarismos distintos, com* $1 \leq k_1 < k_2 \leq 10$ *e* $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{k1} = y_{k1}, x_{k1+1} = y_{k1+1}, \ldots y_{k2}$*. Se* $p_i = q_i$ *para* $i = 1,2,\ldots,k_1 - 1$ *então o número de algarismos de* $\phi(x)$ *é menor que* *o número de algarismos de* $\phi(y)$*, sendo* p_i *a quantidade de vezes que o algarismo* x_i *aparece em x; e* q_i *a quantidade de vezes que o algarismo* y_i *aparece em y.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{k1} \in \{0,1,\ldots,9\}$ os $1 \leq k_1 < 10$ algarismos distintos do número x e $y_1, y_2, \ldots, y_{k2} \in \{0,1,\ldots,9\}$ os $1 < k_2 \leq 10$ algarismos distintos do número y. Como $k_2 > k_1$ reordene os algarismos de y, de forma que

$$y_1 = x_1, \ldots, y_{k1} = x_{k1}.$$

Pela Proposição 22, temos que

$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k1} = n$, e

$q_1 + q_2 + \cdots + q_{k2} = n$.

Veja que

$\phi(x) = pi1x1pi2x2 \ldots pik1xk1$, e

$\phi(y) = pi1\ x1pi2\ x2 \ldots pik1{-}1\ xk1{-}1qik1\ xk1\ qik1{+}1\ yk1{+}1 \ldots qik2\ yk2$, assim $\#\phi(y) > \#\phi(x)$, visto que $q_{ik}1 + q_{ik}1{+}1 + \ldots + q_{ik}2 = p_{ik}1$.

Segue da Proposição 28, como no Exemplo 27, que quanto maior a quantidade de algarismos distintos em x, um número com n algarismos, maior será a quantidade de algarismos em $\phi(x)$, visto que a quantidade de algarismos de cada p_i é menor ou igual que a quantidade de algarismos de n. Dessa forma, para estabelecer uma cota superior para $\#\phi(x)$, basta considerar o caso em que $\phi(x)$ apresenta a maior quantidade possível de algarismos distintos, ou seja, $p_i \geq 1$ para todo $i = 1,2,\ldots,k$. Isto significa que todos os elementos pertencentes a N_9 devem estar presentes em x e os algarismos em x não podem ser distribuídos de forma não equânime, como no Exemplo 25.

Para todo n ≥ 10, o Algoritmo 1 estabelecerá como cada algarismo dever ser distribuído e repetido, de modo que este procedimento estabeleça uma distribuição que garanta que $\#\phi(x)$ seja o maior valor possível.

Algoritmo 1. *Dado um número natural x com n algarismos, como $10^{k-1} \leq n < 10^k$ para algum k natural, tem-se:*

$$n = ak-1ak-2 \ldots a1a0 = ak-110k-1+ ak-210k-2+ \cdots + a1101+ a0 \text{ , } ak-1 = 0\ \phi \quad .$$

- *Primeiro passo: Colocar (distribuir) cada algarismo $x_j \in N_9$ exatamente 10^{k-2} vezes;*
- *Segundo passo: Se a quantidade de algarismos restantes for menor ou igual a $9 \cdot 10^{k-2}$, escolha qualquer algarismo pertencente a N_9 e repita (distribua) este algarismo até finalizar a quantidade de algarismos; e finaliza o processo.*
- *Terceiro passo: Se após o primeiro passo, a quantidade de algarismos restante for maior que $9 \cdot 10^{k-2}$, escolha algarismos distintos pertencentes a N_9 e distribua a cada um deles exatamente $9 \cdot 10^{k-2}$, até que o segundo passo possa ser realizado.*

Os exemplos seguintes mostrarão a funcionalidade do Algoritmo 1 para gerar um número x com n ≥ 10 algarismos, tal que $\phi(x)$ tenha o maior número possível de algarismos. Apresentamos, pelos exemplos, alguns casos particulares, com o intuito de explorar um pouco mais o Algoritmo 1, pensando em um leitor menos familiarizado. Para um leitor mais experiente é possível suprimir a leitura destes, evitando que se tornem repetitivas e enfadonhas as argumentações e procedimentos.

Exemplo 29. *Vamos exibir um número x com 21 algarismos, ou seja, temos $n = 2 \cdot 10+1$. No primeiro passo devemos distribuir cada algarismo 1 vez, ou seja,*

$$p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1,\ p_4 = 1,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 1,\ p_8 = 1,\ p_9 = 1,\ p_0 = 1\ .$$

E temos um número com 10 algarismos distintos. Escolhemos os algarismos 1 e acrescentamos mais 9 vezes o algarismo. E finalizamos com o algarismo 2 aparecendo 3 vezes, assim teremos:

$$p_1 = 10,\ p_2 = 3,\ p_3 = 1,\ p_4 = 1,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 1,\ p_8 = 1,\ p_9 = 1,\ p_0 = 1\ .$$

Assim $\phi(x)$ = 101013213141516171819 também tem 21 algarismos.

Exemplo 30. *Vamos exibir um número x com 39 algarismos, ou seja, temos n = 3·10+9. No primeiro passo devemos distribuir cada algarismo 1 vez, ou seja,*

$$p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1,\ p_4 = 1,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 1,\ p_8 = 1,\ p_9 = 1,\ p_0 = 1\ .$$

E temos um número com 10 algarismos distintos. Escolhemos os algarismos 0, 1 e 2 e acrescentamos mais 9 vezes o algarismo. E finalizamos com o algarismo 3 aparecendo 3 vezes, assim teremos:

$$p_1 = 10,\ p_2 = 10,\ p_3 = 3,\ p_4 = 1,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 1,\ p_8 = 1,\ p_9 = 1,\ p_0 = 10\ .$$

Assim, $\phi(x)$ = 10010110233141516171819 tem 23 algarismos.

Exemplo 31. *Vamos exibir um número x com 99 algarismos, ou seja, temos n = 9·10+9. No primeiro passo devemos distribuir cada algarismo 1 vez, ou seja,*

$$p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1,\ p_4 = 1,\ p_5 = 1,\ p_6 = 1,\ p_7 = 1,\ p_8 = 1,\ p_9 = 1,\ p_0 = 1\ .$$

Escolhemos os algarismos de 0 a 8 e acrescentamos mais 9 e o algarismo 9 mais 8, assim teremos:

$$p_1 = 10,\ p_2 = 10,\ p_3 = 10,\ p_4 = 10,\ p_5 = 10,\ p_6 = 10,\ p_7 = 10,\ p_8 = 10,\ p_9 = 9,\ p_0 = 10\ .$$

Assim $\phi(x)$ = 10010110210310410510610710899 tem 29 algarismos.

Exemplo 32. *Vamos exibir um número x com 995 algarismos, ou seja, temos n = 9·10^2+9·10+5. No primeiro passo devemos repetir (distribuir) cada algarismo 10 vezes, ou seja,*

$$p_1 = 10,\ p_2 = 10,\ p_3 = 10,\ p_4 = 10,\ p_5 = 10,\ p_6 = 10,\ p_7 = 10,\ p_8 = 10,\ p_9 = 10,\ p_0 = 10\ .$$

Agora nos algarismos de 1 à 9 vamos acrescentar mais 90 algarismos, e obtemos

$$p_1 = 100,\ p_2 = 100,\ p_3 = 100,\ p_4 = 100,\ p_5 = 100,\ p_6 = 100,\ p_7 = 100,\ p_8 = 100,\ p_9 = 100,$$

$p_0 = 10$.

E já temos um número com 990 algarismos. Escolhemos o algarismo 0 acrescentamos mais $a_0 = 85$, assim teremos:

$p_1 = 100$, $p_2 = 100$, $p_3 = 100$, $p_4 = 100$, $p_5 = 100$, $p_6 = 100$, $p_7 = 100$, $p_8 = 100$, $p_9 = 100$, $p_0 = 95$.

Assim, $\phi(x) = 950100110021003100410051006100710081009$ tem 39 algarismos.

Exemplo 33. Vamos exibir um número x com 2023 algarismos, ou seja, temos $n = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$. No primeiro passo devemos repetir (distribuir) cada algarismo 10^2 vezes, ou seja,

$p_1 = 100$, $p_2 = 100$, $p_3 = 100$, $p_4 = 100$, $p_5 = 100$, $p_6 = 100$, $p_7 = 100$, $p_8 = 100$, $p_9 = 100$, $p_0 = 100$.

Agora, acrescentar ao algarismo 9 mais 900 vezes e ao algarismo 8 mais 223, ou seja,

$\mathrm{p}_1 = 100$, $\mathrm{p}_2 = 100$, $\mathrm{p}_3 = 100$, $\mathrm{p}_4 = 100$, $\mathrm{p}_5 = 100$, $\mathrm{p}_6 = 100$, $\mathrm{p}_7 = 100$, $\mathrm{p}_8 = 223$, $\mathrm{p}_9 = 1000$, $\mathrm{p}_0 = 100$.

Assim $\phi(\mathrm{x}) = 100010011002100310041005100610072238100009$ tem 41 algarismos.

Proposição 34. *Seja x um número com $n \geq 10$ algarismos. Se x é dado respeitando o Algoritmo 1, então a quantidade de algarismos de $\phi(x)$ será máxima.*

Demonstração. Como no Algoritmo 1, suponha $10^{k-1} \leq n < 10^k$ e portanto n possui $k - 1$ algarismos. Pela Proposição 28 para que $\phi(x)$ tenha o maior número de algarismos, no número x deverá aparecer os 10 algarismos, ou seja, devemos ter $p_i \neq 0$, para $i = 0,1,2,\ldots,9$, sendo cada p_i o marcador para a contagem de dígitos do número x. Observa-se que quanto maior o número de algarismos de cada p_i, maior será o número de algarismos de $\phi(x)$. Segue do Algoritmo1 que,

$$p_i = 10^{k-2} + \delta, \text{ com } 10^{k-3} < \delta \leq 9 \cdot 10^{k-2}. \quad (3)$$

Dessa forma, todos os valores de p_i foram maximizados (otimizados).

A Proposição 35 a seguir, irá estabelecer uma cota superior para o número de algarismos da função ϕ após a primeira iteração.

Proposição 35. *Seja x um número natural com n ≥ 10 algarismos, então a quantidade de algarismos de $\phi(x)$ é menor ou igual a 10(k +1), sendo k = #n.*

Demonstração. Como o número de algarismos de x é n ≥ 10, segue da Proposição 28 que $\phi(x)$ será maior se todos os algarismos em N_9 figuram pelo menos 10^{k-2} vezes. Como $10^{k-1} \leq n < 10^k$, teremos cada p_i máximo se $\delta = 9 \cdot 10^{k-2}$, assim para todo i na Equação (3), considere

$$p'i = 10k-2+9 \cdot 10k-2 = 10k-1 ,$$

ou seja, o número de algarismos de cada p'_i é k, isto é # $p'_i = k$. Sabemos que

$\phi(x) = p_0 0 p_1 1 p_2 2 p_3 3 p_4 4 p_5 5 p_6 6 p_7 7 p_8 8 p_9 9$. Segue da Proposição 23 que o número de algarismos de $\phi(x)$ é

$$\#\phi(x) = \sum_{j=0}^{9} (\#p_j + 1) \leq \sum_{j=0}^{9} (\#p'_j + 1) = 10(k+1)\ .$$

Portanto $\#\phi(x)$ é limitado por 10(*k* +1).

Observação 36. *Na Proposição 35, veja que ao aplicar a função ϕ, a quantidade de algarismos de $\phi(x)$ diminuirá enquanto k ≥ 2, sendo k a quantidade de algarismos da quantidade de algarismos do número x.*

5 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 19

Antes de demonstrar o Teorema 19, mostraremos um resultado auxiliar, o Lema 37 seguinte, que garante que o número de algarismos da quantidade da quantidade de algarismos da iteração de ϕ aplicado ao número x será no máximo 21 dígitos, para todo $10 \leq n < 100$, em que $\#x = n$.

Lema 37. *Seja x qualquer número natural com $10 \leq n < 10^2$ algarismos, então a quantidade de algarismos de $\phi^3(x)$ é menor que 21.*

Demonstração. Temos que a quantidade de algarismos de x é $10 \leq n < 10^2$, ou seja, $n = a_1 \cdot 10 + a_0$. Segue do Algoritmo 1 que $\phi(x)$ será maior se todos os algarismos em N_9 figuram pelo menos uma vez. Veja que cada $p_i = 1 + \delta$ com $0 \leq \delta \leq 9$, assim para todo i temos $p_i \leq 10$, nem todos podem ser 10, ao menos um $p_1 \leq 9$. Digamos $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = 10$ e $p_9 = 9$. Segue da Proposição 23 que o número de algarismos de $\phi(x)$ é

$$\#\phi(x) = \sum_{j=0}^{9}(\#p_j + 1) = 9 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 29\,,$$

isto é, $\#\phi(x)$ é limitado por $29 = 2 \cdot 10 + 9$. Neste caso, novamente pelo Algoritmo 1 temos que $\phi^2(x)$ será maior se todos os algarismos em N_9 figuram pelo menos uma vez. Temos ainda a quantia de 19 para distribuir e no máximo 2 algarismos podem chegar a 10. Digamos $p_0 = p_1 = 10$, $p_2 = 2$ e $p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = 1$. Mais uma vez usando a Proposição 23, obtemos que o número de algarismos de $\phi^2(x)$ é

$$\#\phi^2(x) = \sum_{j=0}^{9}(\#p_j + 1) = 2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 22\,,$$

ou seja, $\#\phi^2(x)$ é limitado por $22 = 2 \cdot 10+2$. Disto obtemos do Algoritmo 1 que $\phi^3(x)$ será maior se todos os algarismos em N_9 figuram pelo menos uma vez. Temos ainda a quantia de 12 para distribuir, e no máximo 1 algarismo podem chegar a 10.

Digamos $p_1 = 10$, $p_0 = p_2 = p_3 = 2$ e $p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = 1 = p_9 = 1$. Logo, da Proposição 23 temos que quantidade de algarismos de $\phi^3(x)$ é

$$\#\phi^3(x) = \sum_{j=0}^{9}(\#p_j + 1) = 1 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 21\ .$$

Portanto $\#\phi^3(x)$ é limitado por 21 algarismos. Consequentemente, no máximo, na terceira iteração de x teremos uma limitação de 21 dígitos para todo $10 \leq n < 100$.

Na Tabela 3 exibimos a quantidade máxima de algarismos na iteração de ϕ, para um número x com $10 \leq n < 100$ algarismos.

Tabela 3 - Número máximo de algarismos na iteração

	#*x*	**máx. #ϕ**	**máx. #ϕ^2**
1	10-19	21	21
2	20-29	22	21
3	30-39	23	21
4	40-49	24	21
5	50-59	25	21
6	60-69	26	21
7	70-79	27	21
8	80-89	28	22
9	90-99	29	22

Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Vamos representar a classe de todos os números inteiros positivos formados por no máximo 21 algarismos por M_{21}.

Demonstração. do Teorema 19

Seja x um número natural com $n \geq 10$ algarismos. Segue da Proposição 28 que o número máximo de algarismos em $\phi(x)$ ocorre quando os 10 algarismos de N_9 figuram. Sabemos que $10^{k-1} \leq n < 10^k$, sendo $k = \#n$. Pela Observação 36, o número de algarismos de $\phi(x)$ é menor ou igual a $10(k+1)$. E mais, ao aplicar a função ϕ, o número de algarismos diminuirá enquanto $k \geq 2$, ou seja, existe um inteiro $t_0 \geq 1$ tal que $\phi^{t0}(x)$ ϕ M_{30}, ou seja, a quantidade de algarismos de $\phi^{t0}(x)$ será menor ou igual a 30. Assim, se $k = 2$ segue do

Lema 37 que $\#\phi^3(x)$ será no máximo 21 algarismos. Em qualquer caso, temos que após um número finito de iterações os termos na órbita de qualquer x terão menos que 21 algarismos, ou seja, existe um inteiro $t_1 \geq 1$ tal que $\phi^t(x)$ tem menos de 21 algarismos para todo $t \geq t_1$, ou seja, $\phi^t(x)$ ϕ M_{21}. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, para qualquer número x inicial teremos que x é um ponto relativamente periódico.

6 CONCLUSÕES

As sucessões são um assunto (conteúdo) clássico da matemática escolar. Problemas com sucessões, sejam as sequências numéricas, sequências recorrentes, progressões aritméticas ou geométricas, podem ser exploradas e apresentadas aos estudantes do ensino fundamental ou médio, veja por exemplo os trabalhos Gairín *et al*. (2017); Manero García *et al*. (2021), o banco de questões da OBMEP:BRASIL (2017), além do trabalho Costa e Santos (2019).

Neste trabalho mostramos que dado qualquer número inicial x, mesmo o caso em que $\phi(x)$ possui o maior número de algarismos possível, teremos que a órbita, ou a sequência de iterações é infinita, no entanto após um número finito de iterações o comprimento ou a quantidades de algarismos de $\phi^n(x)$ será limitado superiormente por 21 algarismos. Utilizando o *Princípio da Casa dos Pombos*, concluímos que a sequência de *Conway ordenada* é sempre relativamente periódica.

Um problema ainda em aberto é determinar o número mínimo necessário de iterações para qualquer número natural x, tal que $\phi(x)^t$ ϕ M_{21}.

REFERÊNCIAS

BRIER, É.; G.-S. R.; NACCACHE, D.; PACCO, A.; TROIANI, E. The look-and-say the biggest sequence eventually cycles. **arXiv:200607246[math.D.S, math.CO]**, Cornell University, 2020a.

BRIER, É.; G-S. R.; NACCACHE, D.; PACCO, A.; TROIANI, E. Stuttering conway sequences are still conway sequences. **arXiv preprint arXiv:200606837[math.D.S, math.CO]**, Cornell University, 2020b.

BRONSTEIN, V.; FRAENKEL, A. S. On a curious property of counting sequences. **The American Mathematical Monthly**, [*s.l.*], v. *101, n.* 6, p. 560–563, 1994.

CONWAY, J. H. The weird and wonderful chemistry of audioactive decay. Em *In*: COVER, T. M.; GOPINATH, B. (ed.). **Open problems in communication and computation.** Springer, New York, 173–188, 1987.

COSTA, E. A.; SANTOS, R. A. Contando algarismos. **Revista da Olimpíada - IME - UFG**, Goiânia, [*s.l.*], n. 14, p. 61–74, 2019.

DEVANEY, R. L. **An introduction to chaotic dynamical systems**. 2. ed. CRC press: Boca Raton, 2018. 360 p.

GAIRÍIN, J. M.; OLLER, A. M.; MANERO, V.; MUÑOZ, J. M. (2017). La sucesión look and say. *In:* VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*,* 2017. **Anais** [...]. Zaragoza: Universidad de Zaragoza, 2018. p. 16–24.

MANERO GARCÍA, *et al* . Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. **Avances de investigación en educación matemática**, [*s.l.*], n. 20, p. 161-183, 2021.

MARTÍN, Ó. Look-and-say biochemistry: Exponential rna and multistranded dna. **The American Mathematical Monthly**, [*s.l.]*, v. *113, n.* 4, p. 289–307, 2006.

OBMEP:BRASIL. Banco de Questões 2017. OBMEP - **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, Sociedade Brasileira de Matemática.** [*S.l*]: IMPA, 2017. Disponível em: www.obmep.org.br. Acesso em: 31/05/2022

SLOANE, N. J., *et al*. **The on-line encyclopedia of integer sequences**. 2003. Disponível em: http://oeis.org/A005151. Acesso em: 31/05/2022

Contribuição de autoria

1– Eudes Antonio Costa

Professor Adjunto; Doutor em Matemática

https://orcid.org/0000-0001-6684-9961 • @fscarvalho@uft.edu.br

Contribuição: Writing - original draft

2– Fernando Soares de Carvalo

Professor Adjunto, Doutor em Ciências Mecânicas

https://orcid.org/0000-0001-6639-0716 • fscarvalho@uft.edu.br

Contribuição: Writing - original draft

3 – Élis Gardel da Costa Mesquita

Professor Adjunto; Doutor em Matemática

https://orcid.org/0000-0001-2385-4108 • elisgardel@uft.edu.br

Contribuição: Writing - original draft

Como citar esse artigo

COSTA, A.C.; CARVALHO, F. S.; MESQUITA, E. G. C. A finitude dos pontos periódicos da sequência de Conway ordenada. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 44, e58, 2022. DOI: https://doi.org/10.5902/2179460X70592.