CIÊNCIA e NATURA
ISSN 2179-460X
ACESSO ABERTO
Ci. e Nat., Santa Maria, v. 45, e10, 2023 • https://doi.org/10.5902/2179460X68025
Submissão: 08/10/2021 • Aprovação: 17/11/2022 • Publicação: 23/06/2023

Ensino

Trincas Pitagóricas: uma abordagem para auxiliar o ensino de Matemática

Pythagorean triples: an approach to assist the teaching of mathematics

Saulo Portes dos Reis [I], **Marina da Silva Margiotti Machado**[I], **Rafael Pupin Vignoto**[I], **Dulcilene Aparecida Flores de Paula**[II]

[I] Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil
[II] Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

RESUMO

O presente trabalho é fruto da exploração de metodologias de ensino que visam uma maior interação do aluno com o conceito abordado. Durante o texto apresentamos métodos de se obter as famosas trincas Pitagóricas a partir de conceitos de teoria dos números e álgebra. Nossa proposta consiste em fornecer ao professor (leitor) ferramentas matemáticas teóricas com as quais ele possa melhor desenvolver sua prática em diversos conteúdos de matemática. A busca por novas trincas Pitagóricas sempre foram alvo de fascínio e do estudo, tanto de matemáticos profissionais como de estudantes curiosos, sendo assim o tema aqui é desenvolvido e resultados já conhecidos da comunidade são apresentados e demonstrados de maneira inédita, isto é, com abordagens matemáticas que não foram encontradas em trabalhos anteriores.

Palavras-chave: Trincas Pitagóricas; Números primos; Teorema de Pitágoras

ABSTRACT

The present work is the result of the exploration of teaching methodologies that seek a greater interaction of the student with the approached concept. During the text we present methods to obtain the famous Pythagorean triples from concepts of number theory and algebra. Our proposal is to provide the teacher (reader) with theoretical mathematical tools with which he can better develop his practice in various mathematical contents. The search for new Pythagorean cracks has always been the target of fascination and study, both by professional mathematicians and curious students, so the theme here is developed and results already known to the community are presented and demonstrated in an unprecedented way, that is, with approaches mathematics that were not found in previous works.

Keywords: Pythagorean tricks; Prime numbers; Pythagorean theorem

1 INTRODUÇÃO

Provavelmente a primeira equação matemática a qual fomos apresentados é aquela dada pelo Teorema de Pitágoras. Essa simples equação matemática causou fascínios na humanidade desde tempos remotos (LOOMIS, 1968), e é por vezes destacada como uma das equações mais importantes da história (CREASE, 2011; STEWART, 2013). Cabe destacar que diversos problemas, os quais desafiaram matemáticos por décadas, como o último Teorema de Fermat, foram originados de variações do Teorema de Pitágoras (SINGH, 2018).

Paralelamente à compreensão do Teorema e do significado de hipotenusa, catetos e triângulo retângulo, somos apresentados ao termo Trinca Pitagórica. Uma trinca Pitagórica se trata de um conjunto de três números inteiros, aqui designados por (a,b,c), que satisfazem o já citado teorema, ou seja,

$$\mathrm{b}^2 = \mathrm{p}^2 + \mathrm{a}^2 \tag{1}$$

É sabido que o desafio de se encontrar números inteiros que satisfizessem a Equação (1) era um dos “trabalhos” dos Pitagóricos (ROQUE, 2012). Cabe destacar que o método desenvolvido pelos Pitagóricos era puramente aritmético, não sendo creditado aos Pitagóricos uma demonstração formal do Teorema que leva o nome do fundador de sua sociedade. Dessa forma, a busca por trincas Pitagóricas foi (e ainda é) tema de estudo na área de teoria dos números.

Euclides de Alexandria foi provavelmente a primeira pessoa a demonstrar que existem infinitas trincas Pitagóricas (SINGH, 2018), sendo que atualmente existem várias abordagens vigentes que nos permitem encontrar tais trincas. Uma dessas abordagens garante que é sempre possível encontrar trincas Pitagóricas na forma $(a, b, b+1)$ (FIRMIANO *et al*., 2020). Essa abordagem, a qual provavelmente já era conhecida dos Pitagóricos (EVES, 2011), é apresentada em diversos trabalhos de matemática computacional (DE JESUS *et. al*, 2020; BENITO e VERONA, 2002). As trincas

Pitagóricas na forma são $(a, b, b+1)$ obtidas a partir da expressão:

$$\left(\frac{\mathrm{m}^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{m}^2-1}{2}\right)^2 + \mathrm{m}^2 \quad \text{(com } m \text{ ímpar)} \tag{2}$$

Desta forma o menor cateto tem medida , o maior cateto tem medida $\frac{\mathrm{m}^2-1}{2}$ e a hipotenusa $\frac{\mathrm{m}^2+1}{2}$.

Nos trabalhos aqui referenciados, não há uma demonstração de como essas trincas foram obtidas, apenas há uma verificação direta da igualdade acima e a exploração das muitas interessantes propriedades obtidas a partir da Equação (2).

Diante do exposto, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma demonstração de como podemos obter a Equação (2), além de uma propriedade que nos permita saber quantos triângulos retângulos podem ser obtidos conhecendo-se o valor de um cateto cuja medida é dada por um número natural ímpar.

Esclarecemos ainda que acreditamos que essa abordagem facilitará a compreensão dos estudantes acerca da álgebra envolvida no Teorema de Pitágoras, uma vez que envolve a ação direta do estudante com o Teorema, além de se tratar de uma ótima oportunidade para se introduzir os conceitos de divisibilidade e de números primos.

Por fim, ressaltamos que esse texto é destinado a professores de matemática que desejam conhecer novos conceitos para aumentar seu repertório, podendo assim, criar estratégias pedagógicas para abordar temas que exigem mais abstração por parte dos estudantes. Sendo assim a abordagem apresentada nas próximas seções tem um caráter mais técnico, cabendo ao leitor adaptar a linguagem para sala de aula.

2 NUMEROS PRIMOS E A TRINCA PITAGÓRICA

Antes de apresentar a demonstração acima mencionada é conveniente destacar algumas propriedades dos números primos, ressaltando que consideraremos como conjunto dos números naturais aqueles dados pelos Axiomas de Peano cujo primeiro elemento é o 1, isto é, não consideraremos o 0 como sendo natural. Assim apresentamos a definição abaixo:

Definição 2.1. Seja $p \in N$. Dizemos que n é um número primo se p possuir apenas dois divisores naturais.

Perceba que a Definição 2.1 estabelece que o número 1 não é primo, uma vez que possui apenas um único divisor natural. Estamos destacando esse fato devido à grande confusão feita por alunos do ensino fundamental e do ensino médio (até mesmo alguns professores) que acreditam que o número 1 seja primo. Provavelmente essa confusão se deve ao fato de que a definição apresentada aos mesmos dá margem para interpretações errôneas, sendo comum ouvir: "um número primo é divisível por 1 e por ele mesmo". O resultado importante para o trabalho aqui apresentado é dado pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.1. Seja $p \in N$ um número primo ímpar. Então p^2 não é um número primo, tendo três divisores naturais: $1, p \ e \ p^2$.

Demonstração: Sabemos pelo Teorema Fundamental da álgebra que todo número natural apresenta decomposição única em fatores primos (HEFEZ, 2011). Dessa forma, a única fatoração possível para p^2 é $p \cdot p$. Portanto, os divisores de p^2 são $1, p \ e \ p^2$, ou seja, as únicas formas de escrever p^2 como um produto são:

$$p^2 = 1 \cdot p^2 \quad e \quad p^2 = p \cdot p$$

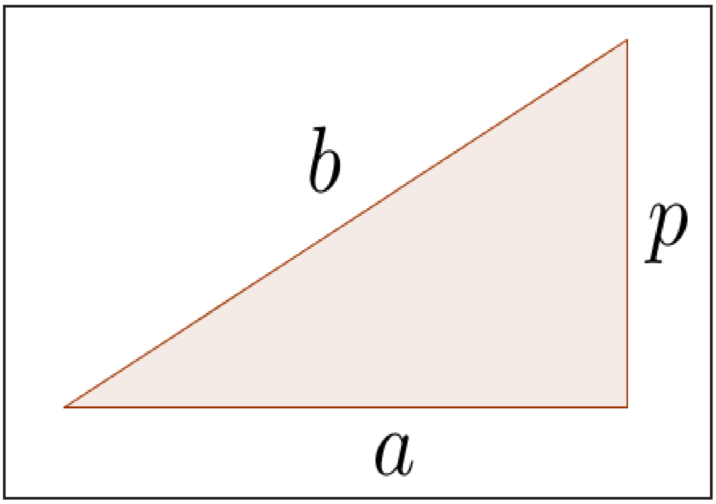
Mediante o Teorema 2.1 podemos iniciar a demonstração de que existem infinitas trincas pitagóricas do tipo $(a, b, b+1)$. Apresentaremos primeiramente o resultado na forma de um teorema, cuja demonstração não é encontrada em livros-textos.

Teorema 2.2. Seja $p \in N$ um número primo. Então existe um, e somente um, triângulo retângulo em que p é um cateto. Além disso, nesse triângulo, a hipotenusa e o outro cateto diferem em apenas uma unidade.

Antes de iniciar a demonstração formal do teorema, note que duas afirmações devem ser verificadas: primeiramente a existência de um triângulo retângulo contendo o número primo p como cateto e hipotenusa $b \in \mathbb{N}$, , a unicidade desse triângulo, ou seja, devemos provar que existe apenas um triângulo retângulo no qual p é cateto. Perceba ainda que a existência de tal triângulo é garantida pela Equação (2), bastando substituir m por p , entretanto, na demonstração não consideraremos esse fato, isto é, apresentaremos uma forma de se obter essa equação.

Demonstração: Considere um triângulo retângulo de catetos p, a e hipotenusa b. A existência desse triângulo é sempre garantida, uma vez que nenhuma exigência foi feita acerca dos valores a e b , ou seja, a e b não são necessariamente naturais. Dessa forma, a demonstração da existência deve se pautar apenas em triângulos retângulos cujas medidas dos lados sejam dadas por números naturais. A Figura (1) ilustra o triângulo mencionado.

Figura 1– Triângulo retângulo com catetos a e b , hipotenusa p, no qual $p \in \mathbb{N}$



Fonte: Autores/as (2022)

Como o nosso objetivo é obter a e b , necessitaremos de duas equações que envolvam essas incógnitas, porém, no momento sabemos apenas uma relação entre elas, aquela dada pelo teorema de Pitágoras:

$$b^2 = p^2 + a^2 \tag{3}$$

Manipulando a Equação (3), obtêm-se:

$$\mathrm{b}^2 = \mathrm{p}^2 + \mathrm{a}^2 \Rightarrow \mathrm{p}^2 = \mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2 \Rightarrow \mathrm{p}^2 = (\mathrm{b}+\mathrm{a}) \cdot (\mathrm{b}-\mathrm{a})$$

O termo em destaque no desenvolvimento da Equação (3) indica que p^2 foi fatorado. Dessa forma, pelo Teorema (2.1) podemos concluir que os fatores só podem ser iguais a p, ou um dos fatores ser 1 e o outro ser p^2, uma vez que essas são as únicas fatorações possíveis para p.

Ora, os fatores são obviamente diferentes, pois $(b-a) \neq (b+a)$, portanto, a segunda opção de fatoração é a válida. Temos então:

$$\begin{cases} p^2 = b + a \\ 1 = b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 1 = 2b \\ 1 = b - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p^2+1}{2} = b \\ \dfrac{p^2-1}{2} = a \end{cases}$$

Portanto, para todo número primo p existe uma trinca Pitagórica dada por $\left(p, \frac{p^2-1}{2}, \frac{p^2+1}{2}\right)$. A unicidade dessa trinca é garantida pela unicidade da fatoração de p^2 em fatores distintos, isto é, uma vez que $p^2 \cdot 1$ é a única fatoração possível, então o sistema de duas equações e duas incógnitas envolvendo a e b tem solução única.

Há ainda outro meio de se chegar a essa conclusão. Note que a matriz dos coeficientes de a e b do sistema de equações apresentado é invertível, pois seu determinante vale - 2, sendo assim, o sistema é possível e determinado.

Note que a trinca obtida durante a demonstração do teorema é a mesma que aquela apresentada na Equação (2), onde apenas substituímos m por p. É relevante destacar ainda que as trincas Pitagóricas mais conhecidas (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são casos particulares da relação demonstrada acima, bastando apenas escolher os catetos como sendo 3 e 5 respectivamente.

Para fixar as ideias, abaixo apresentamos uma tabela com as 12 primeiras trincas Pitagóricas obtidas por esse método.

Tabela 1 – Trincas Pitagóricas obtidas com números primos

Número primo	**Cateto** $\left(\frac{p^2-1}{2}\right)$	**Cateto** $\left(\frac{p^2+1}{2}\right)$
3	4	5
5	12	13
7	24	25
11	60	61
13	84	85
17	144	145
19	180	181
23	264	265
29	420	421
31	480	481
37	684	685

Fonte: Autores/as (2022)

3 NUMEROS ÍMPARES E A TRINCA PITAGÓRICA

A essa altura o leitor deve estar se questionando, ou até mesmo deve ter verificado que a parte algébrica da demonstração do Teorema (2.2) é válida para qualquer número ímpar, não necessariamente primo. Por exemplo, o primeiro número ímpar não primo é o 9. Ao aplicarmos a “regra” para obtenção de trincas dada na Tabela 1 obtemos a trinca (9, 40, 41). Isso é um fato verdadeiro, entretanto, quando o número ímpar não é primo, não existe a unicidade, sendo sempre possível encontrar outras trincas contendo esse número. No caso do 9, por exemplo, temos a trinca (9, 12, 15).

Embora não conheçamos um método para encontrar todas as trincas contendo um número ímpar não primo, a demonstração do Teorema 2.2 nos indica que é possível determinar quantas trincas existem contendo o número ímpar em questão. Esse resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.1. Seja $m \in N$ um número ímpar não primo. Então o número de trincas a ser formada com m sendo um dos catetos é igual a metade do número de divisores próprios de m^2.

Antes de apresentarmos a demonstração formal do teorema proposto acima, é interessante apresentar um exemplo para clarear as ideias. Vamos calcular quantas trincas podem ser formadas tomando 15 como o menor dos valores. Consideremos que os outros valores da trinca são a e b. Assim:

$$b^2 = 15^2 + a^2 \Rightarrow 15^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow p^2 = (b+a) \cdot (b-a)$$

Dessa forma, o número de trincas está relacionado ao número de formas que se pode fatorar 15^2 em fatores distintos, ou seja, a fatoração $15 \cdot 15$ não é solução.

Ora o número 15^2 possui um total de 9 divisores, sendo eles {1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225}. Assim, temos 4 possibilidades de fatoração em fatores distintos para 15^2, basta multiplicarmos o primeiro divisor pelo último, o segundo pelo penúltimo e assim sucessivamente: $1 \cdot 225, 3 \cdot 75, 5 \cdot 45$ e $9 \cdot 25$.. Perceba que a única fatoração que não é solução do problema é aquela indicada por $15 \cdot 15$. Existem, portanto, 4 trincas Pitagóricas cujo número 15 é o menor valor. Como 15^2 tem 8 divisores próprios, perceba que o número de trincas é metade desse valor, corroborando o teorema.

A Tabela 2 apresenta todas as trincas, sendo que, em todos os casos 15 é o menor dos valores da trinca.

Tabela 2 – Trincas Pitagóricas envolvendo o número 15

Menor Fator de 15^2 $(\boldsymbol{b-a})$	**Maior Fator de 15^2** $(\boldsymbol{b-a})$	**Trinca Formada** $(\boldsymbol{15, a, b})$
1	225	(15, 112, 113)
3	75	(15, 36, 39)
5	45	(15, 20, 25)
9	25	(15, 8, 17)

Fonte: Autores/as (2022)

Note que, o procedimento para se obter a quantidade de trincas com um dado número ímpar m consiste em contar o número de divisores do quadrado do número ímpar m. Obviamente, exclui-se o próprio número ímpar e divide-se por dois a quantidade restante de divisores. No entanto, ao se excluir o divisor m, e agrupar os outros divisores em ordem crescente, a fatoração de m^2, em dois fatores distintos, é dada pelo produto dos divisores extremos, ou seja, a cada dois divisores temos uma solução para o problema. Note ainda que, se m é um número ímpar, então o número de divisores de m^2 é um número ímpar (conforme será demonstrado). Essas são as ideias centrais que serão utilizadas na demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Seja m um número ímpar cuja decomposição em fatores primos é dada por

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots p_n^{\alpha_n} \qquad e \qquad m^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \cdots p_n^{2\alpha_n}$$

No qual $p_1, p_2, \cdots, p_n$ são números primos e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são números naturais. Dessa forma, o número total de divisores do número m^2 é dado por $(2\alpha_1 + 1) \cdot (2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_n + 1)$. Um desses divisores é o número m. Assim, excluindo-se m dos divisores temos uma quantidade par de divisores de m^2, o qual é igual ao número de divisores próprios de m^2. A essa quantidade de divisores chamaremos de n.

Seja então $\{k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, k_n\}$, $(k_1, < k_2 < \cdots < k_{n-1} < k_n)$ o conjunto de todos os divisores de m^2 excluindo-se o próprio m. Dessa forma, temos as seguintes possibilidades de fatoração de m^2 em fatores distintos:

$$m^2 = k_1 \cdot k_n, m^2 = k_2 \cdot k_{n-1}, \cdots, totalizando\ \frac{n}{2}\ posibilidades\ de\ fatoração.$$

Cada fatoração é uma solução do sistema em que $(b + a)$ é o maior dos divisores e $(b - a)$ é o menor. Assim ao se somar as duas equações temos que $2b$ é igual a soma dos divisores. Uma vez que todos os divisores são ímpares, sua soma é um número par, ou seja, existe $b \in \mathbb{N}$. Para cada valor natural b obtido, temos um valor natural a que é excedido por b na quantidade indicada pelo menor divisor de m^2. A seguir descrevemos uma das soluções possíveis

$$b^2 = m^2 + a^2 \Rightarrow m^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow m^2 = (b + a) \cdot (b - a)$$

Considerando $(b + a) = k_y$ o maior divisor e $(b - a) = k_x$ o menor divisor, temos:

$$\begin{cases} b + a = k_y \\ b - a = k_x \end{cases} \Rightarrow b = \frac{k_y + k_x}{2} \quad e \quad a = b - k_x$$

Assim, para cada par de divisores de m^2 podemos formar uma trinca Pitagórica cujo menor lado seja m, ou seja, o número total de trincas possíveis é metade do número de divisores próprios de m^2.

4 NUMEROS PARES E A TRINCA PITAGÓRICA

Partindo da ideia do teorema acima e do fato de que $\left(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2}\right)$ são uma trinca para m ímpar, então, se multiplicarmos essa trinca por 2, teremos uma trinca na qual o menor cateto é um número par. Tal trinca é, portanto, dada por $(2m, m2 - 1, m2 + 1)$. É interessante notar que o maior cateto difere em duas unidades da hipotenusa.

Vejamos como utilizar essa relação com um exemplo. Imagine que desejamos obter uma trinca Pitagórica tal que o número 8 seja o menor elemento da trinca. Para isso devemos tomar m=4, assim,

$$m = 4 \Rightarrow (2 \cdot 4, 4^2 - 1, 4^2 + 1) = (8, 15, 17)$$

Ressaltamos aqui que esse método não indica a quantidade de trincas a ser obtida com o número par como um dos catetos, sendo esse um problema ainda em aberto. No entanto, o método garante a existência de uma trinca dado qualquer número par.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de propor uma abordagem de estudo na qual o aluno possa interagir com o conceito, sem meramente decorar fórmulas e métodos. Por vezes o teorema de Pitágoras é tratado nos livros textos apenas como um teorema geométrico, o que não é uma verdade. Os próprios Pitagóricos o tratavam “apenas” como uma busca por trincas, uma vez que eram fascinados pelas propriedades dos números figurados (EVES, 2011).

Dessa forma, ressaltamos que a abordagem aqui apresentada pode ser utilizada no ensino de vários temas da matemática. Pode-se explorar o próprio teorema de Pitágoras, desafiando os alunos a encontrar trincas Pitagóricas e relacioná-las com as propriedades geométricas. Acreditamos ainda que o estudo dos critérios de divisibilidade de um número natural pode ser motivado pelo conteúdo presente nesse trabalho. O próprio estudo do significado e da importância dos números primos pode ser abordado a partir da busca por trincas Pitagóricas, conforme demonstrado nos teoremas acima. Uma aula de decomposição em fatores primos também é favorecida com a abordagem aqui proposta. Destacamos que até mesmo a resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas pode ser motivada pela busca de trincas Pitagóricas.

Por fim destacamos que, embora os conceitos aqui apresentados sejam conhecidos da comunidade matemática, as demonstrações aqui presentes são inéditas, sendo fruto de nosso trabalho, o qual desejamos compartilhar com professores e pesquisadores, podendo ser introduzidos nos materiais didáticos utilizados nas redes de ensino fundamental e aprofundado no ensino médio.

REFERÊNCIAS

BENITO, M.; VARONA, J. L. Pytagorean triangles with legs less than n. **Journal of computational and applied mathematics**, v. 143 n.1, p. 117-126, jun. 2002

CREASE, R. P. **As grandes equações:** a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática.** 5ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FIRMIANO, A.; SANTOS, J. P. M.; ELOY, M. E.; CARDOSO, C. As infinitas trincas pitagóricas de Euclides. **Revista eletrônica Paulista CQD**, v. 17, p. 13-26, fev. 2020.

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

JESUS, A. F.; SANTOS, J. P. M.; LINARES, J. L. Investigando fatores primos com trincas pitagóricas. **Trilhas pedagógicas**. v. 10 n.12, p. 239-252, ago. 2020.

LOOMIS, E. S.; **The Pythagorean proposition**. 2ª ed. Washington DC: National council of teachers of mathematics, 1968.

ROQUE, T. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SING, S. **O último teorema de Fermat**. 3ª ed. Rio de Janeiro: BestBolso, 2018.

STEWART, I. **17 Equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

Contribuição de autoria

1 – Saulo Portes dos Reis

Doutor em Ciência dos Materiais pela Universidade Estafual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP).
https://orcid.org/0000-0002-9327-403X • spdreis@ifsp.edu.br
Contribuição: Conceituação, Escrita –revisão e edição

2 – Marina da Silva Margiotti Machado

Mestra em Educação pela Universidade Estadual Paulista de Júlio de Mesquita Filho (UNESP)
https://orcid.org/0000-0002-9230-9202 • marinamargiotti@ifsp.edu.br
Contribuição: Conceituação, Curadoria dos dados, Escrita – primeira redação

3 – Rafael Pupin Vignoto

Licenciando em Física pelo Instituro Federal de São Paulo (IFSP)
https://orcid.org/0000-0002-6085-6850 • rafael.pupim@aluno.ifsp.edu.br
Contribuição: Conceituação, Curadoria dos dados, Escrita – primeira redação

4 – Dulcilene Aparecida Flores de Paula

Graduanda em Pedagogia pelo Centro Universitário de Araras (ANAR) e Graduada em Física pelo Centro Universitário de Votuporanga (UNIFEV)
http://orcid.org/0000-0003-1874-4334 • dulcefloresdepaula@gmail.com
Contribuição: Conceituação, Curadoria dos dados, Escrita – primeira redação

Como citar este artigo

REIS, S. P.; MARGIOTTI, M. S.; PUPIM, R.; PAULA, D. A. F.. Trincas Pitagóricas: uma abordagem para auxiliar o ensino de Matemática. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 45, e10, 2023. DOI 10.5902/2179460X68025. Recovered in: https://doi.org/10.5902/2179460X68025