

Resolução de análise nodal com auxílio de Métodos Numéricos

Resolution of nodal analysis with support of Numerical Methods

Caison Rodrigues Ramos¹, Bruno Pereira Nascimento² e Aline Brum Loreto³

¹Universidade Federal de Santa Maria, Cachoeira do Sul, Brasil
caisonrr@hotmail.com

²Universidade Federal de Santa Maria, Cachoeira do Sul, Brasil
bruinonasc@outlook.com

³Universidade Federal de Santa Maria, Cachoeira do Sul, Brasil
aline.loreto@ufsm.br

Resumo

Usualmente para o conhecimento das tensões nos circuitos elétricos é utilizada a análise nodal. A análise nodal é baseada na Lei de Correntes de Kirchoff e Lei de Ohm, onde se determina a diferença de potencial entre nós em um circuito elétrico. Cada nó produz uma equação, formando assim, um sistema de equações que pode ser resolvido por métodos numéricos. Este trabalho tem por objetivo realizar a análise nodal de um circuito base com auxílio dos métodos numéricos Eliminação de Gauss, Fatoração LU, Fatoração QR e Método de Crout para a solução dos sistemas lineares. Todos os métodos numéricos foram implementados em linguagem de programação C e a análise da exatidão dos resultados deu-se através do erro relativo em comparação com os resultados obtidos pelo software MatLab. Para tal processo, foi utilizado um circuito base que na sua análise nodal gerou um sistema linear de sete equações e sete incógnitas. Após a conclusão, foi possível presumir que o desenvolvimento do trabalho proporcionou a aplicação e programação de métodos numéricos para solução de sistemas lineares em problemas da Engenharia Elétrica, apresentando soluções tão exatas quanto às obtidas por softwares comerciais matemáticos.

Palavras-chave: Circuitos elétricos; Análise nodal; Métodos numéricos

Abstract

Usually for the knowledge of the voltages in the electrical circuits it is used the nodal analysis. The nodal analysis is based on Kirchoff's Law of Currents and Ohm's Law, where we determine the potential difference between nodes in an electric circuit. Each node produces an equation, thus forming a system of equations that can be solved by numerical methods. This work aims to perform the nodal analysis of a base circuit using the numerical methods Gauss Elimination, LU Factoration, QR Factoration and Crout Method for the solution of linear systems. All numerical methods were implemented in C programming language and the analysis of the accuracy of the results was given by the relative error in comparison to the results obtained by MatLab software. For this process, a base circuit was used that in its nodal analysis generated a linear system of seven equations and seven unknowns. After the conclusion, it was possible to assume that the development of the work provided the application and programming of numerical methods for solution of linear systems in Problems of Electrical Engineering, presenting solutions as exact as those obtained by commercial mathematical software.

Keywords: Electric circuits; Nodal analysis; Numerical methods

1 Introdução

Há uma variedade gigantesca de dispositivos que utilizam circuitos eletrônicos, sendo estes aplicados em diversas áreas: computadores, transmissões de rádio e TV, automação e instrumentação. Uma das maneiras de se realizar a análise destes circuitos, que são vitais nos dias de hoje, é a análise nodal.

A análise nodal é baseada na Lei de Correntes de Kirchoff onde se determina a diferença de potencial (tensão) entre nós em um circuito elétrico. Cada nó presente no circuito produz uma equação, formando assim, um sistema de equações (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Tais sistemas podem ser resolvidos a partir de métodos numéricos, com sua precisão e rapidez de cálculo podendo ser aumentadas com o auxílio de ferramentas computacionais.

Este trabalho tem o objetivo de realizar a análise nodal de um circuito com auxílio de métodos numéricos realizados em matemática real (aritmética e sistemas reais), verificando a ocorrência de maior exatidão nos resultados obtidos; e produzir códigos de programas computacionais livres que sejam capazes de ter resultados precisos.

Para tal, utilizam-se os métodos de Eliminação de Gauss, com e sem refinamento; Fatoração LU, Fatoração QR e Crout. Sendo estes, programados a partir da linguagem de programação C. Os resultados produzidos foram comparados com o software MatLab, possibilitando assim a comparação e o cálculo do erro relativo dos métodos.

2 Referencial Teórico

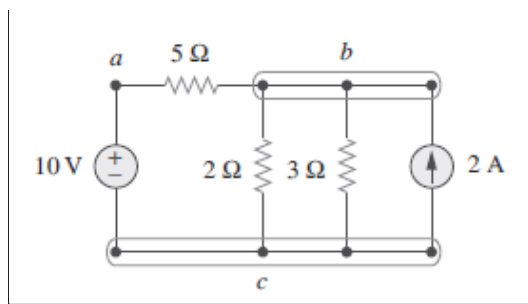
2.1. Circuitos Elétricos

Segundo Alexander e Sadiku (2013), a palavra circuito nos remete a um caminho fechado onde o fim é também o começo. O termo circuito elétrico é explicado como sendo um ou mais caminhos fechados em que se percorre a corrente elétrica, sendo assim, uma interconexão de aparatos elétricos. Tais aparatos são conhecidos como elementos elétricos.

Existem dois tipos de elementos encontrados nos circuitos elétricos: elementos passivos e elementos ativos. Um elemento ativo é capaz de gerar energia enquanto um elemento passivo não. Exemplos de elementos passivos são resistores, capacitores e indutores; os elementos ativos típicos são geradores, baterias e amplificadores operacionais.

Uma vez que os elementos de um circuito elétrico podem ser interconectados de diversas maneiras precisamos compreender alguns conceitos básicos de topologia de rede. Ramo representa um elemento único como fonte de tensão ou resistor. Nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos. Laço é qualquer caminho fechado em um circuito (ALEXANDER; SADIKU, 2013). A Figura 1 apresenta um circuito com nós, ramos e laços.

Figura 1 - Nós, ramos e laços



Fonte: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

Quando as cargas estão em série a corrente elétrica não terá divisão, pois somente haverá um caminho para que a mesma percorra. Caso as cargas estejam em paralelo, haverá um ponto no circuito onde a corrente elétrica irá ser dividida, havendo mais de um caminho para ela percorrer. O mesmo processo ocorre com as resistências. A lei de Ohm afirma que a tensão (v) em um resistor é diretamente proporcional à corrente (i) através dele. A lei de Kirchoff para corrente (LKC) diz que a soma algébrica das correntes que entram em um nó (ou um limite fechado) é zero. A soma das quedas de tensão é igual à soma das elevações de tensão (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012).

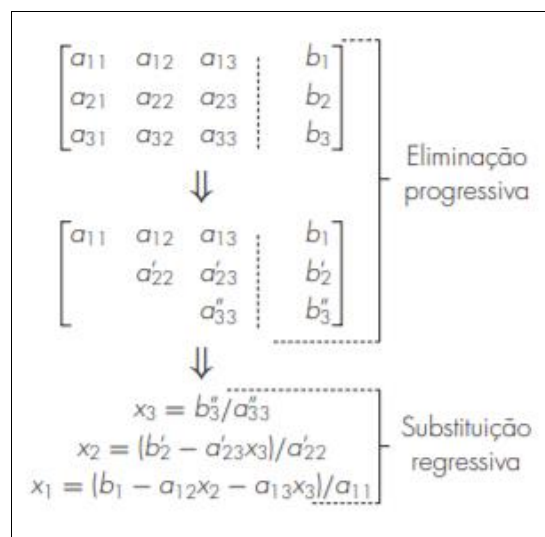
A análise nodal em circuitos é o processo para determinar tensões nos elementos do circuito (ou as correntes através deles), utilizando-se das leis de Ohm e da Kirchoff para corrente.

2.2. Métodos utilizados para a solução de sistemas lineares

Em Métodos Numéricos existem diversos métodos para solução de sistemas lineares os quais podem ser utilizados para resolver os sistemas gerados pela análise nodal. Neste trabalho utilizaram-se os métodos de Eliminação de Gauss, com e sem refinamento, Fatoração LU, Fatoração QR e Crout.

O Método de Eliminação de Gauss foi estudado e implementado pelo cientista Carl Friedrich Gauss. O mesmo zera os elementos abaixo do elemento de pivotação formando uma matriz triangular superior, conforme percorre a matriz (Figura 2). Tal método utiliza o processo de retrosubstituição para determinar o resultado de suas incógnitas. (FRANCO, 2016).

Figura 2 –Etapas da Eliminação de Gauss



Fonte: (CHAPRA e CANALE, 2008)

O Método de Fatoração LU, tem como objetivo fatorar a matriz A no produto de duas matrizes L e U , sendo L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior (Figura 3) (CHAPRA e CANALE, 2008).

O método de Crout é utilizado na resolução de problemas de sistemas de equações lineares onde a matriz dos coeficientes é tridiagonal. Tal matriz é fatorada em duas matrizes L e U . Sendo a matriz L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior, sendo os termos de sua diagonal principal unitários. (HILDEBRAND, 1956)

Figura 3 - Fatoração LU

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ m_{n1} & \dots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Fonte: (Autores)

Figura 4 (a)– Método de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: (GROBE, 2015)

A fatoração QR produz a partir de uma matriz de coeficientes duas novas matrizes Q e R. Sendo a matriz Q, uma matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormal e R uma matriz triangular superior conforme apresenta a Figura 4(b). Este método utiliza o processo de Gram-Schmidt para construir a matriz ortogonal. (POOLE, 2004)

Figura 4(b) - Fatoração QR

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q} \text{ (ortogonal)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3^T \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Fonte: (Autores)

2.2. Trabalhos relacionados

Em seu artigo, Pereira et. al. (2015), utilizam álgebra linear na resolução de análise de malhas de um circuito, resolvendo o sistema resultante por Eliminação de Gauss.

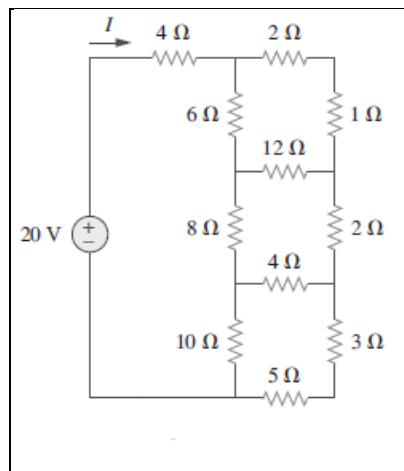
Assim como o trabalho anterior, Sousa et. al. (2012) realiza a análise de malhas no circuito, porém utiliza os métodos de Decomposição de Cholesky e Pseudo-inversão.

Já Grigoletti et. al. (2006), produziram um programa computacional denominado FCA em linguagem Python, utilizando de matemática intervalar para análise nodal de um circuito. Como método numérico, este trabalho utilizou a multiplicação da matriz inversa de A nos dois lados da equação $Ax = b$.

3 Procedimentos Metodológicos

Para este artigo, optou-se por referência um circuito (Figura 5) que, após a análise nodal do mesmo, perante as equações de Kirchoff e a Lei de Ohm, gera um sistema de sete incógnitas e sete equações. Tal processo permite a elaboração do sistema em forma matricial (Figura 6).

Figura 5 - Circuito utilizado como referência para os cálculos



Fonte: (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

Figura 6 - Forma matricial do sistema relativo a análise nodal do circuito

$$\begin{pmatrix} 11 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 9 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 10 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 19 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fonte: (Autores)

Com o sistema matricial resultante aplicou-se os métodos de Eliminação de Gauss, Eliminação de Gauss Refinada, Fatoração LU, Método de Crout e Fatoração QR. Os métodos aqui aplicados foram implementados em linguagem de programação C.

Para cada método numérico calculou-se o erro relativo, adotando os resultados obtidos no software comercial MatLab como valores de soluções reais. No MatLab os valores foram calculados a partir do cálculo de inversa da matriz principal.

4 Resultados obtidos

Os resultados obtidos em cada método numérico são a representação das tensões elétricas em cada nó do circuito elétrico. Neste exemplo se obtém sete resultados porque o circuito referência possui sete nós em sua composição. Sabendo as tensões em cada nó, é possível calcular posteriormente pela lei de Ohm a corrente em cada ponto do circuito, conhecendo assim os aspectos elétricos do circuito analisado.

Apresentam-se na Tabela 1 os resultados obtidos pelos métodos adotados no desenvolvimento do presente trabalho: Eliminação de Gauss (Elim. Gauss), Eliminação de Gauss com refinamento (Elim. Gauss Ref.), Fatoração LU, Fatoração QR e Crout, além da solução retornada pelo software matemático MatLab.

Tabela 1 - Soluções obtidas a partir dos métodos numéricos

Elim. Gauss	Elim. Gauss Ref.	Fatoração LU	Fatoração QR	Crout	MatLab
13,516716	13,516718	13,516717	13,516715	13,516716	13,516716
11,265341	11,26534	11,265341	11,265341	11,265341	11,26534
10,545916	10,545917	10,545918	10,545917	10,545917	10,54592
10,139653	10,139652	10,139654	10,139652	10,139653	10,13965
6,855692	6,855696	6,8556931	6,855693	6,855692	6,855692
7,752857	7,752733	7,7528573	7,752857	7,752856	7,752857
4,845535	4,845535	4,845536	4,845536	4,845535	4,845535

A Tabela 2 apresenta os erros relativos calculados a partir dos resultados obtidos pelo MatLab (considerado como resultados exatos).

Tabela 2 - Erros relativos absolutos dos métodos numéricos

Erro Gauss	Erro Gauss Ref.	Erro LU	Erro QR	Erro Crout
0	$1,47965 \times 10^{-7}$	$7,39825 \times 10^{-8}$	$-7,39825 \times 10^{-8}$	0
0	$-8,87678 \times 10^{-8}$	0	0	0
0	$9,48234 \times 10^{-8}$	$1,89647 \times 10^{-7}$	$9,48234 \times 10^{-8}$	$9,48234 \times 10^{-8}$
0	$-9,86227 \times 10^{-8}$	$9,86227 \times 10^{-8}$	$-9,86227 \times 10^{-8}$	0
$1,45864 \times 10^{-8}$	$5,98043 \times 10^{-8}$	$1,75037 \times 10^{-7}$	$1,60451 \times 10^{-7}$	$1,45864 \times 10^{-8}$
$6,44924 \times 10^{-8}$	$-1,59296 \times 10^{-5}$	$1,03188 \times 10^{-7}$	$6,44924 \times 10^{-8}$	$-6,44924 \times 10^{-8}$
0	0	$2,06376 \times 10^{-7}$	$2,06376 \times 10^{-7}$	0

Verifica-se na Tabela 2 que o método de Eliminação de Gauss possui o menor erro relativo, ou seja, foi o método que mais convergiu para o valor obtido pelo software MatLab. Também é possível analisar que alguns valores apresentam erro zero. Tais resultados de erros são devido aos algoritmos dos métodos estarem configurados para calcular com seis de mantissa (considerando truncamento), coincidindo com os resultados obtidos pelo software MatLab.

5 Conclusões

Os métodos numéricos para solução de sistemas lineares aqui aplicados permitem a análise e aumento da exatidão da análise nodal. Contribuindo assim para a determinação de valores de tensão mais exatos para o circuito.

O desenvolvimento do trabalho proporcionou aplicar e implementar métodos numéricos para solução de sistemas lineares em problemas da Engenharia Elétrica, apresentando soluções tão exatas quanto as obtidas por softwares matemáticos comerciais e onde não se tem certeza do método utilizado na solução de sistemas lineares.

Referências

- ALEXANDER CK, SADIKU MNO. Fundamentos de Circuitos Elétricos. 5th ed., Porto Alegre: AMGH; 2003
- CHAPRA SC, CANALERP. Métodos numéricos para engenharia. 5th ed., São Paulo: McGraw-Hill, 2008
- FRANCO NB. Cálculo numérico. 1st ed., Pearson Prentice Hall; 2016
- GRIGOLETTIPS, DIMURO G.P., BARBOZA L.V., REISER R.H.S. Análise intervalar de circuitos elétricos. Trends in Applied and Computational Mathematics. 2006; v. 7:n. 2:p. 287-296
- GROBE JR. Sistemas lineares – 2015 [Internet]. Pato Branco: Universidade Tecnológica do Paraná; 2015 Mar 30 [cited 2018 ago 30]. Available from: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/grobe/calculo-numerico-das-engenharias/capitulo_2_sistemas_lineares_A.pdf/at_download/file.
- HALLIDAYD, RESNICK R, WALKER J. Fundamentos da Física Vol. 3 - Eletromagnetismo. 9th ed., Rio de Janeiro:LTC; 2014.
- HILDEBRAND FB. Introduction to Numerical Analysis. 1st ed., Nova Deli: TMH Edition, 1956.
- PEREIRA CS, NETO LA, SANTOS MDS, NASCIMENTO TMM, GAMA EDP, SANTOS JJ. Aplicação da Álgebra Linear em circuitos elétricos. Cadernos de graduação - Ciências exatas e tecnológicas. 2015;v. 3:n. 1:p. 35-44,
- POOLE D. Álgebra Linear.1st ed., São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.
- SOUSA JVC, BOSO ACMR, NIYAMA CA. Determinação de Correntes em Circuitos Elétricos Usando Decomposição de Cholesky e Pseudo-inversão. IN: Anais do 34º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional [Internet]. 2012. Maio 17-21; Águas de Lindóia, Brasil. 2012 [cited 2018 ago 30]. Available from: https://sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiv_cnmac/pdf/219.pdf