CIÊNCIAeNATURA

ISSN 2179-460X
Acesso aberto

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 43, e91, 2021 • https://doi.org/10.5902/2179460X65837
Submissão: 19/05/2021 • Aprovação: 09/10/2021 • Publicação: 31/ 12/ 2021

Ensino

Potências Irracionais: perspectivas para o Ensino Superior

Irrational Powers: perspectives for Higher Education

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck[I], Regina Célia Guapo Pasquini[II]

[I] Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu , PR, Brasil
[II] Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil

RESUMO

O conjunto dos números reais possui um papel fundamental no ensino da matemática, tanto nos níveis do Ensino Fundamental quanto no Ensino Superior, e as dificuldades que os alunos apresentam com relação a tais elementos, em especial aos irracionais, não devem ser ignoradas. Assim, com o objetivo de ampliar entendimentos sobre esses temas, elaboramos formas de abordar as funções potência, exponencial, suas inversas e respectivas funções derivadas, buscando esclarecer suas continuidades. Para tanto, procuramos conhecer como os livros didáticos apresentam a função exponencial e as regras de derivação para funções potências, enfatizando o caso de expoentes irracionais e, a partir de reflexões, muitas destas inspiradas pela obra Cálculo Diferencial e Integral de Courant (1951), preparamos um material de estudo que permite retomar discussões sobre as propriedades básicas e expandir as argumentações com relação a continuidade de tais funções, além de uma definição apropriada para o valor a elevado ao expoente x. Como resultado, apresentamos duas perspectivas para se trabalhar com a função exponencial e a função logarítmica, bem como alternativas para a definição de potências de expoentes irracionais. Acreditamos que esse embate de diferentes interpretações possibilita um repensar dos conceitos, permitindo lograr novas percepções sobre tais assuntos.

Palavras-chave: Expoentes irracionais; Função exponencial; Função logarítmica; Ensino de matemática

ABSTRACT

The set of real numbers has a fundamental role in the teaching of mathematics, both in Elementary and Higher Education levels, and should not be ignored the difficulties that students have in relation to such elements, especially the irrational. Thus, with the objective of seeking to produce knowledge on this topic, we developed ways to address the power function, exponential, their inverses and their respective derived functions, seeking to clarify the continuity. Therefore, we sought to know how textbooks present the exponential function and the rules of derivation the power functions, emphasizing the case of irrational exponents and, based on reflections, many of them inspired by the work Cálculo Diferencial and Integral by Courant (1951), we have prepared a material that resume discussions about the basic properties and expand the arguments regarding the continuity of such functions, in addition to an appropriate definition for the value a raised to the exponent x. As a result, we present two perspectives for working with this functions, as well as alternatives for defining powers of irrational exponents. We believe that this meeting of different interpretations enables a rethinking of the concepts, allowing achieve new perception on such matters.

Keywords: Irrational exponents; Exponential function; Logarithmic function; Mathematics teaching

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentaremos alguns resultados parciais oriundos dos estudos efetivados no projeto de pesquisa “A disciplina de Análise: uma investigação em curso”, o qual buscou realizar uma investigação histórica sobre como se deu o desenvolvimento dos cursos de Análise Real, no sentido de pesquisar tanto os conceitos apresentados na disciplina, como sua cronologia, pautados em alguns referenciais didáticos pedagógicos, possibilitando um repensar na forma como os conteúdos são trabalhados nesta disciplina.

Em nossas diligências nos deparamos com o livro Cálculo Diferencial e Integral, de Courant (1951), o qual aborda as questões do Cálculo e da Análise Real de uma forma diferenciada, pois apresenta primeiro a definição de integral de uma função de uma variável real para, posteriormente, tratar da sua derivada. Essa perspectiva distingue-se da exposição da maioria dos livros texto de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Real, os quais apresentam os temas na ordem: conjuntos numéricos, funções, limites, continuidade, derivada e integral conforme Avila (1999), Figueiredo (2013), Guidorizzi (2008), Leithold (1994), Lima (2017), Stewart (2013), Swokowski (1994) e Thomas (2002). Isto nos impeliu a refletir sobre a forma com que trabalhamos alguns conteúdos didáticos quer seja num curso de Análise Real ou Cálculo.

Outro ponto importante para a seleção do assunto diz respeito às dificuldades que os alunos apresentam com relação aos números reais, em especial os irracionais. Segundo Broetto (2019), tanto alunos do Ensino Fundamental como dos cursos de Licenciatura em Matemática não sabem diferenciar números irracionais de números racionais e isso se deve a dois fatores inter-relacionados: “Aplicação incorreta ou incompleta da definição e o não entendimento da relação entre as frações e suas representações decimais. [...] o fato de uma divisão de inteiros gerar necessariamente uma dízima periódica não é uma questão óbvia para os estudantes, inclusive para os licenciandos. Por conta disso, essa questão não deve ser tratada de forma aligeirada” (p. 735).

Outrossim, nossa experiência mostra que muitos alunos também apresentam dificuldades com relação às propriedades de potências e dos logaritmos, não sabendo justificar os procedimentos de cálculo. Portanto, entre as questões de pesquisa, surge aquela que busca conhecer novas formas de abordar esse assunto visando construir um tratamento para tal, capaz de demonstrar novos horizontes para esse assunto.

Com isso, um dos resultados de nossa investigação foi a percepção sob o modo como temas de potenciação, de função exponencial e de sua inversa podem ser apresentados, possibilitando-nos retomar discussões sobre suas propriedades básicas e expandir as argumentações com relação a continuidade de tais funções e uma definição apropriada para a^x, destacando o caso das potências com expoentes irracionais. Cabe ressaltarmos que potências irracionais podem ser obtidas de várias formas, variando os elementos da base e do expoente com valores racionais e/ou irracionais, conforme os exemplos $\sqrt{2}, \pi^3$, $(\sqrt{3})^{\frac{5}{7}}, (\sqrt{5})^2, -(2)^{-\frac{1}{2}}$ etc. Nossa preocupação, neste trabalho, recai sobre a determinação dos valores de potências com expoente irracional, já que os casos de expoentes inteiro e racional decorem, e se justificam, da definição de expoente natural e das propriedades aritméticas básicas das potências.

Ainda, as regras de derivação para as funções $y = x^\alpha$ com potências irracionais são apresentadas mas não comumente demonstradas nos livros de Cálculo ou Análise Real e, por vezes, estes se utilizam de técnicas que omitem pontos nevrálgicos da teoria. Como exemplo, (Stewart, 2013, p. 199) justifica a generalização dessa regra de derivação apresentando o seguinte procedimento.

A Regra da Potência: Se n for qualquer número real e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração: Seja $y = x^n$. Usa-se a derivação logarítmica:

$$ln\,|y| = \; ln\,|x^n| = \; n\; ln\,|x|, \qquad \neq \; 0$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Logo,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Observemos que o método acima esclarece a regra, mas para seu uso há de se estabelecer previamente a identidade $\alpha \ln|x| = ln\,|x|^{\alpha}$ para potências irracionais, fato ainda não consolidado neste compêndio.

Dessa forma, motivados pelas incursões do projeto de pesquisa, procuramos conhecer como os livros didáticos apresentam a função exponencial e as regras de derivação para funções potências, enfatizando o caso de potências com expoentes irracionais e, a partir de reflexões decorrentes da nossa investigação, organizamos uma apresentação sobre o tema, a qual será exposta no decorrer deste artigo. Ressaltamos que elaboramos uma ordem de apresentação desses conteúdos que, como ficará explícito nas linhas abaixo, pode ser alterada a critério do professor e a depender do grau de conhecimento da turma que esse estiver trabalhando e dos objetivos que ele deseja com tal assunto. E neste texto, não possuímos a intenção de empreendermos sobre estratégias metodológicas para o tratamento de tais conteúdos.

Ademais, abordagens diferenciadas dos conteúdos podem auxiliar os acadêmicos a adquirirem compreensões que por vezes lhes passam despercebidas, além de motivá-los a buscar novas técnicas de investigação, de apreensão de conceitos. Neste sentido, corroboramos com (Broetto, 2019, p. 733), quando afirma que “A aprendizagem tem maiores chances de se tornar efetiva e duradoura quanto maior é a variedade de relações, figuras mentais e procedimentos referentes a um determinado conceito, principalmente aquelas que estabelecem ligações com outros conceitos”. Ele critica a ênfase dada ao formalismo relacionado ao conceito de números reais (corpo ordenado completo) colocando que “uma abordagem formalista/axiomática não fornece o suporte necessário para enfrentar os desafios da prática em sala de aula na Educação Básica” (p. 742). Nesse sentido, explorar diferentes perspectivas que conduzem à continuidade da função exponencial, mesmo que de modo formal, possibilitará confrontar o próprio conceito de irracionalidade, permitindo que os acadêmicos ponderem sobre essas questões.

2 MATERIAL E MÉTODOS

Este artigo foi delineado a partir das seguintes perguntas: Como suprir lacunas na abordagem das funções exponenciais de forma a tornar possível apresentarmos uma demonstração para a sua continuidade para acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática? E ainda, como generalizar a regra de derivação das funções potência para o caso de expoente irracional? E frente aos questionamentos decidimos buscar na literatura os fundamentos para tal arguição.

As interrogações apresentadas são oriundas do projeto de pesquisa supracitado. A fim de percorrermos tais perguntas utilizamos uma abordagem de natureza qualitativa, sendo essa “[...] um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação. Esse processo implica em estudo segundo a literatura pertinente ao tema [...]” (Oliveira, 2014, p. 37). Para tanto, realizamos um trabalho de pesquisa bibliográfica, pois “[...] a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia investigar diretamente” (Gil, 2008, p. 50).

Destacamos, aqui, a obra de Richard Courant (1951), Cálculo Diferencial e Integral, como texto balisador no sentido de provocar alguns questionamentos sobre o tema das funções exponencial e funções potência, uma vez que essa obra antecipa o assunto de integração para depois tratar da derivação, possibilitando inquirir sobre os temas de forma distinta.

Assim, através do estudo de obras que trabalham com os temas dessa investigação, tanto no nível fundamental quanto no superior, procuramos conhecer como são desenvolvidos os conteúdos sobre potências, função exponencial, função logarítmica e suas respectivas derivadas, possibilitando a elaboração de caminhos que conduziram a verificação da continuidade dessas funções, bem como da operacionalização de suas regras de derivação. Aqui, salientamos que nosso foco reside na discussão de diferentes abordagens para esses conteúdos tão importantes para a formação dos futuros professores, e no benefício que elas podem oferecer ao aprendizado.

3 AS POTÊNCIAS a^x E AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

As funções exponencial e logarítmica são apresentadas no Ensino Médio e, para a melhor compreensão, sua abordagem é antecedida pelos conceitos de potenciação e radiciação, seguidos de suas propriedades. Dessa forma, são tratados os conceitos básicos de uma potência b como um número que é resultado de um expoente n numa base a, ou seja $b = a^n, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. E, também, dizemos que o número real a é a raiz n-ésima de um número real não negativo b, e representamos por por $a = \sqrt[n]{b},\ a \in \mathbb{R}_+$, $a \in\ \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$ não nulo, se $a^n = b$. Assim, também se estabelece que $\sqrt[n]{b} = a$ se, e somente se, $b = a^n$.

Na literatura específica de tais temas, percebemos que as primeiras definições a serem trabalhadas envolvem os expoentes naturais, partindo desse caso primário e inferindo as regras básicas de potenciação, geralmente, pela intuição. Posteriormente, a fim de manter a validade de tais propriedades, é definida a potência para expoentes inteiros negativos e racionais.

Definição: Dado a um número real positivo[1], para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos que:

$a^0 = 1$,

$a^n = a^{n-1} \cdot a, \; n \geq 1.$

Propriedades básicas: Para $a, b \in R^*_+$ e m e n naturais, valem:

i) $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$,

ii) $(a.b)^m = a^m.b^m$,

iii) $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Com isto, é imediato verificar que,

$$a^1 = a^{1-1} \cdot a = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

e que,

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De forma análoga, mas agora utilizando a propriedade (iii), obtemos que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

estendendo a definição para os números negativos e racionais, mantendo as regras operacionais acima.

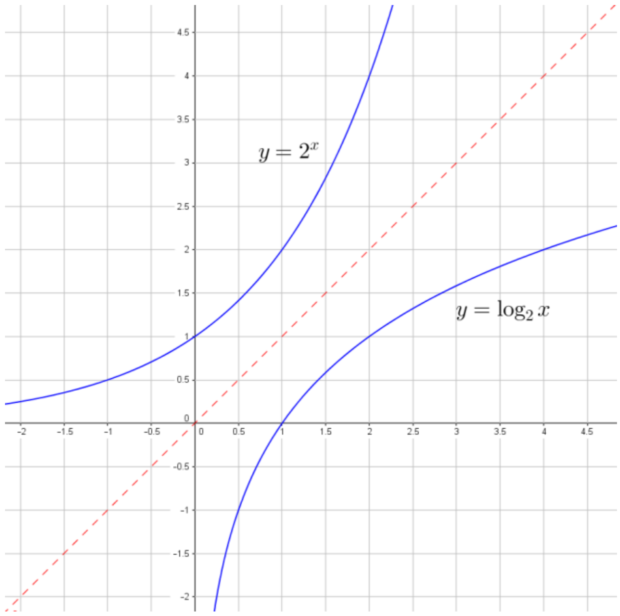
Constatamos que a maioria dos livros didáticos consultados explora os casos de bases e expoentes negativos, justificando com contraexemplos as restrições para a boa definição das expressões. Dessa forma, estabelecidas as regras básicas para potências com expoentes naturais, inteiros e racionais, segue-se com a definição da função exponencial através da relação $y = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0$, onde expande-se a potência com expoentes para todo número real de uma forma muito informal, sem, necessariamente, as devidas considerações sobre esse processo tão

[1] Alguns livros ampliam a definição de potências naturais (e inteiras) para bases com valores reais para, posteriormente, realizar as restrições cabíveis para os demais expoentes.

laborioso. Ainda, de $y = a^x$ são trabalhadas as questões relacionadas ao domínio, imagem, contradomínio, crescimento/decrescimento e, por fim, o gráfico dessa função. Observamos na literatura, ainda que expresso de forma instintiva, que a função exponencial, restrita a imagem ($\mathbb{R}_+^*$), é uma função bijetora, possibilitando a definição de sua inversa: a função logarítmica.

Neste contexto, a função logarítmica surge como a função inversa da exponencial, ou seja, ela se apresenta a partir do reconhecimento das propriedades e características da função exponencial. Seu gráfico é determinado utilizando-se as simetrias existentes entre uma função e sua inversa, a saber: f e sua inversa f^{-1} são simétricas com relação a reta identidade $y = x$. Tal como ilustramos nas figuras a seguir, em que exemplificamos casos particulares da função exponencial e sua inversa logarítmica com monotocidade crescente (Figura 1) e decrescente (Figura 2). Os exemplos evidenciam as simetrias entre seus traçados.

Figura 1: Funções exponencial e logarítmica com $a > 1$

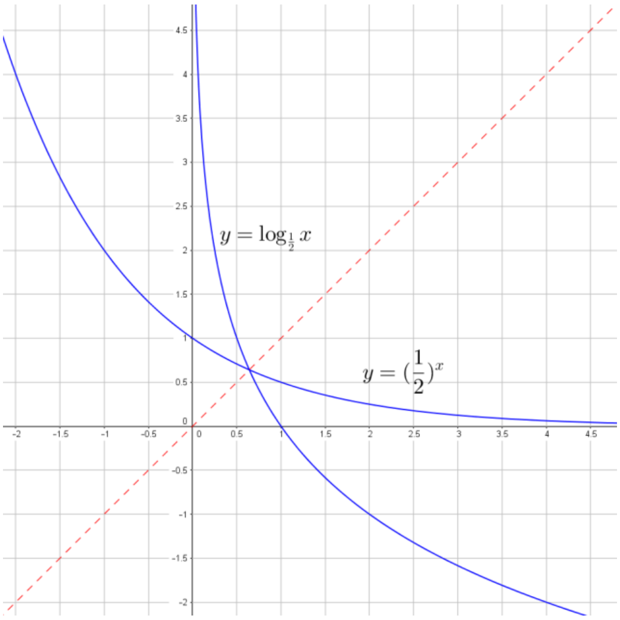


Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Quando a > 1 temos que a função exponencial é crescente, o que garante que sua inversa é também crescente. De fato, se $y_1 < y_2$, pela sobrejetividade de f, segue que existem x_1 e x_2 tais que f $(x_1) = y_1$ e f $(x_2) = y_2$. Assim, se f^{-1} fosse decrescente, isto é, se $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ teríamos que $f^{-1}(f(x1)) > f^{-1}(f(x2))$, ou seja, $x_1 > x_2$ com $f(x_1) < f(x_2)$, o que contradiz a monotocidade de f. Analogamente, verifica-se o caso decrescente para $0 < a < 1$.

Poucos são os livros que demonstram de forma precisa, utilizando o princípio de indução, as propriedades aritméticas elencadas acima, quiçá justificam tais fatos para os irracionais. Não tratam com os irracionais, pois “Não existe propriedade de potenciação para expressar o valor de uma função exponencial quando o expoente é irracional. Por exemplo, se $f(x) = 2^x$, então $f(\pi) = 2^\pi$, porém o que 2^π significa? O que podemos fazer são apenas aproximações” (Demana et al., 2009, p. 128). Certamente o valor de 2^π é atribuído por meio de aproximações, já que o expoente é um número irracional, mas é possível definir essa expressão de forma precisa. Ainda que os licenciandos não possam levar essa exposição para suas aulas na Educação Básica, devido à complexidade de tal, é salutar que a eles, abordagens como essa sejam apresentadas, pois suprem lacunas em relação a conteúdos que são objetos de ensino da sua prática, e consideramos de grande relevância que os futuros professores conheçam a natureza do conhecimento matemático que ele irá ensinar. “Este conhecimento seria necessário para que o futuro professor pudesse perceber problemas epistemológicos importantes nas abordagens usuais dadas a conceitos como números racionais e irracionais, funções, continuidade etc. e permitiria ao futuro professor discutir de modo mais amplo o conhecimento que irá lecionar” (Moreira e Vianna, 2016, p. 533). Neste sentido, esses conhecimentos são apresentados, geralmente, nos cursos de Análise Real.

Figura 2: Funções exponencial e logarítmica com $0 < a < 1$



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Entre as obras para o Ensino Médio que analisamos destacamos aqui duas delas para tecer alguns comentários. O livro Fundamentos da Matemática Elementar: Logaritmos, de Iezzi et al. (2013), explora as propriedades de potenciação com maiores detalhes, provando algumas delas através do método de indução. Ainda, os autores discutem brevemente o caso de potência de expoente irracional (α), introduzindo o conceito de "classe" que define a^{α}, semelhante aos conjuntos estabelecidos pelos Cortes de Dedekind[2], ou seja, tomam conjuntos de aproximações por falta $\{a^r | r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < \alpha\}$ e por excesso $\{a^s | s \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha < s\}$. Entretanto, não chegam a explorar essa definição, apesar da preocupação em descrever um exemplo, o número $3^{\sqrt{2}}$, como aproximação de valores racionais.

Já o exemplar Matemática para o Ensino Médio, Volume 1, de Lima et al. (2006) esclarece, sem utilizar o princípio de indução explicitamente, as propriedades de potências para uma base a. Os autores justificam a extensão das definições para expoentes inteiros e racionais, incluindo a preocupação com a boa

[2] Maiores detalhes em Avila (1999).

definição de a^r para o caso de $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, com n e q não nulos. Ainda, valem-se do lema "fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$."(p. 177), que versa sobre a densidade da imagem de a^r nos reais positivos para posteriormente justificar, em conjunto com a completeza dos reais, que existe uma única maneira de se definir a função exponencial a^x para x irracional. Entretanto, os autores tratam da propriedade da completeza de forma coloquial, fazendo uso de expressões decimais (Lima et al., 2006, p. 60). Por fim, este compêndio apresenta uma caracterização para a função exponencial e define a logarítmica como sua inversa.

Tradicionalmente, os livros para o Ensino Médio, como Dante (2013) e Souza e Garcia (2016), apresentam a função exponencial para depois definirem a função logarítmica como sua inversa. Essa perspectiva também é assumida nos materiais para os cursos de Licenciatura em Matemática através dos livros de Pré-cálculo e de Cálculo Diferencial e Integral, conforme Stewart (2013), Swokowski (1994), Thomas (2002), Demana et al. (2009), Medeiros et al. (2006). Entretanto, neste nível de ensino, mais detalhes são apresentados, como a demonstração das propriedades básicas para expoentes naturais, inteiros e racionais[3]. Além disso, considerações são feitas para o caso de potências irracionais.

> O valor para um número irracional x é escolhido de modo que o gráfico de a^x não apresente "buracos" ou "saltos". Essas palavras obviamente não são termos matemáticos, mas transmitem informalmente a ideia. Queremos mostrar que o valor a^x, quando x é irracional, é escolhido de modo que a função $f(x) = a^x$ seja contínua, uma noção que será explorada cuidadosamente no próximo capítulo. [...] $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997086$. É a propriedade da completude dos reais que garante que este procedimento resultará em um único número que definimos como $2^{\sqrt{3}}$. (Thomas, 2002, p. 33).

Obviamente são os entraves conceituais relacionados aos irracionais que proporcionam essas dificuldades na definição do termo a^x, mas é devido a importância da exponencial, e de suas propriedades de derivação, que muitos

[3] Neste texto, a menos de considerações em contrário, estamos assumindo que a base a da expressão a^x é positiva, para garantir sua boa definição.

autores preferem introduzí-las no início dos livros de Pré-cálculo e Cálculo, justificando sua continuidade de forma intuitiva e, posteriormente, com o uso da integral, ressignificando essa interpretação, definindo primeiramente a função logarítmica (natural) para que, na sequência, possa expressar a exponencial (natural) como sua inversa. Assim, apresenta-se para todo valor $x \in (0, +\infty)$ a função logarítmica como

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \tag{01}$$

É interessante observarmos que a descrição das funções exponenciais, para qualquer base positiva a, e das logarítmicas gerais ($\log a$), são obtidas da função (01) através de relações com o Número de Euler e. Assim, esse número assume um lugar de destaque para tais funções. Uma boa caracterização para esse valor pode ser obtida em Silva e Spolaor (2015).

Na próxima seção faremos um paralelo de diferentes abordagens para definir as potências irracionais e suas regras de derivação, no primeiro caso partindo do logaritmo natural definido pela integral e, no segundo caso, através dos limites de aproximações racionais, baseado no trabalho de Courant (1951).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO - POTÊNCIAS IRRACIONAIS

Para determinarmos as regras de derivação para a função potência com qualquer expoente, $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, começamos relembrando uma identidade que envolve potências naturais:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots x x_0^{n-2} + x_0^n) \tag{02}$$

para quaisquer x, x0 ∈ R e n ∈ N

Utilizando a equação (2) é fácil verificarmos que a derivada das funções potência para o caso de expoente $n \in \mathbb{N}$ é dada por:

$$f'(x_o) = lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_o) = lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$f'(x_o) = lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1})}{x - x_0}$$

$$f'(x_o) = nx_0^{n-1}$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Segue, como consequência imediata desta regra, e da regra do quociente para derivadas, o caso em que n é um inteiro negativo e $x \neq 0$. De fato, se $n \in \mathbb{Z}_{-}$, então $-n > 0$ e

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{0. x^{-n} - 1. (-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$$

Para deduzirmos a derivada de uma função potência para expoentes racionais vamos precisar de dois resultados: a regra da cadeia e a derivada de uma função inversa. Ambos os resultados podem ser consultados em (Lima, 2017, p. 263).

> Derivada de uma Função Inversa: Seja $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Consideremos, agora, $n \in \mathbb{Z}$ não nulo, e a função $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, para $x \in D(f)$. Assim, sua inversa, sobre o contradomínio[4], é dada por $g(x) = x^n$. Dos resultados acima, temos que:

[4] Observe que para *n* par f é definida sobre os reais não negativos e para valores ímpares o domínio são todos os reais.

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{n(y)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\ .x^{\frac{1}{n}-1}$$

Ou seja,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\ .x^{\frac{1}{n}-1}$$

Para resolver o caso geral de um valor $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \neq 0$, utilizamos a regra da cadeia.

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m}\right]' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}.\left(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\right) = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}}.x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1+1-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

Resta, por fim, provarmos que para um número irracional t a regra da derivada permanece a mesma, ou seja, $(x^t)' = tx^{t-1}$. Para isto, precisamos, primeiramente, especificar como determinar o número irracional α^t. Na sequência apresentamos dois modos: o primeiro definindo α^t em decorrência da função logarítmica e de suas propriedades e o segundo em termos do limite de sequências de números racionais.

4.1 Caso um: a partir da Função Logarítmica

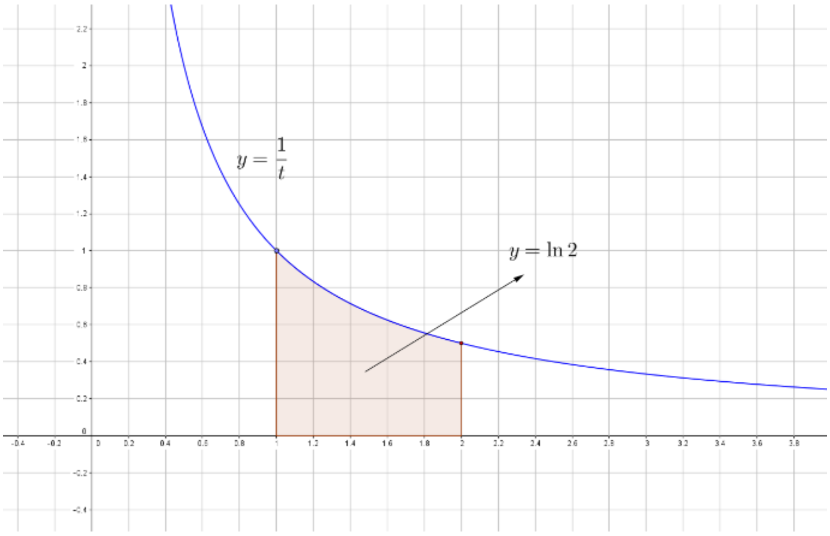
Essa é uma maneira muito elegante e funcional de se definir uma potência com expoente irracional, pois as poderosas ferramentas do cáculo facilitam algumas manipulações. Por outro lado, requer que o aluno perfaça grande parte de um curso de Cálculo sem abordar as funções exponenciais. A seguir, retomamos a definição da função logarítmica (natural), representada na Figura (3), que serve como ponto de partida para essa ideia.

Definição: Definimos a função logarítmica (natural), $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, como a função dada por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Assim, a função $\ln x$ é tomada como a integral do ramo positivo da hipérbole, sendo uma função contínua e derivável pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)[5]. Como a integral representa a área sob o gráfico da hipérbole é possível demonstrarmos várias relações para $\ln x$ de modo a obter as mesmas caracterizações das funções logarítmicas definidas como inversas de funções exponenciais.

Figura 3: Representação da função y = ln x como área sob a hipérbole



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Na sequência, mostramos algumas propriedades, e suas respectivas demonstrações, que são comumente trabalhadas nos livros de Cálculo e Análise Real. Algumas referências sobre esse tema são: Avila (1999), Figueiredo (2013), Guidorizzi (2008), Lima (2017), Stewart (2013) e Thomas (2002).

1. Se 0 < x < 1, então ln x < 0.

Decorre de propriedades da integral e da positividade da hipérbole, ou seja,

[5] Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável. Se G for uma primitiva qualquer de f em $[a,b]$, então $\int_a^a f = G(b) - G(a)$. (Figueiredo, 2013). Observamos que, nos livros de Cálculo, a hipótese (limitada) integrável é substituída pela continuidade.

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\left(\int_x^1 \frac{1}{t}dt\right) < o$$

2. $\ln 1 = 0$

   Imediato da definição.

3. Se $x > 1$, então $\ln x > 0$.

   Basta observar que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt > 0$, pois representa a área sob a hipérbole.

4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

   Segue imediato do TFC.

5. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Basta observarmos que as derivadas, em relação a x, das seguintes funções coincidem: $(\ln(xy))' = 1/x = (\ln x)'$, logo $\ln(xy) = \ln x + k$, k é uma constante. Fazendo $x = 1$ nesta última expressão, obtemos $k = \ln y$.

6. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$.

$$ln\ (x) = ln\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = ln\left(\frac{x}{y}\right) + ln(y) \Longrightarrow ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\, x - ln\, y$$

7. Se $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $\ln(x^r) = r\ln(x)$.

Consideramos essa propriedade como a mais importante de $y = \ln x$, pois dela decorre a definição de a^t, t irracional. Para demonstrá-la vamos utilizar a regra da cadeia associada a derivada da função potência nos casos de expoentes racionais.

Tomando $u = x^r$ e $y = \ln x^r$, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dy} = \frac{1}{u}.rx^{r-1} = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}$$

Esta derivada coincide com a derivada de $y = r\,ln\,x$, logo, ambas as funções diferem a menos de uma constante, ou seja, $\ln(x^r) = r\,ln\,x + k$, k constante. Fazendo $x = 1$, temos que $k = 0$ e obtemos a expressão desejada.

8. A função $y = \ln x$ é crescente.

   Basta observar que sua derivada é positiva.

9. Se $x_n \to +\infty$, então $\ln x_n \to +\infty$.

   Observamos, primeiramente, que $\ln 2 > 0$. Com efeito, se

$$1 < t < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{t} < 1 \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2} dt < \int_1^2 \frac{1}{t} dt < \int_1^2 1 dt \Rightarrow \frac{1}{2} < \ln 2 < 1$$

Agora, consideramos a sequência $(\ln 2^n)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \ln 2^n = \lim_{n\to+\infty} n \ln 2 = \ln 2. \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Como o logaritmo natural é crescente, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln x_n = +\infty$$

De fato, fixado qualquer $M > 0$ (grande), como $\ln 2^n \to +\infty$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $\ln 2^n > M$. Para o valor $2^{n_0} > 0$, como $x_n \to +\infty$ por hipótese, segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então $x_n > 2^{n0}$.

Como $\ln x$ é uma função crescente, para $n > max\{n_0, n_1\}$, temos que $ln\,x_n > \ln 2^{n_0} > M$. Com isto, concluímos que

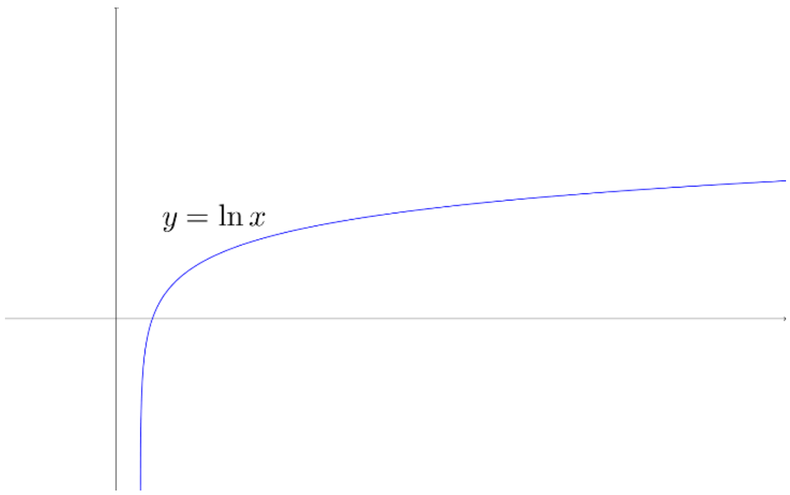
$$(\ln x_n) \to +\infty$$

10. Se (x_n) é positiva e $x_n \to 0^+$, então $\ln x_n \to -\infty$.

Esta demonstração é análoga ao caso anteiror, mas agora considerando a sequência $\left(\ln\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ e o crescimento da função logarítmica. Vejamos que,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -n \ln 2 = \ln 2. \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$$

Figura 4: Função $y = \ln x$



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Ressaltamos que as propriedades 8, 9 e 10 são importantes na medida que garantem que a função logarítmica é sobrejetiva em $\mathbb{R}$, pois uma função ser crescente não implica, necessariamente, em ela ser ilimitada, como é o caso, por exemplo, da função $y = tan^{-1} x$, que é crescente, mas limitada pelas assíntotas horizontais $y = \pm \frac{\pi}{2}$.[6]

Com estas propriedades é possível estabelecermos uma representação para o gráfico da função logarítmica que coincide com nossas expectativas, conforme Figura (4).

Através das considerações expostas sobre a função logarítmica, sabemos que $\ln: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função injetora e sobrejetora e dessa bijetividade decorre que existe uma função inversa f^{-1} bem definida. Ademais, f é contínua (pelo item 4 é derivável). Dessa maneira surge, por fim, a função exp = f^{-1}.

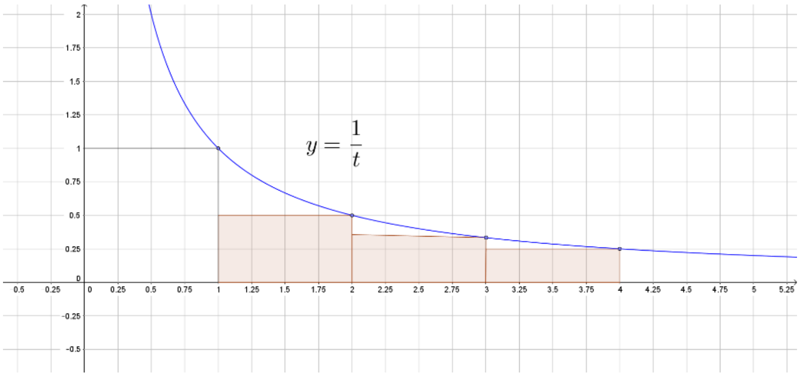
[6] Vários exemplos, de funções crescentes e limitadas, podem ser construídos observando-se suas assíntotas horizontais. Tomando $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} - 2$, se $x < 0$ e $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} + 2$ se $x \geq 0$; vemos que trata-se de uma função crescente com assíntotas horizontais dadas por $y = \pm 1$

Outrossim, como a função logarítmica é contínua, do Teorema do Valor Intermediário[7] para $\ln(4) > 1 > \ln(2)$, temos que existe um valor $e \in (2,4)$ tal que $\ln e = 1$. Eis, portanto, uma maneira de apresentar o Número de Euler.

A escolha do valor $x = 4$ é motivada pelas desigualdades abaixo e pela Figura (5).

$$\ln 4 > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Figura 5: Estimativas para o valor $y = \ln 4$



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Definição: Definimos a inversa da função logarítmica como a função $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, ou seja:

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Chamaremos essa função de exponencial, pois ela é uma representação da função exponencial natural clássica ($y = e^x$), como mostraremos na sequência.

Das propriedades do logaritmo decorrem as propriedades da exp x, a saber, dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$, seguem-se que:

[7] Seja $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a; b)$ tal que $f(c) = d$. (Lima, 2017, p. 234).

11. $\exp(x + y) = \exp x. \exp y$.
12. $exp(r.x) = (\exp(x))^r$.
13. $y = \exp x$ é uma função crescente.
14. $(\exp x)' = \exp x$.

Comentaremos esse resultado em vista da exponencial ser a única função a satisfazê-lo, a menos de constantes multiplicativas. Ademais, como coloca Courant e Robbins (2000) “A função exponencial natural é idêntica à sua derivada. Esta é realmente a origem de todas as propriedades da função exponencial e a razão básica para sua importância em aplicações” (p. 514).

Considerando $y = \exp(x)$, então pelo resultado da derivada de uma função inversa, temos que

$$(\exp x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x$$

Como toda função derivável é contínua, segue que $\exp$ também é uma função contínua.

15. $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$.
16. $\lim_{x \to +\infty} \exp x = 0$.

Observação: Como tomamos $e \in \mathbb{R}$ tal que $\ln e = 1$, segue-se que $\exp 1 = e$. Assim, para todo $r \in \mathbb{Q}$, da propriedade 12, temos que

$$\exp r = \exp(1.r) = (exp 1)^r = e^r$$

Essa última observação, aliada à propriedade 11, justifica a denominação da função $y = \exp x$ como função exponencial. Ademais, essa caracterização nos permite estender o conceito para uma *potência com expoente irracional na base* e, uma vez que $y = \exp x$ está bem definida para todos os valores reais, inclusive x irracional. Isto dá significado a essa “potência irracional”. Assim, colocamos:

Definição: Para todo $x \in \mathbb{R}$ definimos $e^x = \exp x$.

Nossa intenção, agora, é ampliar o significado de potências de expoentes irracionais para todas as bases positivas. Entretanto, desejamos manter as propriedades básicas dessas funções, logo gostaríamos que as potências a^t satisfizessem $\ln(a^t) = t \ln a$. Assim, “forçamos” que isto aconteça estabelecendo a próxima definição.

Definição: *(Potências com Expoentes Reais)* Seja a um número real positivo. Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$a^t = e^{t.\ln a}$$

Observemos que $2^{\pi} = e^{\pi.ln\, 2} = exp(\pi.\, ln\, 2)$, com $\ln 2$ bem definido pela integral da hipérbole e $\exp(\pi.\, ln\, 2)$ sendo a inversa do logaritmo no ponto $\pi. \ln 2$, também bem definido. Uma expressão bem definida, mas nem por isso fácil de calcular. Outro aspecto dessa definição é que ela é pertinente para todas as potêncais reais, como exemplo $2^4 = e^{4.\ln 2} = 16$.

Com essa definição é possível concluirmos os casos de derivação para potências irracionais. Vejamos:

$$(x^t)' = \left(e^{t \ln x}\right)' = [\exp(t \ln x)]' = \exp(t \ln x)\,.\, t\frac{1}{x} = e^{(t \ln x)}.\frac{t}{x} = x^t.\, t.\, x^{-1} = t.\, x^{t-1}$$

Ou seja,

$$(x^t)' = t.\, x^{t-1}$$

Além disso, garantimos que a função exponencial $y = a^x$ goza das propriedades já citadas, para todos os valores reais. De fato,

- $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = \exp(x \ln a + y \ln a) =$
  $\exp(x \ln a).\exp(y \ln a) = e^{x \ln a}.\, e^{y \ln a} = a^x.\, a^y$
- $(a^x)^y = \left(e^{x \ln a}\right)^y = \exp(x \ln a)^y = \exp((x \ln a).\, y) = \exp(xy \ln a) = e^{xy \ln a} = a^{xy}$
- $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = (\exp(x \ln a))' = \exp(x \ln a).\ln a = e^{xy \ln a}.\ln a = a^x \ln a$

De posse dessas informações, definimos a função logarítmica geral, como:

Definição: Dado $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, definimos a função logarítmica na base a por:

$$log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Assumindo que $y = \log_a x$, então por definição temos que $y = \frac{\ln x}{\ln a}$, resultando que $y \ln a = \ln x$. Logo, $a^y = e^{y \ln a} = e^{\ln x} = x$, ou seja, $a^y = x$.

De forma análoga, se $y = a^x$, então $\log_a y = x$.

4.2 Caso dois: como Limite de Sequência

Apresentaremos, agora, um modo alternativo de se verificar as propriedades de uma função exponencial e de se estender a regra de derivação de potências irracionais. Para tanto, vamos considerar um número irracional como limite de uma sequência de números racionais. Essa concepção é possível devido a propriedade da completeza dos reais e pelo fato dos racionais serem densos[8] em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \subset \mathbb{Q} \,|\, x_n \rightarrow t, n \rightarrow +\infty$$

Neste ponto faremos incursões a obra de Richard Courant (1951), pois o autor apresenta de forma diferenciada algumas regras para as funções potência e exponencial (e suas inversas). Assim, partindo de algumas de suas indicações, vamos apresentar e demonstrar resultados sobre essas funções.

Ele estabelece primeiramente, mas sem provar, as propriedades e a continuidade de $a^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, colocando: “Visto que os valores de a^x são densos em qualquer ponto, é natural estender esta função a^x de modo que ela seja contínua

[8] Lembramos que “Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X.” (Lima, 2017, p. 83). Essa caracterização decorre da propriedade Arquimediana, que também é uma consequência da propriedade da completeza dos reais. Maiores detalhes em Lima (2017).

também para os valores irracionais de x, atribuindo a a^x valores contínuos, quando x fôr irracional como os já definidos para x racional" (Courant, 1951, p. 26).

De fato, o autor mostra como definir o expoente na base a de um número irracional α. Para tanto, considera uma sequência de racionais $r_1, r_2, \cdots, r_n$, que convergem para α e mostra que o limite $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ existe e o definimos como a^{α}. Sua demonstração é baseada na caracterização da sequência, que satisfaz ou ainda, que é uma sequência de Cauchy. Relembramos:

Definição: Dizemos que uma sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \in \mathbb{N}\, e\, m, n > n_0$, então $|x_m - x_n| < \epsilon$.

No conjunto dos números reais, toda sequência convergente é de Cauchy e, reciprocamente, toda sequência de Cauchy é convergente. Donde essa importante caracterização.

Essa abordagem é interessante, pois antecipa um fato que muito é utilizado, $y = e^x$ ser contínua, mas que os livros de Análise Real somente apresentam ao final, pois empregam a função exponencial como inversa da logarítmica, que por sua vez é definida como a integral de $1/t$, para integrandos de 1 a x, como exposto anteriormente. O fato de postergar essa conclusão compromete diversos resultados e conexões que podem ser estabelecidas, que dizem respeito aos números reais com os conteúdos da Educação Básica. Como por exemplo, a existência de uma potência tal que e^x = 2. Ou ainda, o que seria e^2?

Mostraremos, agora, que se (r_n) é uma sequência racional que converge para o número irracional α, então $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{a}^{\mathrm{r_n}}$ converge.

Afirmação: Se $\lim_{n\to+\infty} r_n = \alpha$, com $\propto$ irracional, então $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{a}^{\mathrm{r_n}}$ existe.

Vamos dividir a demonstração em dois casos: quando a base for maior do que 1 e quando estiver entre 0 e 1.

Tome $\in > 0$. Como (r_n) é limitada[9] e a exponencial (racional) é monótona, segue que (a^{r_n}) é limitada, logo existe M > 0 tal que

[9] Toda sequência convergente é limitada. Detalhes em Ávila (1999).

$a^{r_n} < M$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, dado o valor $\frac{\in}{M} > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \frac{\in}{M}$$

Como (r_n) converge, então é uma sequência de Cauchy, logo dado $\delta < \frac{1}{n}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_1$, então $|r_n - r_m| = r_n - r_m < \delta < \frac{1}{n}$. Dito, temos que:

$r_n < \frac{1}{n} + r_m$

Acima assumimos que $r_n > r_m$; sem perda de generalidade.

Consideremos $m, n > max\{n_0, n_1\};$; logo para $a > 1$ temos que $a^{r_n} < a^{\frac{1}{n}+r_m}$.: Assim,

$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_n} - a^{r_m} < a^{\frac{1}{n}+r_m} - a^{r_m} < a^{r_m}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = a^{r_m}\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < M.\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$

Seja $0 < a < 1$. Neste caso,

$$r_n < \frac{1}{n} + r_m \Rightarrow a^{r_n} > a^{\frac{1}{n}+r_m} \Rightarrow -a^{r_n} < -a^{\frac{1}{n}+r_m}$$

Assim,

$|a^{r_n} - a^{r_m}| = -(a^{r_n} - a^{r_m}) = -a^{r_n} + a^{r_m} < -a^{\frac{1}{n}+r_m} + a^{r_m} = a^{r_m}\left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right) < M.\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$

Concluímos, portanto, que (a^{r_n}) é uma sequência de Cauchy, logo convergente.

Chamaremos esse limite de a^{α} assim podemos reescrever:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\alpha} \qquad (03)$$

Alguns cuidados à respeito dessa definição são necessários mencionar, pois de uma forma simplista definimos a potência de um expoente irracional por (03), entretanto caberia investigarmos se essa definição independe da sequência de convergência, ou seja, se $r_n \to \alpha$ e $s_n \to \alpha$ com $r_s, s_n \in \mathbb{Q}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, implicaria que $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$, o que de fato ocorre.

Ainda, para verificarmos a continuidade de $y = a^x$; para todo $x \in \mathbb{R}$; para $a > 1$ observamos, primeiramente, que se α e β são números irracionais tais que $\alpha < \beta$ então $a^{\alpha} < a^{\beta}$, pois se $\beta - \alpha = \epsilon > 0$ é possível, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$; tomar sequências de racionais $r_n \to \alpha$ e $s_n \to \beta$ com $r_n < s_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Assim, seguindo um raciocínio análogo ao apresentado acima, já que a^xmantém a monotocidade para todos os números, temos que a função exponencial é contínua. Os demais casos são evidentes, pois se $a = 1$ então por definição $a^x = 1$ e se $0 < a < 1$ então $a^x = ({}^{1}/_{a^x})^{-1}$ com ${}^{1}/_{a} > 1$. Composição de funções contínuas.

A monotocidade de $y = a^x$ estendida para potências irracionais, bem como a sua boa definição, requerem certos cuidados, pois, a rigor, o valor a^{α} trata de classes de equivalências de sequências racionais (sequências de Cauchy). Para provarmos essas desigualdades e que a definição independe do representante, precisaríamos retomar a própria construção do conjunto dos números reais. Ribenboim (2012) apresenta uma construção dos números reais baseada nas sequências de Cauchy e prova os principais resultados sobre a completude dos números reais, limites e funções contínuas[10]. Essa é uma questão de escolha, que acreditamos que neste momento não convém fazê-la, entretanto, podemos sugerir uma incursão aos aspectos históricos desse assunto em

[10]Trata-se de uma boa obra de introdução a Análise Real na qual o leitor encontrará a justificativa precisa de alguns argumentos comentados aqui que, em virtude da natureza desse trabalho, não foram mencionados. Outras obras que podem ser consultados são Monteiro (1971) ou Aragona (2010).

Pasquini[11] que podem levar ao conhecimento sobre tal, ainda que sem o devido rigor para a sua abordagem, mas trazendo a essência das construções.

Com relação as propriedades da exponencial, para o caso de α e β serem números irracionais, temos que:

$$a^{\alpha+\beta} = a^{\lim r_n+s_n} = \lim a^{r_n+s_n} = \lim(a^{r_n}.a^{s_n}) = \lim a^{r_n}.\lim a^{s_n} = a^{\lim r_n}.a^{\lim s_n} = a^{\alpha}.a^{\beta}$$

onde as igualdades se justificam em decorrência de especificidades dos limites e da continuidade de funções. As demais propriedades da função exponencial, aplicadas aos números irracionais, seguem de modo análogo.

Vamos, agora, apresentar uma forma alternativa, proposta por Courant (1951), para se demonstrar a regra geral para a derivação de $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$,, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Para essa argumentação o autor utiliza o processo de integração. Em sua obra, Courant primeiro trabalha com a integral para depois focar na derivada. Essa abordagem é interessante na medida que explora outras perspectivas no modo de se estabelecer o conhecimento. Ademais, ela enfatiza a importância do TFC para formalização de determinados conceitos.

Problema: Demonstrar que $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}, \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Nessa nova abordagem, vamos realizar o cálculo da integral das funções potência, para posteriormente, em posse do TFC, calcular uma expressão para essas derivadas.

Novamente precisamos partir dos casos natural, inteiro e racional para, depois, abordarmos o caso irracional. Começamos com $\alpha \in \mathbb{N}$. Primeiramente, relembramos o clássico caso de potência quadrada (x^2) no intervalo $[0,b]$. Tomamos $a = 0$ para simplificar a expressão. Dividindo o intervalo $0 \leq x \leq b$ em n subintervalos de medida $h = {}^{b}/_{n}$ obtemos que o somatório dos retângulos aproximantes com altura nos extremos direitos, denotado por S, é

$$S = h.(h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + \cdots + n^2h^2)$$

[11]PASQUINI, R. C. G. Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação. 209 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

$S = h^3.(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2), \text{como } h = {}^{b}\!/_{n}$

$S = b^3.\dfrac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$

$S = \dfrac{b^3}{n^3}.\dfrac{1}{6}n(\mathrm{n} + 1)(2\mathrm{n} + 1)$

$S = \dfrac{b^3}{6}.\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)\left(2 + {}^{1}\!/_{n}\right)$

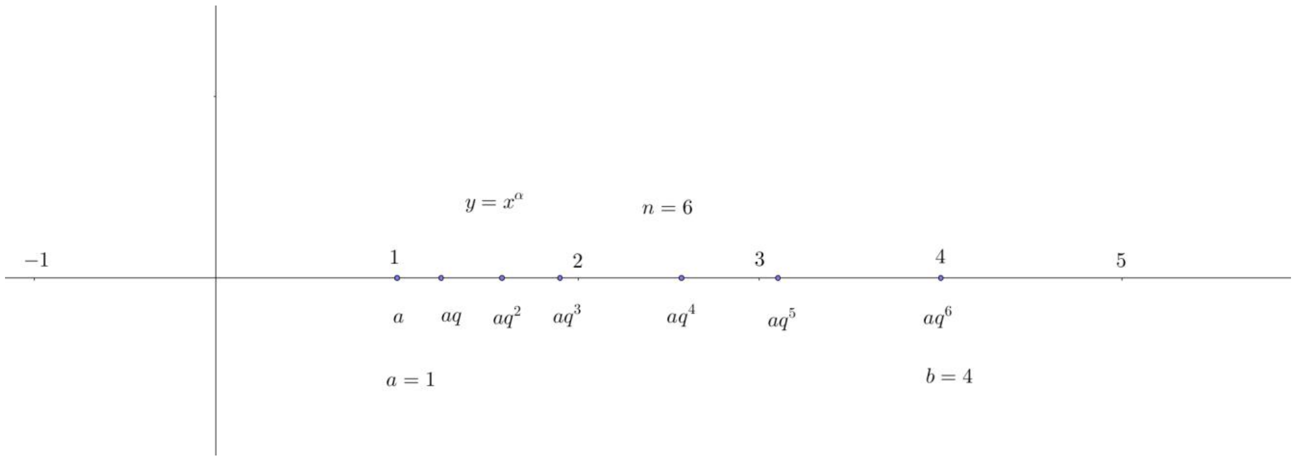
Para $n \to \infty$ temos que $S \to {}^{b^3}\!/_{3}$.

No caso geral de um subintervalo $[a, b]$ vale:

$$\int_a^b x^2dx = \int_0^b x^2dx - \int_0^a x^2dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Para o caso $\alpha \neq 2, \alpha \in \mathbb{N}$, se dividíssemos o intervalo de integração $0 \leq x \leq b$ em partes iguais teríamos dificuldades para estabelecer uma fórmula para substituir $\frac{1}{n^{\alpha+1}}(1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha)$ no somatório dos retângulos aproximantes, inviabilizando o cálculo. Assim, Courant sugere subdividir o intervalo como uma “progressão geométrica”, ou seja, tomamos $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$ e escolhemos os pontos da subdivisão como: a; aq; aq^2; $\cdot$; aq^{n-1}; $aq^n = b$. A Figura (6) exemplifica essa distribuição, para $a = 1$; $b = 4$ e $n = 6$.

Figura 6: Representação dos pontos amostrais



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Logo, a soma dos retângulos aproximantes, cuja altura agora tomaremos no ponto extremo esquerdo dos subintervalos, é dada por

$$S = (aq - a)a^{\alpha} + (aq^2 - aq)(aq)^{\alpha} + (aq^3 - aq^2)(aq^2)^{\alpha} + \cdots + (aq^n - aq^{n-1})(aq^{n-1})^{\alpha}$$
$$S = a^{\alpha+1}\left[(q-1) + (q^2 - q)q^{\alpha} + (q^3 - q^2)q^{2\alpha} + \cdots + (q^n - q^{n-1})q^{(n-1)\alpha}\right]$$
$$S = a^{\alpha+1}\left[(q-1) + (q-1)q^{(\alpha+1)} + (q-1)q^2 q^{2\alpha} + \cdots + (q-1)q^{(n-1)}q^{(n-1)\alpha}\right]$$
$$S = a^{\alpha+1}(q-1)\left[1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right]\text{, e pela equação (2)}$$
$$S = a^{\alpha+1}(q-1)\left(\frac{(q^{\alpha+1})^n - 1}{q^{(\alpha+1)} - 1}\right)$$
$$S = a^{\alpha+1}\left(q^{(\alpha+1)} - 1\right).\frac{(q-1)}{q^{(\alpha+1)} - 1}, \text{de } \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$$
$$S = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).\left(\frac{(q-1)}{q^{(\alpha+1)}-1}\right)\text{, e novamente, da equação (2)}$$
$$S = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).\left(\frac{(q-1)}{(q-1)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{\alpha})}\right), n \to \infty \Rightarrow q \longrightarrow 1$$
$$S \to \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

Agora, consideramos o caso em que $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Assim, $\alpha = \frac{r}{s}, r > 0 \text{ e } s > 0$.

Analogamente, chegamos que a soma S dos retângulos aproximantes é dada por

$$S = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}$$

Basta, portanto, analisarmos o termo do quociente já que a potência agora é com expoente racional e não podemos mais aplicar a fórmula (2) diretamente a essa expressão. Fazendo a mudança de variável $T = q^{1/s}$; então

$$n \to \infty \Rightarrow q \longrightarrow 1 \Rightarrow T \longrightarrow 1.$$

Dessa forma,

$$\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1} = \frac{q-1}{q^{\frac{r+s}{s}} - 1} = \frac{q-1}{\left(q^{1/s}\right)^{(r+s)} - 1} = \frac{T^S - 1}{T^{(r+s)} - 1} = \frac{(T-1)(1 + T + T^2 + \cdots + T^{(s-1)})}{(T-1)(1 + T + T^2 + \cdots + T^{(r+s-1)})}$$

$$\rightarrow \frac{s}{s+r} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Para o caso negativo, se $\alpha \neq -1, \alpha = -\frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{Z}_{+}$, definimos $T = q^{-1/s}$. Então, teremos que

$$T^{-s} = q, q^{\alpha+1} = q^{-\frac{r}{s}+1} = \left(q^{-1/s}\right)^{r}.q = T^{r}.T^{-s} = T^{r-s}$$

Assim, o quociente fica

$$\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \frac{T^{-s}-1}{T^{r-s}-1} = \frac{-\left(1-\frac{1}{T^{s}}\right)}{T^{r-s}-1} = \frac{T^{s}-1}{-T^{s}(T^{r-s}-1)} = \frac{(T-1)(1+T+T^{2}+\cdots+T^{(S-1)})}{-T^{s}(T-1)(1+T+T^{2}+\cdots+T^{(r-S-1)})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{s}{-(r-s)} = \frac{1}{\alpha+1}$$

Com isto concluímos o cálculo do valor da integral de $y = x^{\alpha}$ para os valores racionais de α, com $\alpha \neq -1$, a saber:

$$\int_{a}^{b} x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_{a}^{b} \tag{4}$$

Agora, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos inferir que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right) = x^{\alpha} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha.x^{\alpha-1}.$$

Portanto, provamos, de uma forma pouco usual, as regras para derivação no caso de expoentes racionais. Cabe salientar, nesse ponto, o quão trabalhoso pode ser o cálculo de integrais, mesmo para funções potência, que são “bem comportadas”. Vê-se, dessa forma, a importância de se instrumentalizar tal técnica, o que ocorre com o Teorema Fundamental do Cálculo. Para estender o resultado acima para o caso irracional, Courant (1951) utiliza a definição da potência de expoente irracional x^{α} como o limite de expoentes racionais e, novamente, trabalha com as integrais. Nesse caso faremos uso do seguinte resultado.

Teorema: Se $|f(x)-g(x)|<\epsilon, \forall x \in [a,b]$, então $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| < \epsilon(b-a)$. Ou equivalente:

$$-\epsilon(b-a) + \int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx + \epsilon(b-a).$$

Seja qualquer $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \alpha \neq -1$, logo existe uma sequência (α_n) de valores racionais distintos de -1 que converge para α, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$. Vamos mostrar que a integral $\int_a^b x^\alpha dx, 0 < a < b$, está bem definida e apresentar o seu valor.

Como $\lim_{n\to+\infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, é possível determinar n_0 suficientemente grande de forma que, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, tenhamos $|x^\alpha - x^{\alpha_n}| < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$ e todo $n > n_0$.

De fato, com x^α é monótona temos que x^α está situado entre a^α e b^α, assim, $x^\alpha < a^\alpha + b^\alpha$. Ainda, $1 - x^{\alpha_n}$ está situado entre $1 - a^\alpha$ e $1 - b^\alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} |x^\alpha - x^{\alpha_n}| &= x^\alpha\left|1 - x^{\delta_n}\right|, \delta_n = \alpha_n - \alpha \\ &\leq (a^\alpha + b^\alpha)\left|1 - x^{\delta_n}\right| \\ &\leq (a^\alpha + b^\alpha)\left(\left|1 - a^{\delta_n}\right| + \left|1 - b^{\delta_n}\right|\right) \end{aligned}$$

Como $a^{\delta_n} \to 1$ e $b^{\delta_n} \to 1$, pois se $n \to +\infty$ então $\delta_n \to 0$, segue que $|x^\alpha - x^{\alpha_n}| \to 0$, isto é, para n_0 suficientemente grande, $n > n_0, |x^\alpha - x^{\alpha_n}| < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$.

Logo, pelo teorema anterior, para $f(x) = x^\alpha$ e $g(x) = x^{\alpha_n}$, temos que

$$-\epsilon(b-a) + \int_a^b x^{\alpha_n}dx < \int_a^b x^\alpha dx < \int_a^b x^{\alpha_n}dx + \epsilon(b-a)$$

Resolvendo as integrais das potências racionais x^{α_n},

$$-\epsilon(b-a) + \frac{1}{\alpha_n + 1}(b^{\alpha_n+1} - a^{\alpha_n+1}) < \int_a^b x^\alpha dx < \frac{1}{\alpha_n + 1}(b^{\alpha_n+1} - a^{\alpha_n+1})$$

Para $\epsilon \to 0$ temos que $\alpha_n \to \alpha$. Portanto, segue o resultado para α irracional, ou seja, sua integral coincide com (4). Assim, pelo TFC, segue a fórmula geral de derivação de uma potência x^α, a saber:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha . x^{\alpha-1} \tag{5}$$

5 CONCLUSÃO

Com o trabalho apresentado procuramos evidenciar diferentes perspectivas para trabalhar com a função exponencial e a função logarítmica, no sentido da primazia da definição: estabelecer uma delas para obter a outra como inversa, bem como as funções potência e suas derivadas. As dificuldades no que tangem as potências de expoentes irracionais estão presentes em ambos os processos, pois envolvem as questões da completude dos números reais, e essas dificuldades, cada uma a seu modo, foram superadas conforme a abordagem apresentada no texto acima.

Cabe-nos reforçar que, os resultados obtidos tornaram-se possíveis, circunstancialmente, devido à investigação que realizamos na obra de Richard Courant, que foi essencial, trazendo-nos subsídios para o desenvolvimento das ideias aqui presentes, ao propormos uma apresentação que explorasse integrais de funções potência, através de sua definição por limites, associadas ao conceito de limite de sequências de racionais, que culminaram no resultado (5).

A Figura (7) representa um diagrama que descreve os dois processos percorridos nesse trabalho para se chegar à continuidade da função $y = a^x$ e possui o objetivo de sistematizar as ideias apresentadas nessa exposição.

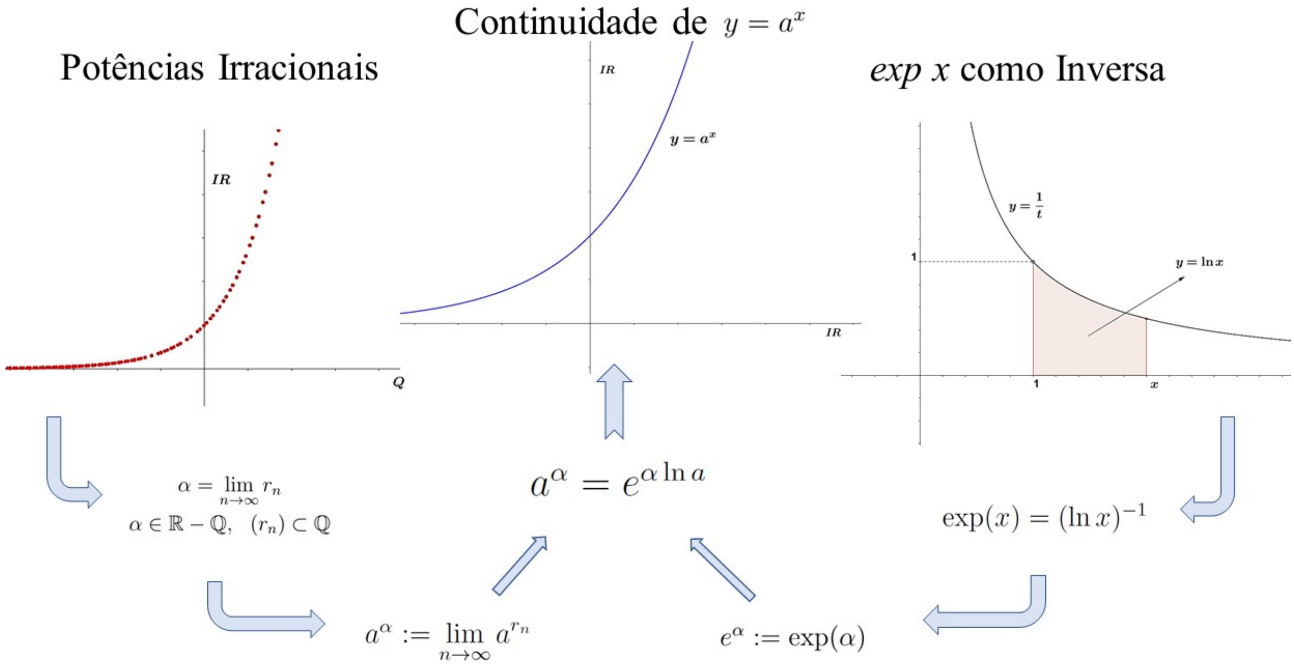
Com isto, acreditamos ter elucidado as questões que guiaram essa investigação: Como suprir lacunas na abordagem das funções exponenciais de forma a tornar possível apresentarmos uma demonstração para a continuidade das funções exponenciais para acadêmicos dos cursos de Licenciatura em

Matemática? E ainda, como generalizar a regra de derivação das funções potência para o caso de expoente irracional?, pois assumindo o "caso um" os acadêmicos confrontam-se com uma teoria robusta - técnicas do Cálculo Diferencial e Integral - que lhes confirma o resultado ora citado. Por outro lado, as colocações expostas no "caso dois" permitem uma maior aproximação entre o conhecimento que os alunos já possuem sobre potências de expoentes racionais e o rigor necessário para se estabelecer uma 'boa definição' para potências de expoentes irracionais para, a partir dessa, prosseguir com a demonstração dos resultados. Esse embate, de diferentes técnicas, possibilita um repensar dos conceitos, permitindo que surjam reflexões acerca de conhecimentos prévios que esses estudantes possuem de forma a construírem novos conhecimentos acerca dos expoentes irracionais e seus desdobramentos.

De fato, apresentar de antemão a função logarítmica como a integral da hipérbole, nos integrando de 1 a x, para posteriormente definir a função exponencial como sua inversa, nos parece uma boa e elegante saída, na medida que as ferramentas do Cálculo asseguram a continuidade e diversas outras propriedades para essas aplicações, inclusive uma extensão plausível para as potências de expoentes irracionais.

Por outro lado, pelo conhecimento que os alunos já possuem da função exponencial e da logarítmica como sua inversa, retomar as definições de potências com expoentes básicos (naturais, inteiros e racionais) para, na sequência, explorar a interpretação para expoentes irracionais pode gerar um aprendizado muito significativo. Além disso, examina uma perspectiva pouco vista nos cursos de Cálculo ou Análise Real, quando aplica o Teorema Fundamental do Cálculo para apresentar uma antiderivada à um limite já calculado. Isso reforça a importância de tal resultado quando esse instrumentaliza processos de limites longos e, por vezes, tediosos.

Figura 7: Continuidade de $y = a^x$



Fonte: acervo particular dos autores (2021).

Além disso, as dificuldades com as potências extrapolam, inclusive, aquelas que envolvem expoentes irracionais, pois muitas vezes os acadêmicos não conseguem compreender o significado das potências irracionais dos valores $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ ou π^2, como exemplo, já que o problema não está necessariamente na definição dessas expressões, pois $\pi^2 = \pi \cdot \pi$, mas a que ponto da reta real corresponde este valor? Ou, qual seria uma "boa" estimativa para esse número? Assim, procuramos rediscutir fatos que trazem àtona questões delicadas da teoria, buscando emergir questionamentos sobre a estrutura do conjunto dos números reais. Dessa forma, esperamos que as ideias aqui apresentadas ofereçam persperctivas para o ensino da temática tratada em nível superior.

REFERÊNCIAS

Aragona, J. (2010). Números Reais, 1º edn. Livraria da Física.

Avila, G. (1999). Introdução a Análise Matemática, 1º edn. Blücher.

Broetto, G. C. (2019). O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? Bolema, 33, 728–747.

Courant, R. (1951). Cálculo Diferencial e Integral, 1º edn. Globo.

Courant, R., Robbins, H. (2000). O que é a Matemática?, 1º edn. Ciência Moderna.

Dante, L. R. (2013). Matemática: contexto e aplicações, 2º edn. Ática.

Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., Kennedy, D. (2009). Pré-Cálculo, 1º edn. Addison Wesley.

Figueiredo, D. G. (2013). Análise, 1º edn. LTC.

Gil, A. C. (2008). Métodos e Técnicas de Pesquisa Social, 6º edn. Atlas.

Guidorizzi, H. L. (2008). Um curso de Cálculo, 5º edn. LTC.

Iezzi, G., Dolce, O., Murakami, C. (2013). Fundamentos da Matemática Elementar, 2, Logaritmos, 10º edn. Atual.

Leithold, L. (1994). O cálculo com geometria analítica, 3º edn. Harbra.

Lima, E. L. (2017). Curso de Análise, 14º edn. IMPA.

Lima, E. L., Carvalho, P., Wagner, E., Morgado, A. (2006). A Matemática do Ensino Médio. Volume 1., 1º edn. SBM.

Medeiros, V. Z., Caldeira, A. M., Silva, L. M. O., Machado, M. A. S. (2006). Pré-Cálculo, 1º edn. Pioneira Thomson Learning.

Monteiro, J. (1971). Elementos de Álgebra, 1º edn. Ao Livro Técnico.

Moreira, P. C., Vianna, C. R. (2016). Por que análise real na licenciatura?: um paralelo entre as visões de educadores matemáticos e de matemáticos. Bolema, 30, 515–534.

Oliveira, M. M. (2014). Como fazer pesquisa qualitativa, 6º edn. Vozes.

Ribenboim, P. (2012). Funções, limites e continuidade, 1º edn. SBM.

Silva, P. L. D. d., Spolaor, S. d. L. G. (2015). Um irracional: o número de euler. Ciência e Natura, 37(7), 89–94.

Souza, J. R. d., Garcia, J. R. d. S. (2016). Contato Matemática, 1º edn. FTD.

Stewart, J. (2013). Cálculo, 7º edn. Cengage Learning.

Swokowski, E. (1994). Cálculo com geometria analítica, 2º edn. Makron Books.

Thomas, G. B. (2002). Cálculo, 10º edn. Addison Wesley.

Contribuição de autoria

1 – Kelly Roberta Mazzutti Lübeck

Professora do Centro de Engenharias e Ciências Exatas, Doutora em Matemática
https://orcid.org/0000-0003-4787-1279 • kelly.lubeck@unioeste.br
Contribuição: Conceituação, Escrita, Revisão e Edição.

2 – Regina Célia Guapo Pasquini

Professora do Centro de Ciências Exatas, Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-5058-7036 • rcgpasq@uel.br
Contribuição: Conceituação, Escrita, Revisão e Edição.

Como citar este artigo

Lübeck, Kelly Roberta Mazzutti; Pasquini, Regina Célia Guapo. Potências Irracionais: perspectivas para o Ensino Superior. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 43, e95, 2021. DOI 10.5902/2179460X65837. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X65837.