

## Teaching

# Círculo de Moedas: um estudo da Função Quadrática

## Penny Circle: a study of the Quadratic Function

Marcia Falek Rocha<sup>1</sup> , Cinthya Maria Schneider Meneghetti<sup>1</sup> ,  
Celiane Costa Machado<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, Brasil

## RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo apresentar e discutir uma proposta pedagógica envolvendo o ensino de Função Quadrática, direcionada a estudantes do Ensino Médio. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, e está amparada pelos pressupostos da investigação matemática (Ponte *et al.*, 2019). A atividade surgiu a partir de uma reflexão acerca da seguinte questão: como o estudante poderia reconhecer o gráfico de uma Função Quadrática numa situação problema, utilizando o material concreto? A partir desta proposta, o professor pode refletir sobre o ensino de funções e incentivar o estudante a estabelecer relações entre objetos e problemas matemáticos que, por meio de material concreto, permitem a experimentação e verificação dos resultados conjecturados. Além disso, retomar os conteúdos de Função Afim, Resolução de Sistemas, Radicais, Função Exponencial, discutir os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e propriedades do gráfico das funções.

**Palavras-chave:** Função quadrática, Investigação matemática, Material concreto

## ABSTRACT

This work aims to present and discuss a pedagogical proposal involving the teaching of Quadratic Function, aimed at high school students. This is research with a qualitative approach, and is supported by the assumptions of mathematical research (Ponte *et al.*, 2019). The activity arose from a reflection on the following question: how could the student recognize the graph of a Quadratic Function in a problem situation, using concrete material? Based on this proposal, the teacher can reflect on the teaching of functions and encourage the student to establish relationships between objects and mathematical problems that, through concrete material, allow experimentation and verification of conjectured results. In addition, review the contents of Affine Function, System Resolution, Radicals, Exponential Function, discuss the concepts of domain, codomain, range and properties of the graph of functions.

**Keywords:** Quadratic function, Mathematical research, Concrete material

## 1 INTRODUÇÃO

A investigação matemática propõe desafios tanto para o professor quanto para os educandos, pois é um caminho a ser percorrido por meio de dinâmicas e provocações, além de ajudar tanto no ensino quanto na aprendizagem dos conteúdos estimulando a criatividade e o raciocínio do estudante. “Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado” (Ponte *et al.*, 2019, p.9).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que norteia os currículos e propostas pedagógicas das escolas, a prática da investigação nas aulas de matemática é uma das competências gerais do Ensino Básico. De acordo com o documento, a investigação matemática permite:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2017, p.9).

A investigação matemática é uma estratégia ainda pouco utilizada nos livros didáticos. Livros que abordam o assunto Função Quadrática e são recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) buscam ilustrar uma aplicação do conteúdo e despertar o interesse dos estudantes por meio de exemplos. Os autores de Souza e Garcia (2016), citam o salto dos cangurus, o estudo das dimensões de uma horta ou ainda relacionando o conteúdo com o movimento de queda livre estudado pelo físico italiano Galileu Galilei. Já o livro de Dante (2013), apresenta o formato de uma montanha russa como exemplo de parábola, além de citar um satélite artificial para falar do foco. A definição de Função Quadrática é apresentada a partir de questionamentos diretos e com justificativas deixadas em aberto, como por exemplo,

se retângulos de mesmo perímetro possuem a mesma área e, em caso negativo, se existiria uma área máxima.

Para construir uma proposta que complemente e auxilie o estudo de Função Quadrática, o professor comprometido com sua prática considera diversos fatores como as necessidades e características particulares de suas turmas. Segundo Perrenoud (1999) é necessário inscrever a atitude reflexiva na identidade profissional dos professores, para convidá-los a construir iniciativas próprias em função dos alunos, considerando recursos e obstáculos que encontra. Assim, uma estratégia de ensino como a investigação matemática em uma proposta pedagógica que inclui um material concreto possibilita uma prática reflexiva e diferente daquela usualmente desenvolvida nos livros por meio de exemplos.

Destacamos a importância do processo de investigação para o exercício da criatividade, análise crítica e que, não somente, prioriza o resultado final. Nesse sentido, esse trabalho tem por objetivo apresentar e discutir uma proposta pedagógica para o ensino de Função Quadrática. A atividade busca contribuir para a formação de um estudante que participe das discussões com liberdade e que seja capaz de transformar sua maneira de pensar, relacionando diferentes conteúdos entre si e com seu cotidiano. Não há a intenção de fornecer direções, mas sim de despertar a curiosidade por meio da investigação e uso da intuição durante a resolução das tarefas propostas. Essa atividade é um recorte de uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), conforme Rocha (2021).

Na sequência, na segunda seção, apresentamos alguns elementos sobre investigação matemática e na Seção 3 os aspectos metodológicos que amparam este trabalho. Na Seção 4 apresentamos a proposta pedagógica seguida das considerações finais e das referências bibliográficas.

## 2 INVESTIGAR PARA TRANSFORMAR A SALA DE AULA

Quando se fala em investigação, entende-se como sendo a observação e descoberta de relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, onde se valoriza o caminho percorrido pelo estudante para encontrar as respostas das perguntas propostas. A partir dela, pretende-se possibilitar aos educandos um novo olhar sobre esses objetos. Conforme Ferruzzi e da Costa (2018), o professor é incentivado a trabalhar com a investigação pois:

Trabalhar com atividades de Investigação Matemática em sala de aula possibilita aos alunos estudar conceitos matemáticos presentes no contexto das atividades, ampliando ou aprimorando suas múltiplas capacidades, como a criatividade, a interpretação, a reflexão, a argumentação, a sistematização e a autonomia (Ferruzzi e da Costa, 2018, p.298).

Segundo da Ponte *et al.* (1999), o professor pode possuir vários tipos de papéis durante a realização de um processo investigativo, envolvendo conhecimentos profissionais e didáticos como: desafiar os estudantes, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente, apoiar o trabalho, fornecer e recordar informações importantes e promover a reflexão. O conhecimento profissional ou conhecimento matemático se faz necessário para desenvolver o raciocínio e justificativas formais ao longo da atividade e os conhecimentos didáticos são essenciais para a organização e desenvolvimento da proposta.

É importante lembrar que, conforme Skovsmose (2000), para transformar o cenário da sala de aula em um cenário de investigação é necessário a “aceitação do convite” por parte dos alunos. Por isso, é preciso que o professor esteja familiarizado com o assunto da atividade e seu desenvolvimento. Inicialmente, o professor apresenta as tarefas para toda turma e, após o desenvolvimento da investigação, encerra com a discussão final. Tanto no formato presencial, quanto no formato online, considera-se essencial a discussão com a participação dos estudantes.

Ao longo de uma investigação ocorrem reflexões, descobertas e discussões que muitas vezes se tornam tão ou mais significativas do que o objetivo estabelecido pelo professor. Segundo os pesquisadores Ponte, Brocado e Oliveira,

Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se a formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado (Ponte *et al.*, 2019, p.20).

Agrega-se, também, a relevância do aspecto lúdico. De acordo com da Cunha e da Silva (2012) a Matemática lúdica é uma ferramenta adequada para elaboração de aulas que possibilitam o aluno a analisar, compreender e elaborar situações que ajudem a resolver determinados problemas. Mendonca (2021) evidencia a importância de trabalhar os processos de ensino e aprendizagem da matemática de uma forma lúdica, estimulando a criatividade e a imaginação, buscando que mais estudantes sejam incluídos nesse processo.

O professor deve conscientizar-se de que o foco principal do processo ensino-aprendizagem é o desenvolvimento integral do aluno e não apenas a simples transmissão do conteúdo. Daí surge, então, a necessidade de a escola apresentar atividades pedagógicas que propiciem a participação efetiva de todos, com alegria, imaginação e criatividade (Mendonca, 2021, p.138).

Entende-se que não existe um caminho único para o ensino da Matemática, no entanto, tentar maneiras diversas de trabalhar em sala de aula é essencial para que o professor possa tornar a disciplina mais interessante e atrativa. A seguir, são apresentados os aspectos metodológicos e a proposta pedagógica, a qual utiliza material concreto e inclui o lúdico em seu desenvolvimento.

### 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa e está amparada pelos pressupostos da investigação matemática. Uma proposta pedagógica de investigação direcionada a estudantes do Ensino Médio é apresentada, cujo tema principal é a Função Polinomial do Segundo Grau ou Função Quadrática com o uso de material concreto. Nela o estudante precisa pensar, conjecturar e testar suas hipóteses ao longo do processo, para então justificar suas conclusões. A intenção é que, ao final da atividade, o estudante reconheça o gráfico de uma Função Quadrática. Além disso, com a proposta é possível retomar os conteúdos de Função Afim, Resolução de Sistemas, Radicais e, se o professor optar, Função Exponencial, além de permitir uma discussão aprofundada sobre domínio, contradomínio, imagem e propriedades do gráfico das funções.

É importante destacar que a formalização do conceito por meio de uma linguagem apropriada é essencial para que o processo investigativo se desenvolva e o estudante consiga reconhecer esse conceito em diferentes aplicações. Dessa forma, é recomendável que a definição formal seja apresentada ou retomada pelo professor antes da aplicação dessa proposta. Essa postura concorda com Zuffi e de Almeida Pacca (2002) que, para a compreensão e desenvolvimento do processo investigativo, é essencial que o estudante primeiramente compreenda o conceito de Função Quadrática e não possua somente uma intuição da relação entre as grandezas envolvidas no problema. Segundo o autor, "...a análise das concepções de um sujeito sobre o conceito de função só poderá ocorrer depois que ele apresentar um contato com a ideia matematicamente construída, ou por um livro, ou por um professor"(p.02). Uma vez conhecida a definição formal de Função Quadrática, a proposta pode ser aplicada em qualquer etapa do Ensino Médio.

Ao longo da atividade, o estudante deverá conjecturar quantos círculos de mesmo diâmetro (denominados moedas de diâmetro 2 cm), são necessários para preencher

um outro círculo de maior diâmetro dado (de diâmetro 10 cm ou 15 cm, por exemplo). Após testar o resultado para alguns círculos de diâmetros distintos, o estudante tabela os dados e conjectura sobre a existência da função cujo gráfico melhor representa a situação problema. Espera-se que o aluno reconheça a curva do tipo  $y = ax^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , como melhor alternativa associada ao problema, a partir da relação entre o diâmetro do círculo maior e o número de moedas posicionadas em seu interior.

A proposta foi inspirada em uma atividade da plataforma Desmos<sup>1</sup>, precisamente da atividade intitulada Penny Circle. Em vez de moedas virtuais, serão utilizados círculos de papel de 2 cm de diâmetro, embora a nomenclatura moeda continue sendo utilizada ao longo do trabalho. Além disso, a redação da presente proposta pedagógica foi elaborada para ser aplicada tanto no formato presencial e sem o uso do computador, quanto no formato remoto. A atividade é dividida em etapas, incluindo o uso do material concreto para auxiliar o estudante a conjecturar e testar as conclusões esperadas, relacionar suas conclusões com os diferentes tipos de funções, bem como elaborar justificativas formais.

Para a realização da proposta no formato remoto, o professor deve enviar o molde dos materiais (disponíveis em Rocha (2021)) e promover a discussão das Rodadas de Perguntas em um encontro síncrono. Em conjunto com os estudantes, marcar os pontos no plano cartesiano por meio de um software e justificar a escolha pela parábola para representar a aproximação da curva que passa pelos pontos de acordo com as explicações na Seção 4.

## 4 ATIVIDADE CÍRCULO DE MOEDAS

O problema de quantos círculos cabem em uma região plana é conhecido na literatura como Circle Parking. Segundo Palmeira (2021), esse problema é muitas vezes formulado em termos de densidade, isto é, o quociente entre a soma das áreas dos círculos e a área da região dada. A região plana com maior densidade é a hexagonal (Chang e Wang, 2010).

---

<sup>1</sup> A plataforma possui um pacote gratuito de ferramentas de matemática como uma calculadora gráfica, além de sugestões de atividades para a sala de aula e pode ser acessada em <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>.

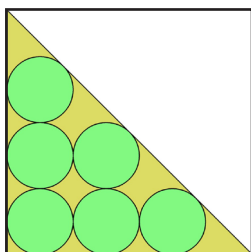
Em português, o termo utilizado para esse problema é “empacotamento de círculos”, sendo que esse termo não se refere necessariamente a círculos de mesmo tamanho. Em duas dimensões (no plano), em geral o problema trata de minimizar as dimensões da região que contém um determinado número de círculos congruentes, sem sobreposição e sem ultrapassar os limites da região. No trabalho de Oliveira (2018) é possível encontrar um estudo desse problema para diversos tipos de regiões, do ponto de vista da matemática aplicada acessível para estudantes do Ensino Superior.

A fim de trabalhar com alunos que cursam o Ensino Médio, nesse trabalho o problema do empacotamento de círculos será formulado da seguinte maneira: considerando uma região circular dada, quantos círculos de diâmetro 2 cm podem ser dispostos sobre essa região, sem sobreposição e sem ultrapassar a fronteira da região circular dada. A estimativa para o número de círculos necessários será relacionada com uma Função Quadrática associada ao problema.

Esse problema pode ter aplicação prática como por exemplo, quantos fios de diâmetro fixo cabem dentro de um conduíte de diâmetro dado ou ainda quantos canos cabem dentro de um cano de diâmetro maior. Se o leitor estiver curioso e quiser fazer alguns testes para estimar a quantidade de círculos menores que cabem em um círculo maior (ambos com raio sendo um número inteiro) pode acessar o link <https://pt.planetcalc.com/7473/> onde está disponível uma calculadora em que o usuário informa os raios (do círculo menor e o do círculo maior) e obtém o número de círculos menores, bem como a porcentagem da área preenchida no círculo maior. Existem outras calculadoras similares disponíveis na internet para diferentes tipos de regiões, que permitem observar como fica a disposição desses círculos em uma imagem. Na Figura 1, vemos a disposição de círculos de mesmo tamanho em um triângulo retângulo isósceles.



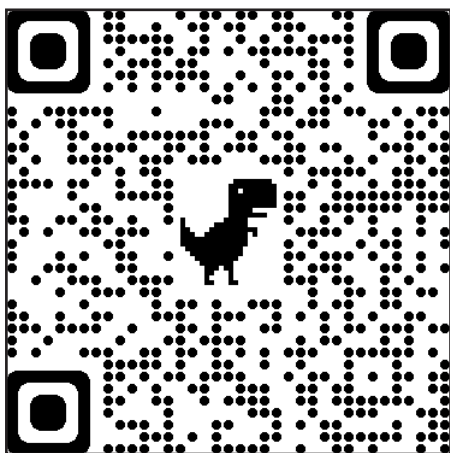
Figura 1 – Disposição de círculos em um triângulo retângulo



Fonte: Acervo pessoal das autoras

Outras possibilidades, como a disposição de círculos nos polígonos regulares: pentágono, hexágono, heptágono e octógono e ainda círculos de tamanhos diferentes considerando a densidade máxima, podem ser visualizadas apontando a câmera do seu celular para o código disponível na Figura 2.

Figura 2 – Alguns exemplos de empacotamento de círculos em <http://www.packomania.com/>

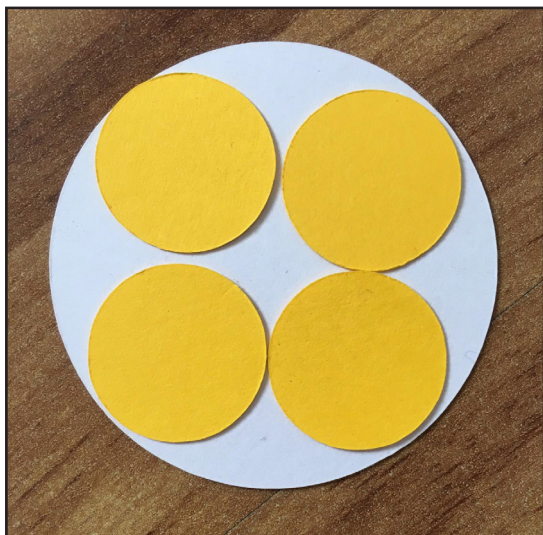


Fonte: Qrcode gerado pelas autoras

De acordo com a BNCC, duas habilidades que podem ser trabalhadas com essa proposta pedagógica são “Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de primeiro e segundo grau, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p.528) e ainda Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de segundo grau do tipo  $y = ax^2$  (BRASIL, 2017, p.533).

A atividade inicia com o professor distribuindo a primeira parte do material que será utilizado, a saber: um círculo com 5 cm de diâmetro e algumas moedas (assim chamados os círculos com 2 cm de diâmetro), conduzindo uma discussão sobre a relação entre o tamanho do diâmetro do círculo dado e a quantidade de moedas necessárias para preencher esse círculo (sem sobreposição e sem ultrapassar a fronteira do círculo maior) conforme a Figura 3. É importante observar que uma sobreposição considerável das moedas pode comprometer o resultado esperado para a realização da proposta.

Figura 3 – Disco de diâmetro 5 cm e 4 moedas



Fonte: Acervo pessoal das autoras

Em seguida, os estudantes receberão também uma tabela em branco para fazer as anotações: na primeira coluna anotam o diâmetro do círculo maior e na segunda coluna, o número de moedas que precisaram para preencher esse círculo. A Tabela 1 apresenta um exemplo, já com o registro do número de moedas utilizado para preencher o primeiro círculo ilustrado na Figura 3.

Tabela 1 – Diâmetro do Círculo x Número de Moedas

Diâmetro do Círculo	Número de Moedas
5	4

Fonte: Autoria própria das autoras

É esperado que os estudantes concluam que são necessárias 4 moedas para preencher o círculo de diâmetro 5 cm. Após essa etapa, eles irão receber um outro círculo, agora com 10 cm de diâmetro e após com 15 cm de diâmetro. Novamente, deverão testar quantas moedas são necessárias para preencher cada um deles.

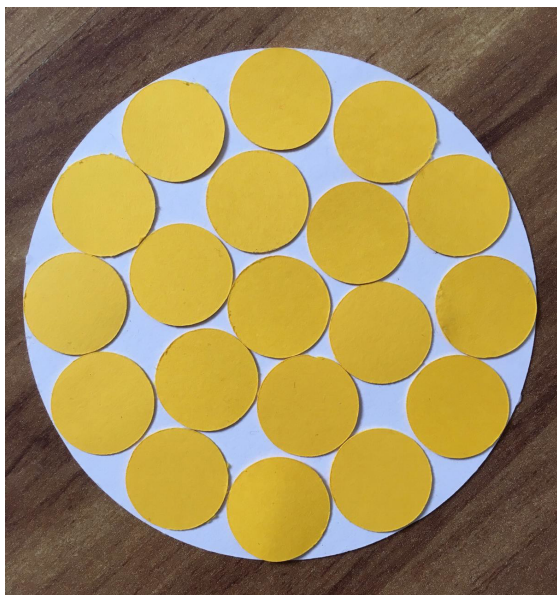
Segundo Ponte *et al.* (2019), em um primeiro momento do processo investigativo ocorre o reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e ainda a formulação de questões a fim de verificar se os alunos estão trabalhando de forma que os testes e conjecturas sejam realizados. Assim, são propostas para a turma algumas questões que são chamadas de Primeira Rodada de Perguntas e serão entregues em formato de fichas para que no final da atividade sejam devolvidas para avaliação.

*Primeira Rodada de Perguntas:*

1. Quantas moedas serão necessárias para preencher o círculo com 10 cm de diâmetro?
2. Será que é o dobro de moedas em relação ao círculo anterior?

Essa etapa da investigação corresponde ao momento de formulação de conjecturas, uma vez que a resposta da segunda questão da Primeira Rodada de Perguntas não é imediata e necessita da realização de testes. Esperamos que os estudantes façam algumas tentativas e escrevam um número, que representa sua expectativa em relação ao número de moedas necessárias. Em seguida, será necessário verificar qual foi o número de moedas utilizado para completar o círculo de 10 cm de diâmetro (cerca de 19 moedas sem sobreposição, conforme a Figura 4). Note que o diâmetro do círculo dobrou, mas a quantidade de moedas foi maior do que o dobro utilizado no círculo anterior. Nesse momento os estudantes poderão elaborar e refinar suas conjecturas (terceiro momento da investigação) sobre a relação entre o aumento do diâmetro do círculo maior e a quantidade de moedas utilizadas.

Figura 4 – Disco de diâmetro 10 cm e 19 moedas



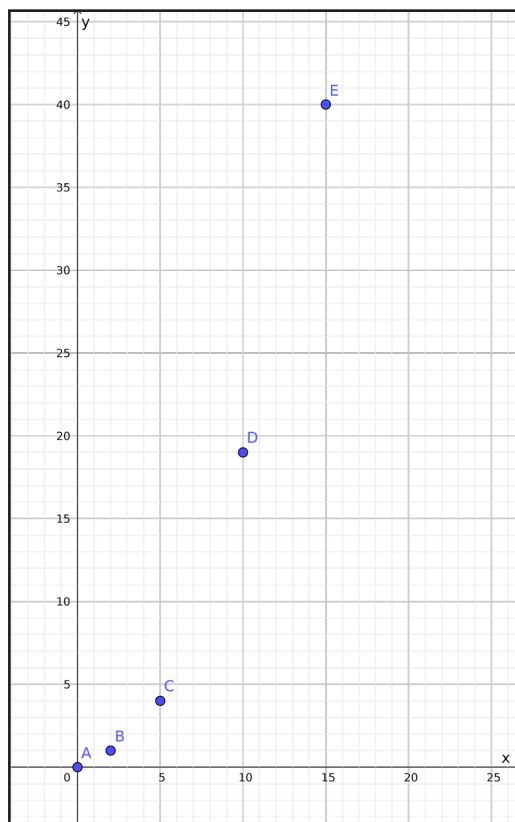
Fonte: Acervo pessoal das autoras

Na sequência, os estudantes deverão anotar na tabela quantas moedas utilizaram. Irão preencher no diâmetro do círculo: 10 cm e no número de moedas, a quantidade que utilizaram para preenchê-lo. Em seguida, o professor entregará um terceiro disco de 15 cm de diâmetro e, novamente, antes de verificar na prática, refazer as perguntas aos estudantes da Primeira Rodada de Perguntas. Nesse momento, em forma de questionamento e a fim de ensaiar algumas conjecturas, pode-se ainda ampliar a discussão sobre outras possibilidades de diâmetros, iniciando a Segunda Rodada de Perguntas.

*Segunda Rodada de Perguntas:*

1. Se tenho um círculo de 2 cm de diâmetro, que é o mesmo diâmetro da moeda, quantas moedas vou precisar para preenchê-lo?
2. Se não tenho nenhum círculo, vou precisar de moedas?

Figura 5 – Pontos encontrados ilustrados no software GeoGebra



Fonte: Acervo pessoal das autoras

É importante incluir as informações obtidas a partir das respostas da Segunda Rodada de Perguntas na Tabela Diâmetro do Círculo x Número de Moedas (Tabela 1). A próxima etapa da investigação, diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado, que é a última etapa do processo de investigação conforme Ponte *et al.* (2019). Ela consiste em esboçar no plano cartesiano a curva que melhor aproxima os resultados encontrados. Para isso, os estudantes receberão uma folha de papel para esboçar a curva. Primeiramente, eles irão traçar os eixos coordenados e marcarão os pontos (pares ordenados), sendo no eixo das abscissas o tamanho do diâmetro do disco e no eixo das ordenadas, o número de moedas que foram utilizadas para preencher o respectivo disco. Como sugestão, marcar também os pontos (2,1) e (0,0) de acordo com as respostas para as questões da Segunda Rodada de Perguntas. Uma ilustração dos resultados esperados pode ser vista na Figura 5.

Após, os estudantes deverão traçar a curva que passa pelos pontos marcados no plano cartesiano de coordenadas  $A(0,0)$ ;  $B(2,1)$ ;  $C(5,4)$ ;  $D(10,19)$  e  $E(15,40)$  nessa ordem. Uma vez traçada a curva, inicia a Terceira Rodada de Perguntas.

*Terceira Rodada de Perguntas:*

1. Que tipo de curva é essa?

2. Será que ela se parece com o gráfico de uma função afim ou quadrática, ou será de uma função exponencial?

3. De forma equivalente: a curva que passa pelos pontos marcados pode ser uma reta? Pode ser uma parábola? Pode ser do tipo exponencial?

4. O que levou você a chegar a resposta obtida para a pergunta anterior?

É esperado que os estudantes percebam que a curva parece parte de uma parábola, gráfico de uma função quadrática. Nessa fase do processo investigativo, denominada Fase Final por (da Ponte *et al.*, 1999, p.42), “o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes”. Com intuito de justificar o porquê da resposta não ser uma reta ou uma curva exponencial, é possível encaminhar uma discussão mais aprofundada com a turma, a fim de construir uma argumentação consistente, que permita a validação dos resultados encontrados e fazer uma avaliação do trabalho realizado.

Para justificar que a curva encontrada não pode ser uma reta, basta escolher dois dos pontos e traçar, no Plano Cartesiano, uma reta que passa por eles para verificar se os demais pontos estão próximos dela (é possível verificar algebricamente que não estão). Porém, a noção de proximidade é subjetiva e não é suficiente para verificar essa afirmação. Por isso, por meio da resolução de um Sistema Linear é possível encontrar a equação algébrica dessa reta e verificar que os outros pontos (distintos dos dois pontos iniciais escolhidos) não pertencem à ela.

A curva encontrada também não pode ser aproximada por uma curva exponencial. De fato, um dos argumentos possíveis para justificar essa afirmação é o de que a curva esboçada passa pela origem e o ponto  $(0,0)$  não pertence à curva do tipo

$y = a^x$ ,  $a \neq 1$  e  $a > 0$ . Outra possibilidade é substituir os pontos encontrados na equação da curva  $y = a^x$  e obter o valor da base  $a$ , por exemplo,

por uma média aritmética dos valores obtidos por substituição dos pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$  registrados na Tabela 1:  $4 = a^5 \Rightarrow a = 1,32$ ,  $19 = a^{10} \Rightarrow a = 1,34$  e  $40 = a^{15} \Rightarrow a = 1,28$ . Portanto, obtém-se a curva  $y = (1,3)^x$ .

Após, comparar a curva obtida com a parábola descrita na discussão que segue esse parágrafo. É importante discutir o fato de que no intervalo em que foi esboçada a curva, assim como toda a função exponencial de base maior do que um, a curva é crescente.

Em geral, nos livros didáticos, a propriedade do crescimento e decrescimento de uma curva é explorada no estudo da reta e da curva exponencial, mas pouco discutida no estudo da parábola. Em uma parábola, essa classificação torna-se interessante, pois ela sempre possui um intervalo em que é crescente e outro em que é decrescente. Nesse sentido, é possível explorar o fato de que as curvas podem possuir intervalos em que são crescentes e outros em que são decrescentes.

Agora, como responder a pergunta: será que essa curva é parte do gráfico de uma Função Quadrática, ou seja, uma parábola? Ao preencher o círculo, coloca-se o máximo de moedas dentro dele, (tentando evitar a sobreposição) e deixar o mínimo de espaço vazio. Na verdade, é possível relacionar essa tarefa com a de calcular a área do círculo. Nesse momento, o professor pode retomar a fórmula da área do círculo:

$$A = \pi r^2 \tag{1}$$

ou seja, a área  $A$  do círculo é um valor que depende do raio  $r$  desse círculo. Relacionando essa fórmula com o diâmetro do círculo, temos a equação:

$$A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \tag{2}$$

pois o diâmetro  $d$  é o dobro do raio  $r$ .

Portanto, como o diâmetro está elevado ao quadrado, isso permite conjecturar que a área do círculo em função do seu raio, pode ser pensada como uma função cujo gráfico é uma parábola e sua equação geral é da forma  $y = ax^2$ , onde  $a \neq 0$  (mais precisamente, para  $y = A$  e  $x = d$ ). Os estudantes podem justificar matematicamente essa afirmação, ou seja, o porquê de não aparecerem os demais termos na equação da parábola.

Como as variáveis envolvidas são diâmetro e número de moedas, então o domínio da função é  $\mathbb{R}_+$  e o contradomínio será  $\mathbb{R}_+$ . A curva encontrada aproxima a solução para o problema proposto e pode coincidir com os pontos marcados no plano quando a sua imagem for um valor inteiro positivo. Esse é um momento muito rico, que permite explorar os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Em conjunto com os estudantes, é possível concluir que a função que melhor representa o problema estudado é  $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , com a lei  $M(d) = ad^2$  onde  $M$  é o número de moedas utilizado para preencher o disco de diâmetro  $d$ , e  $a$  é o coeficiente principal que ainda é desconhecido.

Para determinar o coeficiente  $a$  da Função Quadrática  $M$ , os estudantes poderão realizar os cálculos substituindo as coordenadas dos pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  marcados no Plano Cartesiano na lei de formação da função  $M(d) = ad^2$ . Assim, obtém-se  $1 = a(2)^2 \Rightarrow a = 0,25$ ;  $4 = a(5)^2 \Rightarrow a = 0,16$ ;  $19 = a(10)^2 \Rightarrow a = 0,19$  e  $40 = a(15)^2 \Rightarrow a = 0,18$ .

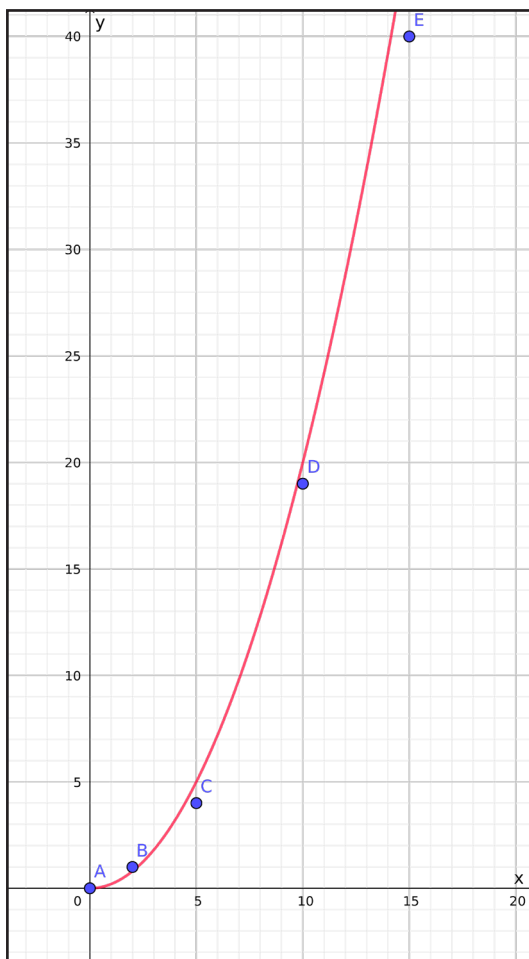
Em conjunto com os estudantes, o professor pode definir o valor de  $a$  que será utilizado. Uma sugestão é considerar a média aritmética dos valores encontrados ( $a = 0,2$  aproximadamente). Com esses cálculos, espera-se que eles percebam que a curva  $y = (0,2)x^2$  é uma aproximação para as informações encontradas. Uma ilustração da curva pode ser vista na Figura 6. Como alternativa para visualizar a melhor aproximação para a solução do problema pode ser feito o esboço simultâneo das curvas  $y = (0,2)x^2$  e  $y = (1,3)^x$ .

Existem diversas possibilidades que podem ser exploradas ao longo da proposta pedagógica, de acordo com as características e participação da turma. Por exemplo, como definir o coeficiente principal utilizado para esboçar a parábola, qual método



utilizar para encontrar a equação da curva que melhor aproxima o traço feito pelos estudantes, as diferenças entre domínio, contradomínio e imagem de acordo com a situação problema que foi definida ou mesmo a utilização de diferentes softwares para tornar o estudo mais dinâmico e interativo.

Figura 6 – Esboço da curva  $y = (0,2)x^2$



Fonte: Acervo pessoal das autoras

Nesse sentido, não existe um único caminho possível para tornar as aulas de matemática mais interessantes e atrativas para os estudantes. Para todos eles é necessário que o professor, com os conhecimentos que possui sobre funções, pesquise e use sua criatividade e para desenvolver uma proposta que ensina matemática e na qual o estudante tenha liberdade de pensamento e possa participar ativamente de todas as etapas.

## 5 CONCLUSÕES

A presente pesquisa é de natureza qualitativa e buscou apresentar e discutir uma proposta pedagógica envolvendo o Ensino de Função Quadrática, direcionada a estudantes do Ensino Médio. É caracterizada como uma investigação matemática e foi organizada buscando trabalhar o reconhecimento do gráfico de uma Função Quadrática a partir de uma situação problema, utilizando material concreto.

A referida proposta foi elaborada com a intenção de despertar no professor, uma reflexão sobre o ensino de funções e incentivar o estudante a estabelecer relações entre objetos e problemas matemáticos. Espera-se que o professor reflita sobre sua prática de forma permanente e rotineira. Conforme (Perrenoud, 1999, p.11), “Não uma rotina sonífera; uma rotina paradoxal, um estado de alerta permanente. Por isso, ela tem necessidade de disciplina e de métodos para observar, memorizar, escrever, analisar após compreender, escolher opções novas”. Nesse sentido, uma proposta pedagógica amparada na investigação matemática contribui para a construção de uma rotina de reflexão sobre os objetivos de cada atividade proposta, além de atrair os estudantes.

Segundo Goldenberg (1999), estudar sobre como fatos e métodos são descobertos é uma tarefa com muito mais significado do que simplesmente reproduzir ou aplicar técnicas. É importante que os alunos estudem como é que fatos e métodos são descobertos, dedicando parte do tempo de aprendizagem à essa tarefa. O principal objetivo deve ser que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, não somente repetindo e executando técnicas.

A investigação matemática sugere que cada estudante construa sua própria justificativa para as conjecturas pensadas a partir da proposta apresentada. As Rodadas de Perguntas são importantes para garantir que o objetivo da aula seja alcançado e auxiliam na formulação das generalizações que são esperadas ao longo do processo de investigação. O papel do professor é fundamental, refletindo sobre sua prática e aliando os seus saberes profissionais e pedagógicos para construir em conjunto com

os estudantes uma aprendizagem com sentido, lúdica, na qual o estudante participa ativamente.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, URL <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>.
- Chang, H. C., Wang, L. C. (2010). A simple proof of thue's theorem on circle packing.
- da Cunha, J. S., da Silva, J. A. V. (2012). A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática. Em: *Anais da 3ª Escola de Inverno de Educação Matemática*, pp. 1–12.
- Dante, L. R. (2013). *Matemática Contexto & Aplicações*, vol 1. Ática.
- Ferruzzi, E. C., da Costa, J. A. A. (2018). Investigação matemática e seu aporte para a aprendizagem. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11(3), 296–311.
- Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. Em: *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, APM e Projecto MPT, pp. 35–49.
- Mendonça, S. R. P. (2021). A matemática nas turmas de proeja: O lúdico como facilitador da aprendizagem. *HOLOS*, 26(3), 136–148.
- de Oliveira, J. R. S. (2018). Um estudo sobre o problema de empacotamento de círculos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Paulo.
- Palmeira, C. F. B. (2021). Plantando Árvores com matemática. *Revista do Professor de Matemática*, 40(104), 8–10.
- Perrenoud, P. (1999). Formar professores em contextos sociais em mudança. prática reflexiva e participação crítica. *Revista Brasileira de Educação*, -(12), 5–21.
- da Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., Ferreira, C. (1999). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41–70.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. (2019). *Investigações matemáticas na sala de aula*, 4º edn. Autêntica Editora.
- Rocha, M. F. (2021). Estudo da função quadrática: uma proposta utilizando investigação matemática. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 13(14), 66–91. de Souza, J. R., Garcia, J. (2016). *Matemática: Novo Olhar*, vol 1. FTD.
- Zuffi, E. M., de Almeida Pacca, J. L. (2002). O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. *Ciência & Educação*, 8(1), 1–12.

## Contribuição de Autoria

### 1 – Marcia Falek Rocha

Mestre em Matemática, Professora da Escola Estadual de Ensino Médio Bibiano de Almeida e Escola Estadual de Ensino Médio Dr Augusto Duprat

<https://orcid.org/0000-0001-7306-5778> • [marciafalek@yahoo.com.br](mailto:marciafalek@yahoo.com.br)

Contribuição: Curadoria de dados; Investigação; Redação – rascunho original

### 2 – Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Mestre e Doutora em Matemática, Professora do Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande - FURG

<https://orcid.org/0000-0002-8750-2462> • [cinthya.schneider@gmail.com](mailto:cinthya.schneider@gmail.com)

Contribuição: Conceitualização; Investigação; Visualização; Redação – revisão e edição

### 3 – Celiane Costa Machado

Professora do Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande - FURG

<https://orcid.org/0000-0003-0685-8078> • [celianemachado@furg.br](mailto:celianemachado@furg.br)

Contribuição: Redação – revisão e edição

## Como citar este artigo

Rocha, M. F.; Meneghetti, C. M. S.; Machado, C. C. Círculo de Moedas: um estudo da Função Quadrática. *Ciência e Natura*, Santa Maria, 45 e69338. DOI 10.5902/2179460X69338. Available from: <https://doi.org/10.5902/2179460X69338>. Accessed in: day month abbr. year