

## Uma abordagem matemática para a previsão do adensamento das argilas saturadas

A mathematical approach for predicting the consolidation of saturated clays

Joabby da Costa Biz<sup>1</sup>, Maurício do Espírito Santo Andrade<sup>1</sup>,  
Elmagno Catarino Santos Silva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

### RESUMO

As camadas argilosas saturadas submetidas a um carregamento vertical sofrem deformações verticais ao longo do tempo, isto é, adensamento. Essas deformações quando acentuadas provocam danos estruturais, funcionais ou estéticos nas edificações. Neste sentido, aqui um modelo matemático é proposto e desenvolvido para a previsão do adensamento das argilas saturadas levando-se em conta os conceitos apresentados por Terzaghi e Frohlich (1936), Taylor (1942) e Barden (1965). A formulação matemática considera a existência de uma parcela viscosa da tensão efetiva vertical e incorpora na equação diferencial parcial modelada uma lei de viscosidade não linear como uma propriedade fundamental. A referida equação do adensamento é obtida em termos de dissipação do excesso de poropressão normalizada. Em vista da complexidade do modelo, a técnica numérica de diferenças divididas finitas é utilizada para a obtenção da solução teórica considerando variações no tempo e no espaço. A solução numérica mostra que a parcela viscosa da tensão efetiva vertical atua retardando o fenômeno do adensamento. Além disso, o ajuste dos valores teóricos aos experimentais mostra que a modelagem para o fator viscosidade igual a um é mais promissora do que as propostas por Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

**Palavras-chave:** Adensamento; Viscosidade; Não linearidade; Argila saturada

### ABSTRACT

The saturated clay layers subjected to a vertical load undergo vertical deformations over time, that is, consolidation. These deformations, when accentuated, cause structural, functional or aesthetic damage to buildings. In this sense, here a mathematical model is proposed and developed to predict the consolidation of saturated clays taking into account the concepts presented by Terzaghi e Frohlich (1936), Taylor (1942) e Barden (1965). The mathematical formulation considers the existence of a viscous portion

of the effective vertical tension and incorporates in the modeled partial differential equation a non-linear viscosity law as a fundamental property. This consolidation equation is obtained in terms of dissipating excess normalized poropressure. In view of the complexity of the model, the numerical technique of finite divided differences is used to obtain the theoretical solution considering variations in time and space. The numerical solution shows that the viscous portion of the effective vertical tension acts by slowing down the phenomenon of consolidation. Furthermore, the adjustment of theoretical to experimental values shows that the modeling for the viscosity factor equal to one is more promising than the proposals by Terzaghi e Frohlich (1936) and Andrade (2014).

**Keywords:** Consolidation; Viscosity; Non-linearity; Saturated clay

## 1 INTRODUÇÃO

Os Problemas que envolvem o adensamento dos solos podem ser representados por equações diferenciais parciais (EDPs), mais precisamente do tipo calor (parabólica). Estas equações permitem avaliar, com base em dados presentes, o comportamento futuro de diversos problemas. Entretanto, a modelagem de alguns problemas pode resultar em EDPs complexas cuja solução não pode ser obtida por métodos analíticos.

A teoria original para o adensamento unidimensional foi proposta por Terzaghi e Frohlich (1936) sendo a teoria em uso geral (Braja, 2011). Contudo, uma série de experimentos consistentemente observados indica que a teoria proposta por Terzaghi e Frohlich (1936) é simplificada demais, não levando em conta fatores indispensáveis como a resistência viscosa. Essa abordagem simplista conduz a resultados teóricos que não são observados experimentalmente.

O objetivo deste trabalho é analisar um modelo matemático aqui proposto e desenvolvido para o adensamento unidimensional de solos argilosos saturados, no qual é considerada uma lei de viscosidade não linear do tipo sugerida por Barden (1965).

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

Considerar-se-á, para o desenvolvimento do modelo matemático aqui proposto, uma camada de solo argilosa saturada de espessura  $2H_d$  e duplamente drenada devido à presença de camadas arenosas no seu topo e na sua base. Além disso, um carregamento vertical ( $\Delta\sigma_v$ ) é aplicado na superfície do solo arenoso gerando, na camada intermediária argilosa, um excesso de poropressão ( $u$ ). Essa pressão de água em excesso será dissipada ao longo do tempo caracterizando o fenômeno do adensamento. Desse modo, no modelo matemático a ser desenvolvido tomou-se como simplificação inicial as seguintes ideias:

Hipótese (I): O solo é homogêneo e saturado.

Hipótese (II): As partículas sólidas e a água são incompressíveis.

Hipótese (III): As deformações são infinitesimais.

Hipótese (IV): Admite-se válida a Lei de Darcy.

Hipótese (V): Admite-se que o fluxo de água e a compressão são unidimensionais (direção  $z$ ).

Assim, tomando-se na camada argilosa um elemento cúbico infinitesimal  $dV$  de solo e definindo  $v_z$ , como a velocidade de fluxo de entrada na direção  $z$ , obtém-se para a variação de volume de um elemento de solo de volume  $dxdydz$  na unidade de tempo  $t$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(k_z \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right) dxdydz \leftrightarrow \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{1+e_1} \left(\frac{\partial e(z,t)}{\partial t}\right) = \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

Onde,

$\varepsilon$ : deformação volumétrica específica (vertical);  $e_1$ : índice de vazios inicial (constante);  $\gamma_w$ : peso específico da água;  $e$ : índice de vazios;  $u$ : excesso de poropressão;  $k_z$ : coeficiente de permeabilidade;  $H = 2H_d + h_a + \frac{u}{\gamma_w}$ : carga hidráulica total;  $h_a$ : altura do nível d'água na camada arenosa do topo.

Ainda consideram-se as seguintes hipóteses:

Hipótese (VI): O coeficiente de compressibilidade sólido-sólido ( $a_{vs}$ ) do solo é definido como a relação entre as variações do índice de vazios  $\Delta e$  e da parcela sólido-sólido da tensão efetiva vertical  $\Delta\sigma'_{vs}$ , ou seja,

$$a_{vs} = -\frac{\Delta e}{\Delta \sigma'_{vs}} \quad (2)$$

Hipótese (VII): A tensão efetiva vertical  $\Delta \sigma'_v$  é composta por duas parcelas: uma parcela viscosa ( $\Delta \sigma'_{v\eta} = \sigma'_{v\eta}$ ) e uma parcela sólido-sólido ( $\Delta \sigma'_{vs}$ ). Desse modo, a Equação (2) torna-se:

$$a_{vs} = -\frac{e(z,t)-e_2}{\Delta \sigma'_v - \sigma'_{v\eta}(z,t)} \leftrightarrow e(z,t) = e_2 - a_{vs} [(\Delta \sigma'_v - u(z,t)) - \sigma'_{v\eta}(z,t)] \quad (3)$$

Onde,  $e_2$ : índice de vazios final e do Princípio das Tensões Efetivas:  $\Delta \sigma'_v = \Delta \sigma'_v - u(z,t)$ .

Hipótese (VIII): A  $\sigma'_{v\eta}$  é dada por uma lei de viscosidade não linear sugerida por Barden (1965):

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta} \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4)$$

Onde,  $\eta$ : coeficiente médio de viscosidade;  $n$ : número inteiro maior do que 1 (um).

Hipótese (IX): Algumas propriedades do solo não variam durante o adensamento. Portanto, pode-se escrever:

$$c = -\frac{k_z(1+e_1)}{\gamma_w} \quad (5)$$

Para a obtenção da Equação do Adensamento aqui proposta, além da adoção do conjunto de hipóteses já referidas, definem-se o excesso de poropressão normalizado como

$$u'(z,t) = \frac{u(z,t)}{\Delta \sigma'_v} \quad (6)$$

E os fatores adimensionais, Fator Tempo, dado por:

$$\left( T = \frac{c}{a_{vs}} \frac{t}{H_d^2} \right) \quad (7)$$

E o Fator Profundidade, dado por:

$$\left( Z = \frac{z}{H_d} \right) \quad (8)$$

Assim, derivando a Equação (3) em relação ao tempo, ou seja  $\frac{\partial e(z,t)}{\partial t}$ , e substituindo as Equações (1), (4) e (5) e as definições de  $u'(z,t)$ ,  $T$  e  $Z$  dadas pelas Equações (6), (7) e (8) na expressão da derivada obtida tem-se:

$$\left[ \bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}} \right] \left( \frac{\partial^3 w}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c}) \partial Z^2 \partial T} \right)^{\frac{1}{n}} + \frac{\partial^2 w}{H_d^2 \partial Z^2} - \frac{1}{H_d^2} \frac{\partial u'}{\partial T} = 0 \quad (9)$$

As condições de contorno do problema são assim definidas:  $Z = 0$ :  $u'(0,T) = 0$  e  $Z = 2$ :  $u'(2,T) = 0$  com a condição inicial:  $T = 0$ :  $u'(Z,0) = 1$ .

A Equação (9) juntamente com as condições de contorno e inicial fornece o Problema de Valor de Contorno (PVC) a ser resolvido. O Método de Diferenças Divididas Finitas (MDF) foi utilizado para fornecer a solução do problema. No referido método, optou-se por substituir as derivadas parciais por aproximações do tipo centrada para o espaço e progressiva no tempo.

Na Equação (9), um novo parâmetro adimensional Fator Viscosidade (V) pode ser definido:

$$V = \left[ \frac{\bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}}}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c})^{\frac{1}{n}}} \right] H_d^2 \quad (10)$$

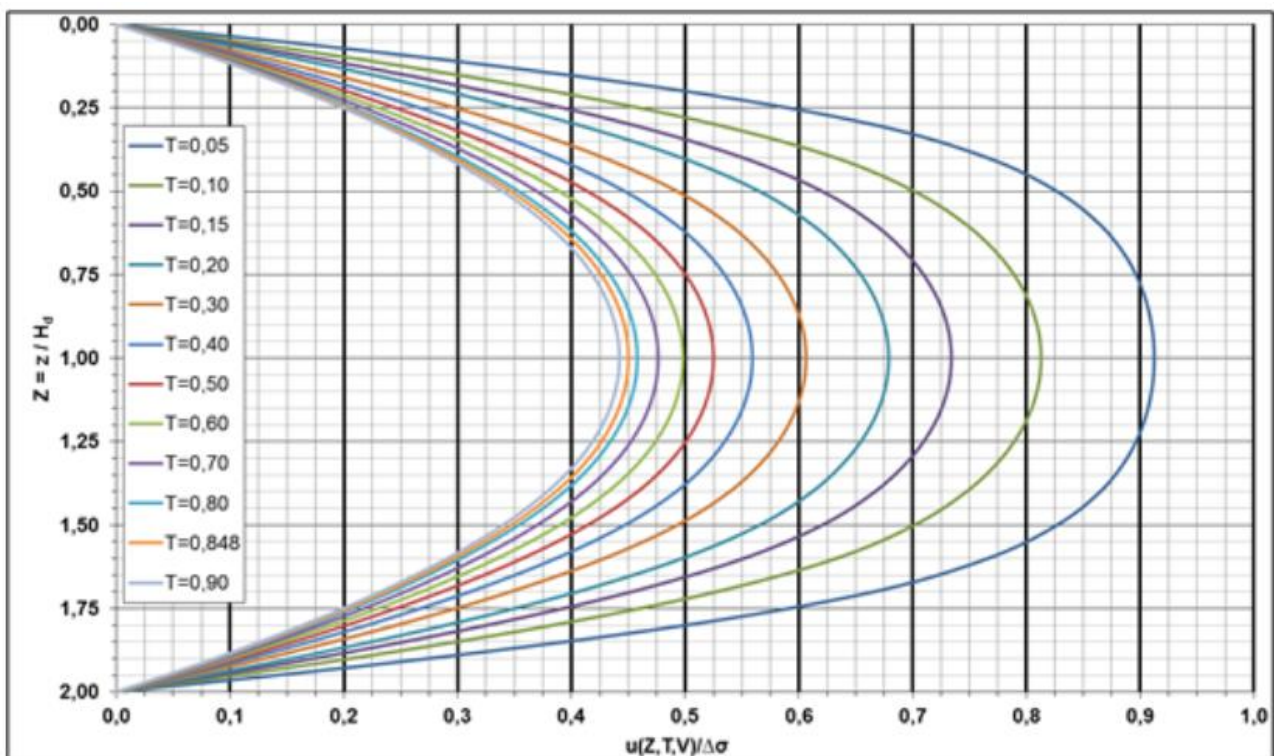
### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Equação (9) que é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) descreve matematicamente a saída de água dos vazios de um solo argiloso saturado. A EDP por apresentar apenas Fatores Adimensionais é geral e serve para qualquer tipo de solo argiloso. Como forma de verificação do correto desenvolvimento da referida equação, deve-se entender que ela é mais completa do que as Teorias de Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014). Desse modo, particularizando a referida equação deve-se obter aquelas descritas nas Teorias citadas. Se na

Equação (9) tomar-se  $\bar{\eta} = 0 \rightarrow V = 0$ , obtém-se a conhecida EDP do calor da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) cuja solução analítica é conhecida e apresentada nos cursos básicos de Mecânica dos Solos. Já tomando-se na Equação (9)  $n = 1$  obtém-se a EDP linear apresentada e resolvida analiticamente por Andrade (2014).

Para  $u'$  fixou-se o valor do Fator  $V$  e para cada  $T$  observou-se o comportamento da referida função com o  $Z$ , ou seja, ao longo da camada. As curvas construídas, por representarem a evolução da dissipação do  $u'$  com o tempo, são denominadas isócronas. A Figura 1 apresenta as isócronas para  $n = 5$  e  $V = 1$ . A escolha do referido valor de  $n$  se deve a Barden (1965). O Fator  $V = 1$  buscou ampliar os efeitos viscosos para o estudo do comportamento do solo.

Figura 1 - Isócronas:  $n=5$  e  $V=1$



Fonte: Autores (2021)

Ainda com relação à Figura 1,  $u'$  é sempre igual a 1 ( $u_m$ ) para  $T = 0$ . Essa hipótese está de acordo com a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936), no entanto, resultados experimentais recentes obtidos por Carvalho (1997) mostram que essa suposição não é verdadeira. Barden (1965) afirma que a maioria dos resultados de

ensaios de adensamento indica  $\Delta u = \Delta \sigma_v$  para argilas saturadas independentemente da razão incremental  $\frac{\Delta \sigma_v}{\sigma_v}$ . Analisando-se ainda a referida figura, verifica-se que as isócronas têm um aspecto semelhante a parábolas. Observa-se também o efeito da resistência viscosa atuando no adensamento. Por exemplo, a área externa à parábola para  $T = 0,05$  em  $V = 1$  é maior do que a área externa para o mesmo  $T$  na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Assim, quanto maior o  $V$ , maior a parcela viscosa resistiva disponível.

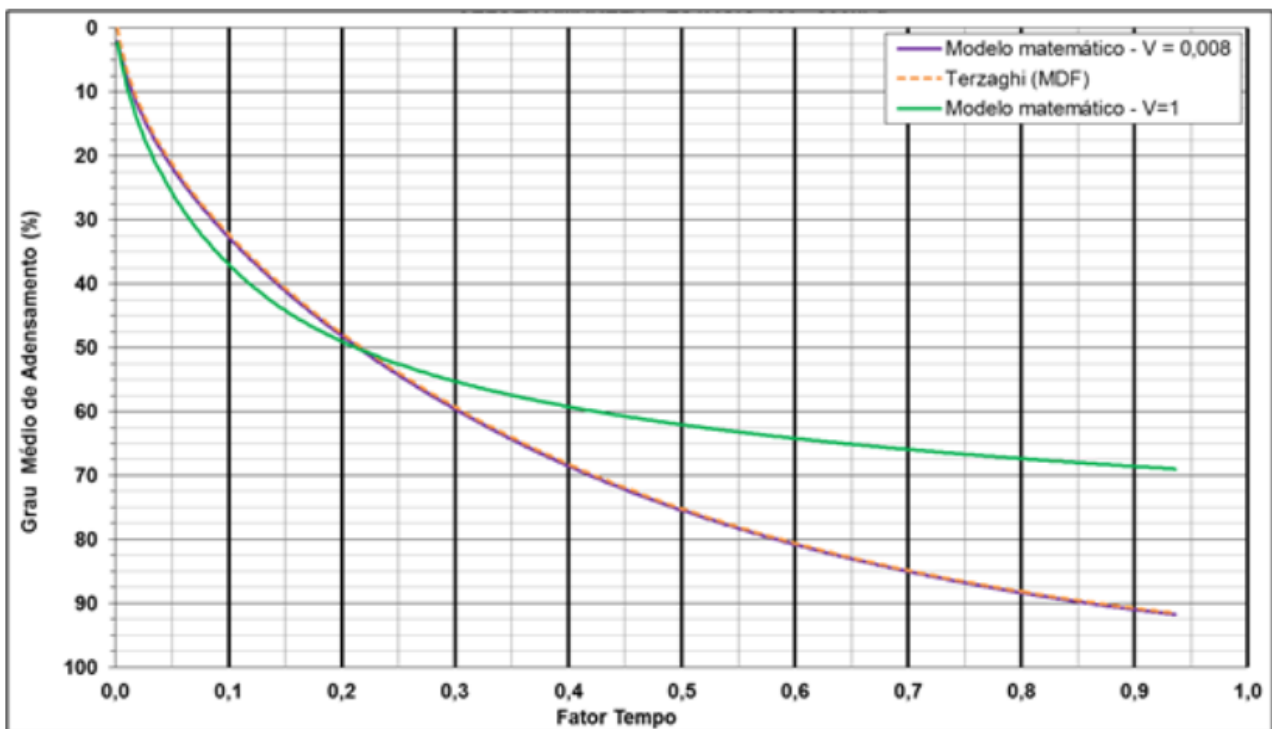
Os Graus Médios de Adensamento ( $\bar{U}$ ), para um dado valor de  $T$  com  $n = 5$  e  $V$  iguais a 0,008 e 1, foram obtidos tomando-se uma média ponderada das isócronas para  $U_z \times Z$ . O valor de  $V = 0,008$  foi escolhido tomando-se por base o trabalho de Andrade (2014). A Figura 2 apresenta os valores obtidos juntamente com os Graus Médios da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Observa-se que a evolução do adensamento no modelo matemático aqui desenvolvido para  $V = 1$  mostra-se mais acelerado no início do processo até  $T \cong 0,2$ . Mas em seguida, o fenômeno se desenvolve vagorosamente atingindo o “fim”, não mostrada na figura  $\bar{U} = 100\%$ , para  $T$  bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). O modelo matemático da Equação (9) com  $V = 0,008$  e a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) apresentam os Graus Médios de Adensamento muito próximos. Este fato já era esperado, uma vez que o  $V$  adotado é próximo de zero.

Para o ajuste da curva teórica à experimental apresentado na Figura 3, os parâmetros de adensamento a serem determinados são  $\bar{\eta}$  e o coeficiente de adensamento modificado  $\left(c_v^* = \frac{c}{a_{vs}}\right)$ . O valor de  $\bar{\eta}$  é obtido indiretamente por meio da adequada escolha de  $V$ . O processo para ajuste da curva foi descrito por Andrade (2014) e continua sendo utilizado neste modelo. Desse modo, o modelo matemático aqui adotado é verificado quanto a sua eficácia através do ajuste da curva teórica à experimental. A curva experimental de adensamento representa um estágio de incremento de tensão de 400kPa para 800kPa de um solo artificial

constituído de uma mistura de caulim (90%) + bentonita (10%). O referido ensaio de longa duração está descrito em detalhes em Carvalho (1997).

Observa-se que as Teorias de Terzaghi e Frohlich (1936), Andrade (2014) e o modelo aqui desenvolvido para  $V = 0,008$  não foram capazes de reproduzir a “dupla onda” observada no ensaio experimental. O não ajuste satisfatório no modelo com  $V = 0,008$  para a “cauda” do adensamento deve-se ao valor baixo escolhido do referido parâmetro que é muito próximo de zero. Isto significa dizer que a resistência viscosa existente é insignificante não apresentando assim a “cauda” do adensamento. Vale aqui registrar que na Teoria Linear de Terzaghi e Frohlich (1936), o  $V$  não existe.

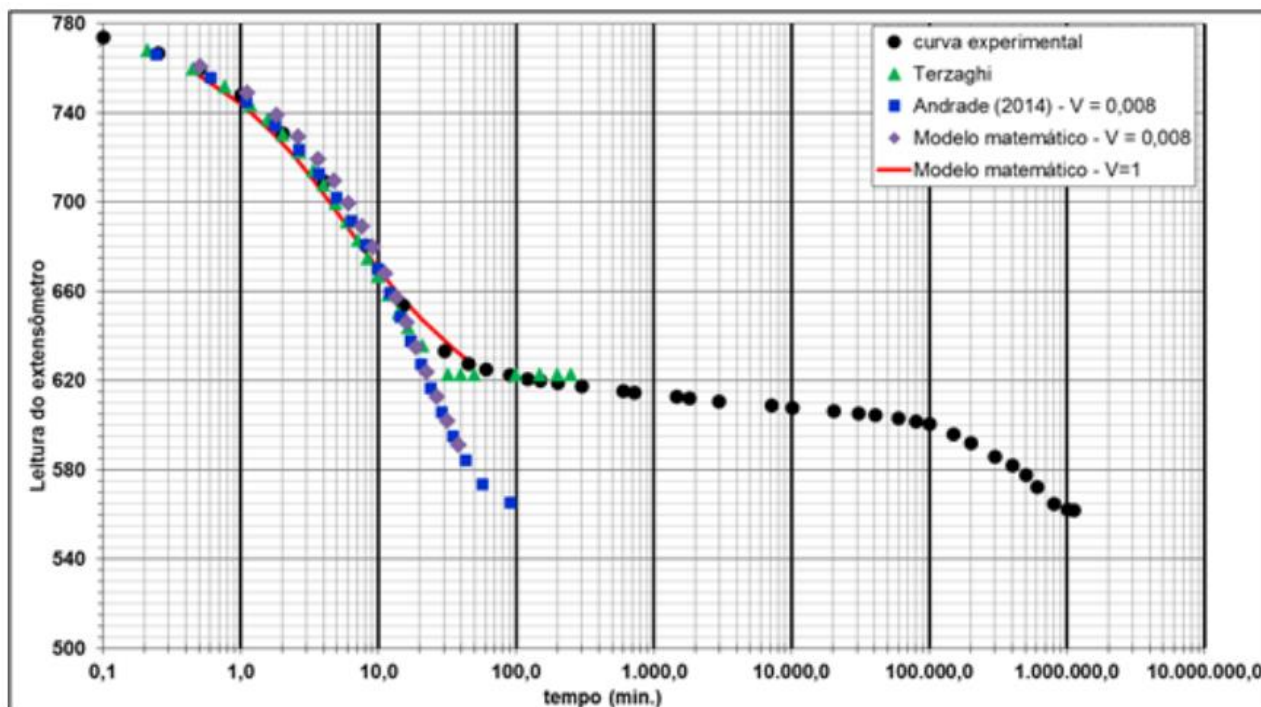
Figura 2 -  $\bar{U} \times T$  com  $n=5$  juntamente com Terzaghi e Frolich



Fonte: Autores (2021)



Figura 3: Ajuste das curvas teóricas à experimental



Fonte: Autores (2021)

Como o ajuste não foi satisfatório decidiu-se tomar um valor de  $V=1$ . Os valores de leitura do extensômetro e tempo para  $\bar{U}=50\%$  de Andrade (2014) foram novamente utilizados e o valor do coeficiente de adensamento modificado recalculado. Verifica-se que a modelagem adotada mostra um ajuste satisfatório à curva experimental pelo menos para o início da cauda do adensamento. Os valores obtidos já mostram que a modelagem com  $V=1$  e  $n=5$  é mais promissora do que as propostas por Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

## 4 RESULTADOS

O modelo matemático aqui proposto e desenvolvido considera a existência de uma parcela viscosa da tensão efetiva cuja lei é baseada numa proposta de Barden (1965). A EDP foi escrita de modo a incorporar os Fatores Adimensionais Profundidade ( $Z$ ), Tempo ( $T$ ) e Viscosidade ( $V$ ), portando, ela é geral e válida para

qualquer argila saturada, sendo mais completa que as fornecidas por Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

A evolução do adensamento no modelo matemático desenvolvido mostra-se mais acelerado no início do processo. Mas em seguida, o fenômeno se desenvolve vagarosamente, atingindo o “fim” para Fatores Tempo (ou tempos) bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). A parcela viscosa atua retardando o processo de adensamento.

O ajuste dos valores teóricos aos experimentais mostra que a modelagem com  $V = 1$  e  $n = 5$  é mais promissora que as propostas de Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. E. S. (2014). **Adensamento unidimensional considerando a resistência viscosa à compressão**. PhD dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

BARDEN, L. (1965). Consolidation of clay with non-linear viscosity. **Géotechnique**, 15(4), 345–362.

BRAJA, M. (2011). **Fundamentos de Engenharia Geotécnica**, 6º edn. Cengage Learning.

CARVALHO, S. R. L. (1997). **Uma teoria de adensamento com compressão secundária**. PhD dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

TAYLOR, D. W. (1942). **Research on Consolidation of Clays**, 1º edn. Massachusetts Institute of Technology.

TERZAGHI, K., FROHLICH, O. K. (1936). **Theorie der Setzung von Tonschichten**, 1º edn. Franz Deuticke.

## CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

### 1 – Joabby da Costa Biz

Graduado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/TD

<https://orcid.org/0000-0002-1799-2531> - joabby\_biz@hotmail.com

Contribuição: Conceituação | Curadoria de dados | Análise Formal | Investigação | Metodologia | Validação | Escrita – primeira redação.

## 2 – Maurício do Espírito Santo Andrade

Doutor, Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná

<https://orcid.org/0000-0002-5172-6800> - mauricioandrade@utfpr.edu.br

Contribuição: Conceituação | Curadoria de dados | Análise Formal | Investigação | Metodologia | Validação | Visualização | Escrita – revisão e edição.

## 3 – Elmagno Catarino Santos Silva

Doutor, Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná

<https://orcid.org/0000-0002-3450-0842> - elmagnosilva@utfpr.edu.br

Contribuição: Validação | Escrita – revisão e edição.

## Como citar este artigo

BIZ, J.C.; ANDRADE, M. E.S.; SILVA, E.C.S. Uma abordagem matemática para a previsão do adensamento das argilas saturadas. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 43, Ed. Esp. X ERMAC RS, e2, p. 1-11, 2021. DOI 10.5902/2179460X66836. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/2179460X66836>. Acesso em: 5 nov. 2021.