UFSM

CIÊNCIA e NATURA

ISSN 2179-460X
Acesso aberto

Ci. e Nat., Santa Maria, v. 43, e89, 2021 • https://doi.org/10.5902/2179460X64802
Submissão: 16/03/2021 • Aprovação: 21/09/2021 • Publicação: 19/10/2021

Matemática

As relações recorrentes *n*-dimensionais de Leonardo

Leonardo's *n*-dimensional recurring relationships

Renata Passos Machado Vieira[I], Milena Carolina dos Santos Mangueira[I], Francisco Regis Vieira Alves[I], Paula Maria Machado Cruz Catarino[II]

[I] Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
[II] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal

RESUMO

A sequência de Leonardo é uma sequência pouco conhecida, porém apresenta semelhanças com a sequência de Fibonacci. Com isso, este trabalho apresenta uma discussão referente às relações recorrentes n-dimensionais, com base no modelo recursivo unidimensional $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, $\forall n \geq 2$, com $Le_0 = Le_1 = 1$ sendo os seus termos iniciais. A partir do processo de complexificação da sequência de Leonardo, são introduzidas definições dos números de Leonardo tridimensionais e mais geralmente, *n*-dimensionais, naturalmente que partindo duma definição dos números de Leonardo bidimensionais já existente. Com base nisso, foi possível realizar um estudo em torno das propriedades matemáticas dos números bidimensionais (Le(n,m)), tridimensionais (Le(n,m,p)) e n-dimensionais ($Le(n_0,n_1,n_2,n_3, \cdots, n_n)$) de Leonardo, permitindo-nos explorar propriedades e sua extensão para os inteiros.

Palavras-chave: complexificação, relações n-dimensionais, sequência de Leonardo

ABSTRACT

Leonardo´s sequence is a not very well known sequence with similarities with the Fibonacci sequence. Thus, this work presents a discussion regarding the recurrent n-dimensional relations, based on the one-dimensional recursive model $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, $\forall n \geq 2$, with $Le_0 = Le_1 = 1$ being initial terms. From the process of complexification of the Leonardo sequence, definitions of the numbers of Leonardo three-dimensional and more generally, n-dimensional, naturally starting from a definition of the existing two-dimensional Leonardo numbers. Based on this, it was possible to carry out a study on the mathematical properties of the two-dimensional (Le(n,m)), three-dimensional (Le(n,m,p)) and n-dimensional Leonardo numbers ($Le(n_0,n_1,n_2,n_3, \cdots, n_n)$), allowing us to explore properties and their extension to integers.

Keywords: complexification, n-dimensional relations, Leonardo sequence.

1 INTRODUÇÃO

Historicamente não se sabe a origem da sequência de Leonardo, devido à escassez de pesquisas referentes a essa sequência, porém Alves *et al*. (2020) conjecturem que esses números foram estudados por Leonardo de Pisa (1180-1250), não tendo sido esta conjectura comprovada em nenhum trabalho. Esta sequência linear e de segunda ordem foi estudada nos trabalhos de Catarino e Borges (2019); Vieira *et al*. (2019); Shannon (2019); Vieira *et al*. (2020), nos quais estes números são apresentados a partir da relação de recorrência $\mathrm{Le}_n = \mathrm{Le}_{n-1} + \mathrm{Le}_{n-2} + 1, \forall n \geq 2$, sendo $\mathrm{Le}_0 = \mathrm{Le}_1 = 1$ seus termos iniciais. Catarino e Borges (2019) apresentam uma outra relação a que satisfazem os números de Leonardo, seja ela: $\mathrm{Le}_{n+1} = 2\mathrm{Le}_n - \mathrm{Le}_{n-2}, \forall n \geq 2$, mantendo os termos iniciais. Assim os primeiros termos desta sequência são:

$$1,1,3,5,9,15,25,41,67,109,177,287,465\ldots$$

A equação característica dessa sequência é descrita por: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, em que apresentam três raízes reais, sendo uma igual a 1 e as outras duas iguais às raízes da equação característica de da sequência de Fibonacci, $1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. E ainda, esta sequência apresenta uma relação com os números de Fibonacci, seja ela: $Le_n = 2F_{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$, isolando F_{n+1}, tem-se $F_{n+1} = \frac{Le_n+1}{2}$.

Por outro lado, o processo de complexificação da sequência de Leonardo é baseado nos artigos de Harman (1981); Oliveira *et al*. (2017); Vieira *et al*. (2019), a qual consiste na inserção da unidade imaginária, no aumento dimensional e sua correspondente representação algébrica. Dessa forma, neste trabalho, serão discutidos aspectos referentes as relações recorrentes n-dimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional, bidimensional e tridimensional de Leonardo.

2 AS RELAÇÕES RECORRENTES BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS DE LEONARDO

A partir da recorrência unidimensional de Leonardo, nesta seção, serão apresentados as relações bidimensionais e tridimensionais de Leonardo baseado nos trabalhos de Harman (1981); Oliveira *et al*. (2017); Vieira *et al*. (2019). Será realizado o aumento de dimensionalidade e a inserção das unidades imaginárias *i* e *j*.

A partir da definição da sequência de Leonardo Bidimensional no trabalho de Vieira et al. (2019), com os valores iniciais definidos como:

$\mathrm{Le}(0{,}0) = 1$, $\mathrm{Le}(1{,}0) = 1$, $\mathrm{Le}(0{,}1) = 1 + \mathrm{i}$, $\mathrm{Le}(1{,}1) = 1 + \mathrm{i}$, em que $\mathrm{i}^2 = -1$ e $\mathrm{Le}(-1) = -1$, $\mathrm{Le}(0) = \mathrm{Le}(1) = 1$, $\mathrm{Le}(2) = 3$.

São apresentados os números na forma $\mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m})$, com $\mathrm{n}, \mathrm{m} \in \mathbb{N}$, satisfazendo as relações:

$$\mathrm{Le}(\mathrm{n}+1{,}\mathrm{m}) = 2\mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m}) - \mathrm{Le}(\mathrm{n}-2{,}\mathrm{m}),$$
$$\mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m}+1) = 2\mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m}) - \mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m}-2).$$

Dessa forma, tem-se a relação bidimensional, apresentada no teorema abaixo.

Teorema 2.1

Para os números inteiros, $\mathrm{n{,}m} \in \mathbb{N}$, os termos da sequência de Leonardo bidimensionais na forma $\mathrm{Le}(\mathrm{n{,}m})$, são descritos por Vieira *et al*. (2019):

$$Le(n,m) = \left(Le(n)\frac{Le(m)+1}{2} + \frac{Le(m)+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{Le(n)+1}{2}\right)\left(\frac{Le(m-1)+1}{2}\right)i$$

Demonstração

A demonstração pode ser verificada no trabalho de Vieira *et al*. (2019).

Com isso, a partir do trabalho de Vieira *et al*. (2019), é possível reescrever a fórmula bidimensional. Assim, dada a relação $F(n+1) = \frac{Le(n)+1}{2}$, pode-se substituir na relação do Teorema 2.1, obtendo:

$$Le(n,m) = \left(Le(n)\frac{Le(m)+1}{2} + \frac{Le(m)+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{Le(n)+1}{2}\right)\left(\frac{Le(m-1)+1}{2}\right)i$$

$$= (Le(n)F(m+1) + F(m+1) - 1) + F(n+1)F(m)i$$

E ainda, para as relações tridimensionais de Leonardo, é possível apresentar os seus números tridimensionais, sendo eles:

$\mathrm{Le}(0,0,0) = 1 = \mathrm{Le}(0),$

$\mathrm{Le}(1,0,0) = 1 = \mathrm{Le}(1),$

$\mathrm{Le}(0,1,0) = 1 + \mathrm{i},$

$\mathrm{Le}(0,0,1) = 1 + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(1,1,1) = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(0,1,1) = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(1,0,1) = 1 + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(1,1,0) = 1 + \mathrm{i},$

em que $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$, formando os números na forma $\mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p})$ satisfazendo às seguintes condições tridimensionais de recorrência, em que $\mathrm{n,m,p} \geq 0$:

$$\begin{cases} \mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p}) = 2\mathrm{Le}(\mathrm{n}-1,\mathrm{m,p}) - \mathrm{Le}(\mathrm{n}-3,\mathrm{m,p}) \\ \mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p}) = 2\mathrm{Le}(\mathrm{n,m}-1,\mathrm{p}) - \mathrm{Le}(\mathrm{n,m}-3,\mathrm{p}) \\ \mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p}) = 2\mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p}-1) - \mathrm{Le}(\mathrm{n,m,p}-3) \end{cases}$$

Para tanto, tem-se o cálculo dos termos:

$\mathrm{Le}(0,1,2) = \mathrm{Le}(0,1,1) + \mathrm{Le}(0,1,0) + 1 = (1 + \mathrm{i} + \mathrm{j}) + (1 + \mathrm{i}) + 1 = 3 + 2\mathrm{i} + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(0,0,2) = \mathrm{Le}(0,0,1) + \mathrm{Le}(0,0,0) + 1 = (1 + \mathrm{j}) + (1) + 1 = 3 + \mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(0,2,2) = \mathrm{Le}(0,1,2) + \mathrm{Le}(0,0,2) + 1 = (3 + 2\mathrm{i} + \mathrm{j}) + (3 + \mathrm{j}) + 1 = 7 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{j},$

$\mathrm{Le}(0,2,0) = \mathrm{Le}(0,1,0) + \mathrm{Le}(0,0,0) + 1 = (1 + \mathrm{i}) + (1) + 1 = 3 + \mathrm{i}.$

Com isso, tem-se:

Teorema 2.2

Para os três inteiros, n,m,p ∈ N, os números na forma Le(n,m,p) são descritos por:

$$Le(n,m,p) = F(n+1)F(m+1)Le(p) + [F(n+1)F(m-1)\left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{F(n-1)+Le(n-1)}{2}\right)F(n-1)] + F(n+1)F(m)F(p+1)i$$
$$+F(n+1)F(m+1)F(p)j.$$

Demonstração.

Assim, para n = 0 e m = 2, tem-se que:

$$\mathrm{Le}(0,2,3) = 2\mathrm{Le}(0,2,2) - \mathrm{Le}(0,2,0) = 11 + 3i + 4j = 2\mathrm{Le}(3) + 1 + \mathrm{F}(4)i + 2\mathrm{F}(3)j;$$
$$\mathrm{Le}(0,2,4) = 2\mathrm{Le}(0,2,3) - \mathrm{Le}(0,2,1) = 19 + 5i + 6j = 2\mathrm{Le}(4) + 1 + \mathrm{F}(5)i + 2\mathrm{F}(4)j;$$
$$\mathrm{Le}(0,2,5) = 2\mathrm{Le}(0,2,4) - \mathrm{Le}(0,2,2) = 31 + 8i + 10j = 2\mathrm{Le}(5) + 1 + \mathrm{F}(6)i + 2\mathrm{F}(5)j;$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{Le}(0,2,p-3) = 2\mathrm{Le}(0,2,p-4) - \mathrm{Le}(0,2,p-6) = 2\mathrm{Le}(p-3) + 1 + \mathrm{F}(p-2)i + 2\mathrm{F}(p-3)j;$$
$$\mathrm{Le}(0,2,p-2) = 2\mathrm{Le}(0,2,p-3) - \mathrm{Le}(0,2,p-5) = 2\mathrm{Le}(p-2) + 1 + \mathrm{F}(p-1)i + 2\mathrm{F}(p-2)j;$$
$$\mathrm{Le}(0,2,p-1) = 2\mathrm{Le}(0,2,p-2) - \mathrm{Le}(0,2,p-4) = 2\mathrm{Le}(p-1) + 1 + \mathrm{F}(p)i + 2\mathrm{F}(p-1)j;$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Le}(0,2,p) &= 2\mathrm{Le}(0,2,p-1) - \mathrm{Le}(0,2,p-3)\\ &= 4\mathrm{Le}(p-1) + 2 + 2\mathrm{F}(p)i + 4\mathrm{F}(p-1)j\\ &\quad - 2\mathrm{Le}(p-3) - 1 - \mathrm{F}(p-2)i - 2\mathrm{F}(p-3)j\\ &= 2\mathrm{Le}(p) + 1 + \mathrm{F}(p+1)i + 2\mathrm{F}(p)j\end{aligned}$$
$$2\mathrm{Le}(p) + 1 + \mathrm{F}(p+1)i + \mathrm{F}(1)\mathrm{F}(3)\mathrm{F}(p)j$$

Ademais, tem-se outras propriedades inerentes à este processo, para m = 1,2,3, . . . ,k, obtendo:

$$\mathrm{Le}(0,1,p) = F(2)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(0) + Le(0)}{2}\right)F(0) + F(1)F(p+1)i + F(2)F(p)j;$$

$$\mathrm{Le}(0,2,p) = F(3)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(1) + Le(1)}{2}\right)F(1) + F(2)F(p+1)i + F(3)F(p)j;$$

$$\mathrm{Le}(0,3,p) = F(4)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(2) + Le(2)}{2}\right)F(2) + F(3)F(p+1)i + F(4)F(p)j;$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Le}(0,k-3,p) &= 2\mathrm{Le}(0,k-4,p) - \mathrm{Le}(0,k-6,p)\\ &= F(k-2)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-4) + Le(k-4}{2}\right)F(k-4) + (F(k-3)F(p+1))i\\ &\quad + (F(1)F(k-2)F(p))j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Le}(0,k-2,p) &= 2\mathrm{Le}(0,k-3,p) - \mathrm{Le}(0,k-5,p)\\ &= F(k-1)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-3) + Le(k-3)}{2}\right)\\ &\quad F(k-3) + (F(k-2)F(p+1))i + (F(k-1)F(p))j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Le}(0,k-1,p) &= 2\mathrm{Le}(0,k-2,p) - \mathrm{Le}(0,k-4,p)\\ &= F(k)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-2) + Le(k-2)}{2}\right)F(k-2) + (F(k-1)\\ &\quad F(p+1))i + (F(1)F(k)F(p))j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Le}(0,k,p) &= 2\mathrm{Le}(0,k-1,p) - \mathrm{Le}(0,k-3,p)\\ &= 2\left(F(k)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-2) + Le(k-2)}{2}\right)F(k-2)\right) + (F(k-1)F(p+1))i\\ &\quad + (F(1)F(k)F(p))j - \left(F(k-2)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-4) + Le(k-4)}{2}\right)F(k-4)\right.\\ &\quad \left. + (F(k-3)F(p+1))i + (F(1)F(k-2)F(p))j\right)\\ &= F(k+1)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(k-1) + Le(k-1)}{2}\right)F(k-1)) + (F(k)F(p+1))i\\ &\quad + (F(k+1)F(p))j.\end{aligned}$$

Com isso, prova-se a veracidade do Teorema, por meio da sua aplicação para $\mathrm{n} = 0,1,2,3, \ldots, \mathrm{k}$, na situação apresentada a seguir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Le}(0,\mathrm{m},\mathrm{p}) = {} & \mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{Le}(\mathrm{p}) + \left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)\mathrm{F}(\mathrm{m}-1) + \mathrm{F}(\mathrm{m})\mathrm{F}(\mathrm{p}+1)\mathrm{i} \\
& + \mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{F}(\mathrm{p})\mathrm{j}; \\
\mathrm{Le}(1,\mathrm{m},\mathrm{p}) = {} & \mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{Le}(\mathrm{p}) + \left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)\mathrm{F}(\mathrm{m}-1) + \mathrm{F}(\mathrm{m})\mathrm{F}(\mathrm{p}+1)\mathrm{i} \\
& + \mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{F}(\mathrm{p})\mathrm{j}; \\
\mathrm{Le}(2,\mathrm{m},\mathrm{p}) = {} & 2\mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{Le}(\mathrm{p}) + 2\left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)\mathrm{F}(\mathrm{m}-1) + 2\mathrm{F}(\mathrm{m})\mathrm{F}(\mathrm{p}+1)\mathrm{i} \\
& + 2\mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{F}(\mathrm{p})\mathrm{j}; \\
& \qquad \ldots \\
\mathrm{Le}(\mathrm{n},\mathrm{m},\mathrm{p}) = {} & \mathrm{F}(\mathrm{n}+1)\mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{Le}(\mathrm{p}) + [\mathrm{F}(\mathrm{n}+1)\mathrm{F}(\mathrm{m}-1)\left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right) + \\
& \left(\frac{F(n-1)+Le(n-1)}{2}\right)\mathrm{F}(\mathrm{n}-1)] + \mathrm{F}(\mathrm{n}+1)\mathrm{F}(\mathrm{m})\mathrm{F}(\mathrm{p}+1)\mathrm{i} \\
& + \mathrm{F}(\mathrm{n}+1)\mathrm{F}(\mathrm{m}+1)\mathrm{F}(\mathrm{p})\mathrm{j}.
\end{aligned}
$$

3 AS RELAÇÕES RECORRENTES *N*-DIMENSIONAIS DE LEONARDO

Com base nos trabalhos de Harman (1981); Oliveira (2017), nesta seção serão introduzidas a notação e relações recorrentes *n*-dimensionais de Leonardo, definindo assim uma expressão generalizada em que n representa o número de variáveis.

Teorema 3.1

Sendo $Le(n_0, n_1, n_2, \dots, n_n)$ os números na forma n-dimensional de Leonardo, com $n \in N$ e as unidades imaginárias representadas por $\mu_1 = i, \mu_2 = j, \dots, \mu_n$. Dessa forma, esses são dados por:

$$\begin{aligned} Le(n_0, n_1, n_2, \dots, n_n) = {} & F(n_0+1)F(n_1+1)\dots Le(n_n) \\ & + F(n_0-1)\left(\frac{F(n_0-1)+Le(n_0-1)}{2}\right) \\ & + F(n_0+1)F(n_1-1)\left(\frac{F(n_1-1)+Le(n_1-1)}{2}\right) \\ & + \dots + F(n_{n-1}+1)F(n_n-1)\left(\frac{F(n_n-1)+Le(n_n-1)}{2}\right) \\ & + F(n_0+1)F(n_1)F(n_2+1)\dots F(n_n+1)\mu_1 \\ & + F(n_0+1)F(n_1+1)F(n_2)\dots F(n_n+1)\mu_2 \\ & + F(n_0+1)F(n_1+1)F(n_2+1)\dots F(n_n)\mu_n \end{aligned}$$

Demonstração

Dessa forma, já foram demonstradas que as relações bidimensionais e tridimensionais são válidas, pode-se verificar pelo processo indutivo:

$$\mathrm{Le}(n,m) = \mathrm{F}(n+1)\mathrm{Le}(m) + \left(\frac{F(n-1)+Le(n-1)}{2}\right)\mathrm{F}(n-1) + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m)\mu_1;$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Le}(n,m,p) = {} & \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m+1)\mathrm{Le}(p) + \left(\frac{F(n-1)+Le(n-1)}{2}\right)\mathrm{F}(n-1) \\ & + \left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)\mathrm{F}(m-1)\mathrm{F}(n+1) + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m)\mathrm{F}(p+1)\mu_1 \\ & + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m+1)\mathrm{F}(p)\mu_2; \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Le}(n,m,p,q) = {} & \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m+1)\mathrm{F}(p+1)\mathrm{Le}(q) + \left(\frac{F(n-1)+Le(n-1)}{2}\right)\mathrm{F}(n-1) \\ & + \left(\frac{F(m-1)+Le(m-1)}{2}\right)\mathrm{F}(m-1)\mathrm{F}(n+1) \\ & + \left(\frac{F(p-1)+Le(p-1)}{2}\right)\mathrm{F}(p-1)\mathrm{F}(m+1) \\ & + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m)\mathrm{F}(p+1)\mathrm{F}(q+1)\mu_1 \\ & + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m+1)\mathrm{F}(p)\mathrm{F}(q+1)\mu_2 \\ & + \mathrm{F}(n+1)\mathrm{F}(m+1)\mathrm{F}(p+1)\mathrm{F}(q)\mu_2. \end{aligned}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
Le(n_0, n_1, n_2, \dots, n_n) = {} & F(n_0+1)F(n_1+1)\dots Le(n_n) \\
& + F(n_0-1)\left(\frac{F(n_0-1+Le(n_0-1)}{2}\right) \\
& + F(n_0+1)F(n_1-1)\left(\frac{F(n_1-1)+Le(n_1-1)}{2}\right) \\
& + \cdots + F(n_{n-1}+1)F(n_n-1)\left(\frac{F(n_n-1)+Le(n_n-1)}{2}\right) \\
& + F(n_0+1)F(n_1)F(n_2+1)\dots F(n_n+1)\mu_1 \\
& + F(n_0+1)F(n_1+1)F(n_2)\dots F(n_n+1)\mu_2 \\
& + F(n_0+1)F(n_1+1)F(n_2+1)\dots F(n_n)\mu_n
\end{aligned}
$$

4 CONCLUSÃO

Com o intuito de realizar a extensão dos termos da Sequência de Leonardo para uma dimensão complexa, neste trabalho, foram apresentadas e explanadas as relações recursivas dos casos bidimensionais e tridimensionais desta sequência. E ainda, por meio indutivo, foi apresentado a relação n-dimensional da sequência de Leonardo com o intuito de estudar aspectos sobre a complexificação do modelo de Leonardo, desenvolvendo propriedades matemáticas em torno desses números complexificados.

Ressalta-se que foi possível revisitar a relação bidimensional dessa sequência que foi apresentada por Vieira *et al*. (2019) e tem-se o intuito de dar continuidade em estudos desse tipo de sequências, explorando novas identidades, propriedades, teoremas e até algumas aplicações no domínio da ciência.

AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq. A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por

Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

REFERÊNCIAS

Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Catarino, P. M., Mangueira, M. C. S. (2020). Teaching recurrent sequences in brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocensia**, 13(1), 87–104.

Catarino, P., Borges, A. (2019). On Leonardo numbers. **Mathematica Universitatis Comenianae**, 89(1), 75–86.

Harman, C. J. (1981). Complex Fibonacci numbers. **Fibonacci Quarterly**, 19(1), 82–86.

Oliveira, R., Alves, F., Paiva, R. (2017). Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **C Q D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 11, 91–106.

Oliveira, R. d. (2017). **Engenharia didática sobre o modelo de complexicação da sequência generalizada de Fibonacci**: Relações Recorrentes n-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais. Dissertação de Mestrado, Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.

Shannon, A. G. (2019). A note on generalized Leonardo numbers. **Note on Number Theory and Discrete Mathematics**, 25(3), 97–101.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., Catarino, P. M. (2019). Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, 4(2), 156–173.

Vieira, R. P. M., Mangueira, M. C. d. S., Alves, F. R. V., Catarino, P. M. M. C. (2020). A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, 42, 1–13.

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA

1 - Renata Passos Machado Vieira
Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática, Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará
https://orcid.org/0000-0002-1966-7097 - re.passosm@gmail.com
Contribuição: Conceitualização, Análise Formal, Investigação, Metodologia, Escrita - Revisão e Edição

2 – Milena Carolina dos Santos Mangueira
Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática, bolsista pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Departamento de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará https://orcid.org/0000-0002-4446-155X - milenacarolina24@gmail.com
Contribuição: Conceitualização, Análise Formal, Investigação, Escrita – Revisão e Edição

3 – Francisco Regis Vieira Alves
Doutor em ensino de Matemática, bolsista de Produtividade do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq – PQ2, Professor do Doutorado em Associação em Rede de Pós-Graduação em Ensino (RENOEN), Departamento de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561 - fregiis@ifce.edu.br
Contribuição: Conceitualização, Análise Formal, Investigação, Escrita – Revisão e Edição

4 – Paula Maria Machado Cruz Catarino
Doutora em Matemática, Professora Associado da UTAD, Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal
https://orcid.org/0000-0001-6917-5093 - pcatariino23@gmail.com
Contribuição: Contribuição: Conceitualização, Análise Formal, Investigação, Escrita – Revisão e Edição

Como citar este artigo

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. S.; ALVES, F. R. V. A.; CATARINO, P. M. M. C.. As relações recorrentes *n*-dimensionais de Leonardo. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 43, 89x, p. 01-11, 2021. DOI 10.5902/2179460X64802. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X64802. Acesso em: dia mês abreviado. ano.