

## Contagem de árvores geradoras de um grafo completo

### Counting of spanning trees of a complete graph

<sup>1</sup>Anderson Luiz Pedrosa Porto, <sup>2</sup>Vagner Rodrigues de Bessa, Matheus Pereira da Silva Aguiar e Mariana Martins Vieira

<sup>1</sup>Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil

<sup>2</sup>Universidade Federal de Viçosa, Brasil

#### Resumo

*Em 1889, Arthur Cayley publicou um artigo com uma fórmula para a contagem de árvores geradoras (spanning) de um grafo completo. Esse teorema diz que: Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices. Então o número de árvores geradoras  $K_n$  é dado por  $n^{n-2}$ . O presente trabalho constitui-se de uma breve revisão da literatura sobre os conceitos e resultados básicos da teoria de grafos e uma demonstração detalhada da Fórmula de Cayley, dada pela construção minuciosa de uma bijeção entre o conjunto de árvores geradoras e um conjunto especial de sequências numéricas. Por fim, trazemos um algoritmo, que descreve uma forma precisa para a construção das árvores geradoras obtidas de  $K_n$  a partir de sequências de Cayley-Prüfer.*

**Palavras-chave:** Árvores, Árvores geradoras, Fórmula de Cayley, Grafos Completos, Processo Inverso de Cayley-Prüfer.

#### Abstract

*In 1889, Arthur Cayley published an article that contained a formula for counting the spanning trees of a complete graph. This theorem says that: Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $K_n$  the complete graph with  $n$  vertices. Then the number of spanning trees of  $K_n$  is established by  $n^{n-2}$ . The present work is constituted by a brief literary review about the basic concepts and results of the graph theory and detailed demonstration of the Cayley's Formula, given by the meticulous construction of a bijection between the set of the spanning trees and a special set of numeric sequences. At the end we bring an algorithm that describes a precise construction of the spanning trees obtained of  $K_n$  from Cayley-Prüfer sequences.*

**Keywords:** Trees, Spanning Trees, Cayley's Formula, Complete Graphs, Inverse Process of Cayley-Prüfer.

## 1 Introdução

A Teoria de Grafos é um ramo de pesquisa na área da matemática, e possui aplicações em várias áreas: i) No Transporte aéreo rodoviário e marítimo, em que se destacam o planejamento de rotas e o tratamento do fluxo de automóveis em vias urbanas (veja, por exemplo Fracasso (2008)); ii) Na engenharia elétrica, com a esquematização de circuitos e distribuição de energia (veja, por exemplo Orsini e Consonni (2002)); iii) Na ciência da computação com o estudo de autômatos (veja, por exemplo Konzen (1997)), entre inúmeras outras. Para o aprimoramento dessas aplicações, o desenvolvimento da teoria básica é fundamental. Este trabalho propõe um estudo teórico de conceitos relacionados a teoria de grafos. Inicialmente faremos uma revisão bibliográfica dos conceitos de grafos, subgrafos, grau de um vértice, árvores, isomorfismo, conexidade, dentre outros (veja, como exemplos Harary (1969), Júnior e Nicoletti (2006), e principalmente Bondy e Murty (1982)). Esses conceitos serão fundamentais para a compreensão das seções posteriores. Os resultados principais obtidos, foram: primeiramente uma prova de um teorema sobre a contagem de árvores geradoras em grafos completos (conhecida como Fórmula de Cayley), cujo método que usamos foi a aplicação da indução finita (veja como exemplo, Domingues e Iezzi (2003)), e o outro foi uma descrição minuciosa do processo inverso de Cayley-Prüfer. A prova desse teorema, conhecido como Fórmula de Cayley, por meio das sequências de Prüfer pode ser encontrado em Wu e Chao (2004) (Teorema 1.1) ou em Abu-Sbeih (1990). Existem outras demonstrações, como a que trata dos números  $T(n,k)$  (veja, por exemplo Wilson (1996), p. 49-50), ou do conhecido Teorema da matriz-árvore, que diz: o número de árvores geradoras em um grafo conexo finito e simples é igual ao cofator de qualquer elemento da matriz laplaciana desse grafo (veja, como exemplo Bondy e Murty (1982), p. 218-220).

**Definição 1.1.** (Grafo não orientado) Um grafo não-orientado  $G$  é um conjunto não vazio, definido por uma tripla de objetos  $(V(G), E(G), \Psi_G)$ , em que  $V(G) \neq \emptyset$  e  $E(G)$  são denominados os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente, de forma que o grafo  $G$  consiste da união disjunta de  $V(G)$  e  $E(G)$ . No caso em que  $E(G) \neq \emptyset$ , existe uma aplicação

$$\Psi_G : E(G) \rightarrow V(G) \times V(G),$$

chamada função de incidência, que associa cada aresta de  $G$  a um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos isto é, para  $e \in E(G)$  temos  $\Psi_G(e) = uv = [u,v] = [v,u]$ , onde  $\times$  denota um produto cartesiano não ordenado).

Se  $e$  é uma aresta e  $u$  e  $v$  são vértices tais que  $\Psi_G(e) = uv$ , então dizemos que  $e$  conecta  $u$  a  $v$ . Os vértices  $u$  e  $v$  são chamados de extremidades ou vértices incidentes à  $e$ . Dois vértices incidentes a uma mesma aresta são ditos adjacentes ou vizinhos.

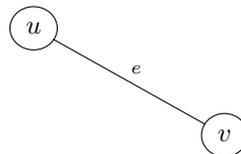


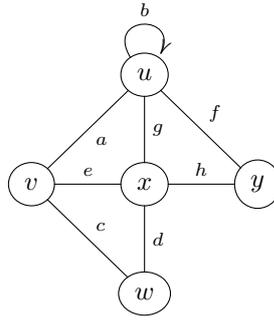
Figura 1: Representação da aresta  $e$  com extremidades  $u$  e  $v$ .

Uma aresta com extremidades iguais é denominada um laço (loop). Quando duas ou mais arestas possuem as mesmas extremidades, tais arestas são ditas arestas paralelas. Um grafo  $G = \{v\}$  possuindo um único vértice será chamado de **grafo trivial**. Um grafo que não possui arestas paralelas e nem laços é dito um **grafo simples**.

**Exemplo 1.2.** Considere o grafo  $G$  tal que,  $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ ,  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  e  $\Psi_G$  é definida por:

$$\Psi_G(a) = uv, \Psi_G(b) = uu, \Psi_G(c) = vw, \Psi_G(d) = wx, \Psi_G(e) = vx, \Psi_G(f) = uy, \Psi_G(g) = ux, \Psi_G(h) = xy.$$

Esse grafo pode ser representado pela figura abaixo:


 Figura 2: Representação do grafo  $G$ .

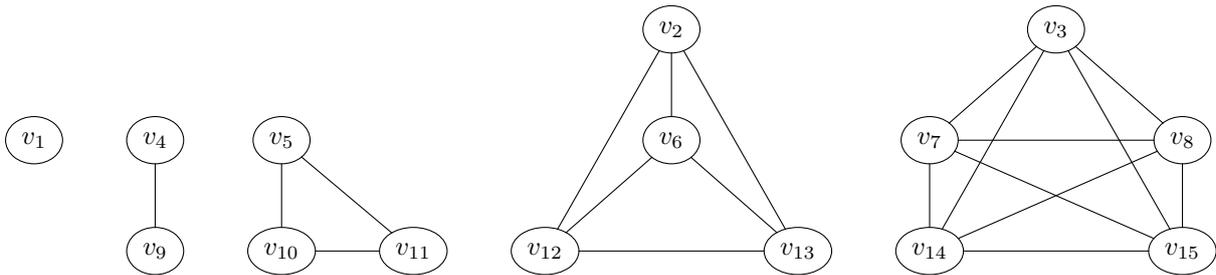
**Definição 1.3.** (Isomorfismo de grafos) Dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos isomorfos ( $G \cong H$ ), se existem bijeções  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tais que, para toda aresta  $e \in E(G)$  temos:

$$\Psi_G(e) = [u, v] \text{ se, e somente se, } \Psi_H(\phi(e)) = [\theta(u), \theta(v)], \text{ onde } u, v \in V(G).$$

O par de funções  $(\theta, \phi)$  é denominado um isomorfismo entre  $G$  e  $H$ .

**Definição 1.4.** (Grafo completo) Um grafo é dito completo se não possui laços e cada par de vértices distintos são conectados por uma única aresta. Um grafo completo de  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

**Observação 1.5.** A menos de isomorfismo existe apenas um grafo completo com  $n$  vértices.


 Figura 3: Representação dos grafos completos  $K_1, K_2, K_3, K_4$  e  $K_5$ , respectivamente.

**Definição 1.6.** (Subgrafos) Seja  $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$  um grafo. Um grafo  $H$  é dito um subgrafo de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e  $\Psi_H$ , quando existe, satisfaz  $\Psi_H = (\Psi_G)|_{E(H)}$ , onde o símbolo  $|$  denota a restrição de uma dada função.

**Definição 1.7.** (Subgrafo induzido) Sejam  $G$  como na definição precedente e  $W$  um subconjunto não vazio de  $V(G)$ . O subgrafo de  $G$  induzido por  $W$  é um subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $W$ , o conjunto de aresta é formado pelas arestas de  $G$  que tem ambas as extremidades em  $W$ , podendo ser vazio, e a função de incidência, caso exista, é dada pela restrição da função  $\Psi_G$  a esse conjunto de arestas incidentes. Notação para o subgrafo induzido:  $G[W]$ .

## 2 Árvores

Seja  $G$  um grafo. Um passeio em  $G$  é uma sequência finita não vazia do tipo:

$$W = v_0 \text{ ou } W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k,$$

cujos termos são alternadamente vértices e arestas de  $G$  e para cada  $i \in 1, 2, \dots, k$  as extremidades de  $e_i$ , no grafo  $G$ , são  $v_{i-1}$  e  $v_i$ . Se  $W = v_0$ , então o comprimento de  $W$  será zero, caso contrário, o inteiro  $k$  é o comprimento do passeio  $W$ . Dizemos que  $W$  é um passeio de  $v_0$  para  $v_k$  ou um  $(v_0, v_k)$ -passeio.

Se as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de um passeio  $W$  são distintas, podemos chamar  $W$  de trilha. Se, além das arestas distintas, os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  são distintos,  $W$  é chamado de caminho.

Um passeio é dito fechado se possui comprimento maior ou igual a 1 e sua origem  $v_0$  e seu fim  $v_k$  são iguais. Uma trilha é dita fechada, se os seus vértices inicial e final são os mesmos. Uma trilha fechada cujo o vértice inicial (origem) e os vértices internos são disjuntos é chamada de ciclo. O termo ciclo também será usado para nomear um grafo ou subgrafo que corresponde a um ciclo. O comprimento de um ciclo é a cardinalidade do seu conjunto de arestas. Se existem  $k$  arestas no ciclo, ele será chamado de  $k$ -ciclo. Um grafo sem ciclos é chamado de acíclico.

**Definição 2.1.** Seja  $G$  um grafo e  $V = V(G)$  seu conjunto de vértices. Suponha que o conjunto  $V(G)$  seja particionado em subconjuntos não vazios e disjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_w$ , isto é,

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_w,$$

onde dois vértices  $u, v \in V(G)$  pertencem ao mesmo  $V_i$  da partição se, e somente se, existe um caminho em  $G$  que conecta  $u$  a  $v$ . Os subgrafos induzidos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$  serão ditos as componentes conexas do grafo  $G$ . Se  $G = G[V_1]$ , então  $G$  será chamado de grafo conexo, caso contrário, chamaremos de grafo desconexo. Durante este trabalho, a quantidade de componentes conexas de um grafo será denotada por  $\omega(G)$ .

**Definição 2.2.** Uma árvore é um grafo acíclico e conexo.

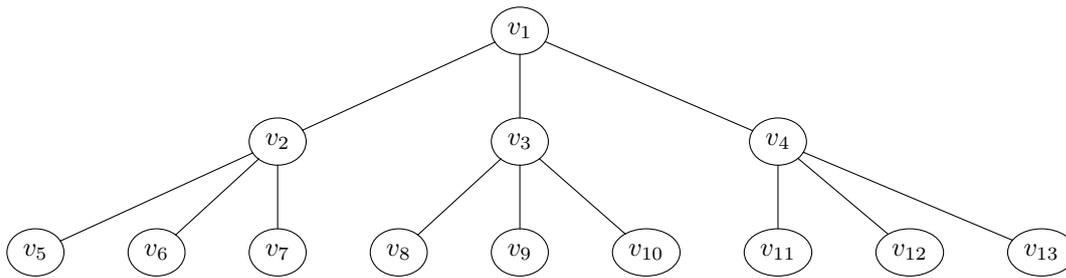


Figura 4: Exemplo de uma árvore com 13 vértices e 12 arestas.

**Definição 2.3.** (Grau de um vértice) Seja  $G$  um grafo e  $v \in V(G)$ . Se em  $v$  não existe um laço, definimos o grau de  $v$  como sendo o número de arestas que incidem em  $v$ . Denotaremos o grau de  $v$  por  $d_G(v)$  e, caso não haja ambiguidade, simplesmente  $d(v)$ . Se em  $v$  incidem  $k$  laços e  $n$  arestas incidentes (que não são laços), então  $d_G(v) = 2k + n$ . Note que a definição de grau em um grafo finito, coincide com o número de vezes em que  $v$  é vértice extremidade de uma aresta. Dessa forma faz sentido dizer que se em  $v$  existe apenas um laço, então  $d_G(v) = 2$ . Um vértice de grau 1 será dito uma **folha do grafo**.

**Teorema 2.4.** A soma dos graus dos vértices em um grafo finito é o dobro do número de arestas.

*Demonstração.* Para detalhes veja p. 14 em Harary (1969) ou p. 32 em Júnior e Nicoletti (2006). □

Os resultados a seguir sobre árvores são bem conhecidos e podem ser encontrados nas referências Harary (1969), Júnior e Nicoletti (2006) ou Bondy e Murty (1982). Para a comodidade do leitor vamos fazer algumas de suas provas e em alguns casos vamos fazer somente as citações.

**Teorema 2.5.** Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho.

*Demonstração.* Veja, por exemplo Bondy e Murty (1982), p. 25. □

**Teorema 2.6.** Seja  $T$  uma árvore finita, então  $\#(E(T)) = \#(V(T)) - 1$ , onde  $\#(E(T))$  é a quantidade de arestas e  $\#(V(T))$  é a quantidade de vértices de  $T$ , respectivamente.

*Demonstração.* A prova será feita por indução sobre o número de vértices da árvore. Suponha que  $\#(V(T)) = 1$ . Então as únicas arestas possíveis para esse grafo seriam laços, no entanto, laços são ciclos e como  $T$  é uma árvore, segue que a mesma não possui arestas, o que implica  $\#(E(T)) = 0 = \#(V(T)) - 1 = 1 - 1$ , como queremos. Suponha a partir de agora, que o resultado é válido para toda árvore com  $1 \leq \#(V(T)) \leq k$ . Seja  $G$  uma árvore com  $\#(V(G)) = k + 1$ . Como  $\#(V(G)) \geq 2$  e  $G$  é conexo, existe pelo menos uma aresta  $uv$  em  $G$ . Considere o subgrafo  $G - uv$  que é obtido de  $G$  pela remoção da aresta  $uv$  de  $G$ . Note que tal subgrafo não contém um  $(u, v)$ -caminho, pois se existisse tal caminho seria um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$  que não é dado pela aresta  $uv$ , um absurdo pelo Teorema 2.5. Logo,  $G - uv$  é desconexo e  $\omega(G - uv) = 2$ . Sejam  $G_1, G_2$  as componentes conexas de  $G - uv$ . É claro que  $G_1, G_2$  não contém ciclos, pois se tivessem, estes induziriam ciclos em  $G$  que não passam pela aresta  $uv$ , um absurdo já que  $G$  é uma árvore. Como  $G_1, G_2$  são conexas, segue que  $G_1, G_2$  são árvores com  $\#(V(G_1)), \#(V(G_2)) \leq k$ . Portanto pela hipótese de indução  $\#(E(G_i)) = \#(V(G_i)) - 1$  para cada  $i = 1, 2$ . Logo

$$\#(E(G)) = \#(E(G_1)) + \#(E(G_2)) + 1 = [\#(V(G_1)) - 1] + [\#(V(G_2)) - 1] + 1 = \#(V(G)) - 1,$$

como queríamos provar. □

O resultado a seguir também será provado usando as ideias de Bondy e Murty (1982), visto que o mesmo será muito utilizado no decorrer deste trabalho.

**Corolário 2.7.** *Toda árvore  $G$  finita e não trivial, possui no mínimo dois vértices de grau um.*

*Demonstração.* Já que  $G$  é conexo, não podemos ter em  $G$  vértices de grau 0, logo  $d_G(v) \geq 1$  para todos os  $v \in V(G)$ . Pelo Teorema 2.4 juntamente com o Teorema 2.6 temos

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot \#(E(G)) = 2 \cdot (\#(V(G)) - 1) = 2 \cdot \#(V(G)) - 2.$$

Se o número de vértices de grau 1 fosse menor ou igual a 1 teríamos  $2 \cdot \#(V(G)) - 2 \geq 2 \cdot \#(V(G)) - 1$  ou  $2 \cdot \#(V(G)) - 2 \geq 2 \cdot \#(V(G))$ , um absurdo.  $\square$

**Definição 2.8.** *(Subgrafo gerador e árvore geradora) Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é dito um subgrafo gerador (spanning) de  $G$  se  $V(H) = V(G)$ . Uma árvore geradora de um grafo  $G$  (árvore spanning) é um subgrafo de  $G$  que é uma árvore e contém todos os vértices de  $G$ .*

**Exemplo 2.9.** *Abaixo apresentamos um grafo  $G$  com uma de suas árvores geradoras.*

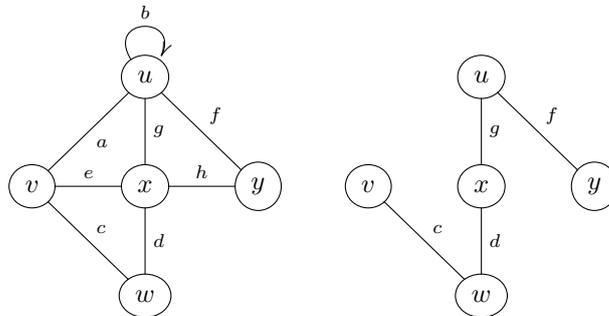


Figura 5: Grafo  $G$  e uma de suas árvores geradoras, respectivamente.

**Definição 2.10.** *(Aresta de corte) Seja  $G$  um grafo tal que  $E(G)$  é não vazio. Uma aresta  $e \in E(G)$  é chamada de aresta de corte ou aresta cortante se  $\omega(G - e) > \omega(G)$ , onde  $G - e$  é o subgrafo de  $G$  obtido pela remoção da aresta  $e$  e do grafo  $G$ .*

**Teorema 2.11.** *Um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, cada aresta do grafo é uma aresta cortante.*

*Demonstração.* Veja, por exemplo Bondy e Murty (1982), p. 28.  $\square$

O corolário a seguir justifica o fato de procurarmos árvores geradoras em grafos completos finitos, já que grafos completos são obviamente conexos.

**Corolário 2.12.** *Cada grafo conexo e finito contém uma árvore geradora.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo e finito. Se  $\#(V(G)) = 1$  ou  $G$  é uma árvore, a prova é trivial pois as árvores geradoras nestes respectivos grafos serão o único vértice e a própria árvore, respectivamente. Suponha a partir de agora que  $G$  é um grafo conexo, que não é uma árvore e é não trivial. É claro que  $G$  é um subgrafo gerado e conexo dele mesmo (logo tais subgrafos existem). Como  $G$  é conexo, podemos retirar arestas de ciclos de  $G$ , de tal forma que o grafo remanescente ainda seja conexo, até obtermos um subgrafo gerado conexo minimal remanescente de  $G$ , digamos  $T$  (a expressão minimal quer dizer que se for retirada mais uma aresta do grafo remanescente, este deixará de ser conexo). Por definição  $\omega(T) = 1$  e  $\omega(T - e) > 1$ , para todo  $e \in E(T)$ . Portanto, cada aresta de  $T$  é cortante e como  $T$  é conexo, o Teorema 2.11 garante que  $T$  é uma árvore, ou seja,  $T$  é uma árvore geradora de  $G$ .  $\square$

### 3 Grafos completos e suas árvores geradoras

Seja  $G$  um grafo completo. Uma fórmula simples para calcular o número de árvores geradoras de  $G$  foi descoberta por Cayley em 1889 e provada por Prüfer em 1918. Nesta seção, apresentaremos uma demonstração rigorosa deste teorema, cuja ideia principal é o uso da indução finita.

### 3.1 Sequência de Cayley-Prüfer

Seja  $G$  um grafo completo com  $n \geq 2$  vértices e seu conjunto de vértices dado por  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Enumere os vértices de  $G$  (isso pode ser feito de forma aleatória) como:

$$v_1 = 1, v_2 = 2, \dots, v_n = n.$$

Seja  $T$  uma árvore geradora de  $G$ . Desta forma, podemos representar os vértices de  $T$  por  $V(T) = \{1, 2, \dots, n\}$ , de acordo com a enumeração estabelecida em  $G$ . Podemos criar a partir de  $T$  uma sequência numérica denominada **Sequência de Cayley-Prüfer** da árvore  $T$ , ou abreviadamente, **Sequência CP** de  $T$ , como segue:

- i) Se  $\#(V(T)) = 2$ , a sequência CP é dita trivial ou vazia;
- ii) Seja  $\#(V(T)) \geq 3$ . Pelo Corolário 2.7, sabemos que  $T$  tem pelo menos dois vértices de grau 1 (folhas de  $T$ ), o que nos permite tomar um vértice  $s_1$  em  $V(T)$  de menor numeração tal que  $d_T(s_1) = 1$ . O vértice adjacente a  $s_1$  será o primeiro elemento da sequência CP e o denotaremos por  $t_1$ . Ao remover  $s_1$  da árvore  $T$ , será obtida uma subárvore  $T_1$  de  $T$  que não contém o vértice  $s_1$  e nem a aresta que liga  $s_1$  a  $t_1$ . Se  $\#(V(T_1)) = 2$ , o processo para, e a sequência CP obtida a partir de  $T$  será  $(t_1)$ . Caso  $\#(V(T_1)) \geq 3$ , sabemos novamente pelo Corolário 2.7 que  $T_1$  possui pelo menos dois vértices de grau 1. Seja  $s_2$  uma folha de  $T_1 = T - s_1$ , de menor numeração, e assim a segunda coordenada na sequência CP será dada pelo único vértice ligado a  $s_2$  em  $T_1$ , digamos  $t_2$ . Este processo é repetido até alcançarmos a árvore remanescente  $T_{n-3}$  e o vértice  $t_{n-2}$  de  $T_{n-3}$ . Tal processo será chamado de **Processo de Cayley-Prüfer**. A sequência numérica CP gerada por esse processo é  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ , onde  $t_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exemplo 3.1.** *Abaixo ilustramos o grafo completo  $K_5$  e duas de suas árvores geradoras. Tais árvores, induzem as sequências de Cayley-Prüfer  $(2,1,3)$  e  $(2,2,2)$ , respectivamente:*

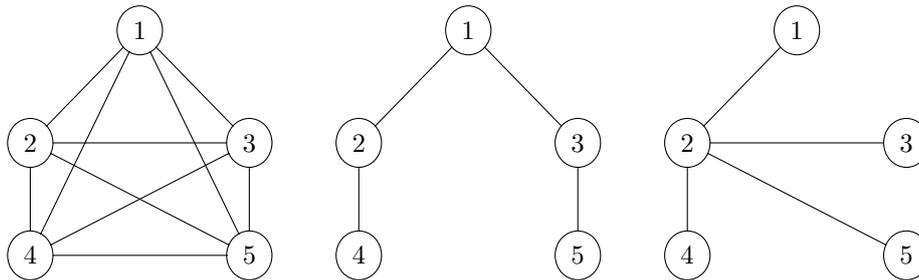


Figura 6: Grafo  $K_5$  e duas de suas árvores geradoras, respectivamente.

**Proposição 3.2.** *Seja  $T$  uma árvore geradora de  $K_n$  ( $n \geq 2$ ). Então, o número de vezes que  $v_t = t \in V(T)$  aparece como coordenada na sequência de Cayley-Prüfer (CP) obtida a partir de  $T$  é igual a  $d_T(t) - 1$ . Em particular, as folhas de  $T$  não aparecem nas sequências CP.*

*Demonstração.* Seja  $n = 2$ . Neste caso a única árvore geradora de  $K_2$  é o próprio  $K_2$ , além disso,  $d_T(1) = d_T(2) = 1$ . Como nesse caso a sequência CP é vazia, segue que  $j$  aparece como coordenada na respectiva sequência CP zero vezes, ou seja,  $d_T(j) - 1 = 0, \forall j = 1, 2$ , como queríamos provar.

Suponha a partir de agora  $n \geq 3$ . Pelo Corolário 2.7 temos em  $T$  pelo menos dois vértices de grau 1, além disso, existe em  $T$  pelo menos um vértice de grau maior do que 1, caso contrário, pelos Teoremas 2.4 e 2.6 teríamos  $\#(V(T)) = 2$ , uma contradição. Vamos dividir a prova, em dois casos, primeiramente para os vértices de grau 1, e por fim, para os vértices de grau maior do que 1.

Seja  $t \in V(T)$  um vértice de grau 1. Se tal vértice foi deletado no processo de Cayley-Prüfer antes de se atingir a última aresta (note que em cada iteração, tal vértice, ainda é uma folha nas árvores remanescentes), então ele ocorrerá na sequência CP zero vezes, já que o vértice que aparecerá na respectiva sequência será o seu vizinho. Se o vértice  $t$  não foi deletado no processo de Cayley-Prüfer, então ele será uma folha na aresta que sobrar no final das iterações. Contudo, ao chegarmos nesta aresta, a sequência CP já foi preenchida, sendo assim  $t$  não aparece como coordenada na respectiva sequência CP. Portanto se  $d_T(t) = 1$ , segue que  $t$  aparece na respectiva sequência  $d_T(t) - 1 = 1 - 1 = 0$  vezes, como queríamos mostrar.

Suponha que  $d_T(t) > 1$ , onde  $\#(V(T)) \geq 3$ . Tal prova será feita por indução sobre o grau do vértice da árvore. A hipótese de indução será a seguinte: Se  $z$  é qualquer vértice de grau  $d_T(z) = k > 1$ , então  $z$  aparece como coordenada na sequência CP exatamente  $d_T(z) - 1$  vezes.

Seja  $t \in V(T)$  tal que  $d_T(t) = k + 1$ . Queremos provar que  $t$  aparece como coordenada na sequência de Cayley-Prüfer  $d_T(t) - 1$  vezes. Claramente  $t$  aparece como coordenada nesta sequência pelo menos uma vez. De fato, como o grau de  $t$  é maior que um, para chegarmos ao final do processo de Cayley-Prüfer, isto é, para obtermos a última aresta, tivemos que eliminar pelo

menos uma das arestas que incidiam sobre  $t$  nas subárvores remanescentes, e por conseguinte  $t$  apareceu pelo menos uma vez como uma coordenada da respectiva sequência CP associada a  $T$ . Seja  $T'$  a subárvore de  $T$  que restou da aplicação do processo de Cayley-Prüfer depois que  $t$  apareceu pela primeira vez como coordenada na sequência CP obtida a partir de  $T$ . Note que  $d_{T'}(t) = k$  e pela hipótese de indução  $t$  aparece como coordenada na sequência CP obtida a partir de  $T'$ ,  $d_{T'}(t) - 1 = k - 1$  vezes. Sendo assim, o número de vezes que  $t$  aparece na sequência CP obtida a partir de  $T$  é dado por

$$(d_{T'}(t) - 1) + 1 = d_{T'}(t) = k = d_T(t) - 1,$$

como queríamos provar. □

### 3.2 Fórmula de Cayley para grafos completos

**Lema 3.3.** *Seja  $K_n (n \geq 2)$  o grafo completo com  $n$  vértices (único a menos de isomorfismo). Denotaremos por  $\Omega$  o conjunto de todas as árvores geradoras de  $K_n$  e  $\wp$  o conjunto de sequências numéricas dado por  $\wp = \{(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}) \mid h_i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  quando  $n \geq 3$  ou  $\wp = \{\emptyset\}$  se  $n = 2$ . Então existe uma função  $\Psi : \Omega \rightarrow \wp$  que aplica*

$$T \mapsto \Psi(T) = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}), \text{ se } n \geq 3 \text{ ou } \Psi(T) = \emptyset, \text{ se } n = 2,$$

onde  $\Psi(T)$  é a respectiva sequência de Cayley-Prüfer obtida a partir de  $T$ .

*Demonstração.*  $\Psi$  é bem definida se  $n = 2$ . De fato,  $K_2 = T$  é a única árvore geradora de  $K_2$ , logo  $\Omega = \{K_2\}$ , sendo assim,  $\Psi(T) = \emptyset$  é a única possibilidade, e pela definição  $\Psi$  é claramente um função bijetora de  $\Omega$  em  $\wp$ . Seja agora  $n \geq 3$ . Queremos mostrar que  $\Psi$  é bem definida neste caso. Para tanto, tome  $T$  uma árvore geradora de  $K_n$ , queremos verificar que  $\Psi(T)$  é unicamente determinada em  $\wp$ , isto é, se:  $\Psi(T) = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \hat{t} \in \wp$  e  $\Psi(T) = (r_1, r_2, \dots, r_{n-2}) = \hat{r} \in \wp$ , então as sequências  $\hat{t}$  e  $\hat{r}$  são iguais. Suponha por absurdo que  $\hat{r} \neq \hat{t}$ . Logo, existe um índice  $j \in \{1, \dots, n-2\}$  tal que  $t_j \neq r_j$ . Se  $t_1 \neq r_1$ , temos pelo Processo de Cayley-Prüfer duas arestas distintas  $[s_1, t_1] \neq [s_1, r_1]$  ligadas a  $s_1$  em  $T_1 = T$ , mas como  $d_T(s_1) = 1$ , temos uma contradição. Se  $n = 3$  a prova está completa. Seja agora  $n \geq 4$  e  $t_1 = r_1$ . Neste caso,  $t_j \neq r_j$  para algum  $j > 1$ . Se isso ocorre, considere a  $j$ -ésima etapa do processo de Cayley-Prüfer, temos uma subárvore de  $T$  onde o vértice  $s_j$  tem grau 1, digamos a árvore  $T_j$ . Pelo processo de Cayley-Prüfer,  $T_j$  teria arestas:  $[s_j, t_j] \neq [s_j, r_j]$  e como  $d_{T_j}(s_j) = 1$ , teríamos uma contradição. Portanto de maneira análoga, tem-se:  $t_j = r_j, \forall j = 1, \dots, n-2$ , donde concluímos que  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \hat{t} = \hat{r}$ , e assim,  $\Psi$  é uma função de  $\Omega$  em  $\wp$ . □

**Observação 3.4.** *O Lema 3.3 diz, em outras palavras, que a função  $\Psi$  associa cada árvore geradora de  $K_n (n \geq 2)$  a sua respectiva sequência de Cayley-Prüfer contida em  $\wp$ , e a partir de agora diremos que  $\wp$  é o conjunto de todas as sequências de Cayley-Prüfer obtidas de árvores geradoras em  $\Omega$ .*

**Lema 3.5.** *A função  $\Psi$  do Lema 3.3 é injetora.*

*Demonstração.* Se  $n = 2$ , o resultado segue da prova do Lema 3.3 já que neste caso  $\Psi$  é bijetora. Seja agora  $n = 3$  e considere as árvores geradoras de  $K_3$  (a menos de isomorfismo):

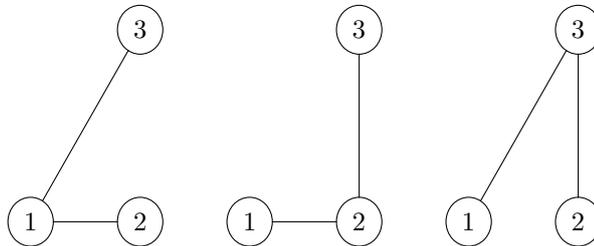


Figura 7: Árvores geradoras  $T_1, T_2$  e  $T_3$  de  $K_3$ , respectivamente.

Pelo processo de Cayley-Prüfer, temos:

$$\Psi(T_1) = (1), \Psi(T_2) = (2) \text{ e } \Psi(T_3) = (3).$$

Portanto, concluímos que, para todo  $T_i \neq T_j$  em  $\Omega$  tem-se  $\Psi(T_i) \neq \Psi(T_j)$  em  $\wp$  e assim  $\Psi$  é injetora, além disso, para  $n = 3$ ,  $\wp = \{(1), (2), (3)\}$  e assim  $\Psi$  é bijetora.

Seja a partir de agora  $n \geq 4$  e considere duas árvores geradoras  $T$  e  $T'$  de  $K_n$  tal que:

$$\Psi(T) = \Psi(T') = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \hat{t},$$

para algum  $\hat{t} \in \wp$ . Queremos provar que  $T = T'$ , logo  $\Psi$  será injetora. Vamos supor por indução que para grafos completos  $K_b$ , com  $2 \leq b \leq n-1$ , a função  $\Psi : \Omega \rightarrow \wp$  é injetora. Em outras palavras, dada uma sequência numérica  $\hat{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{b-2})$ , com  $r_j \in \{1, 2, \dots, b\}$ , então se  $\hat{r}$  advém pelo processo de Cayley-Prüfer de duas árvores geradoras  $H$  e  $H'$  de  $K_b$ , então  $H = H'$ , de outra maneira, se  $\Psi(H) = \Psi(H') = \hat{r}$ , então  $H = H'$ .

Pela Proposição 3.2 sabemos que folhas das árvores no processo de Cayley-Prüfer não aparecem como coordenadas nas sequências CP obtidas pelo processo. Pelo Corolário 2.7 sabemos que em  $T$  e  $T'$  existem pelo menos duas folhas com menores ordenações, sendo assim podemos escolher  $s_1, s'_1$  de  $T$  e  $T'$ , respectivamente, cuja ordenação é a seguinte  $1 < 2 < \dots < n$ , de tal maneira que esses vértices não estão em  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-2}\}$ . Portanto pelo processo de Cayley-Prüfer temos que  $[s_1, t_1]$  e  $[s'_1, t_1]$  são arestas das árvores originais  $T$  e  $T'$ , respectivamente. Para construirmos a sequência  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \Psi(T) = \Psi(T')$  pelo processo de Cayley-Prüfer, devemos eliminar os vértices  $s_1, s'_1$  e as arestas  $[s_1, t_1]$  e  $[s'_1, t_1]$  dos grafos  $T$  e  $T'$  respectivamente, obtendo assim as subárvores  $\hat{T}$  e  $\hat{T}'$  de  $T$  e  $T'$ , respectivamente.

Note que  $\#(V(\hat{T})) = \#(V(\hat{T}')) = n-1$ . Para encontrarmos  $\hat{t}$ , devemos aplicar o processo de Cayley-Prüfer nas subárvores remanescentes até que sobre apenas uma aresta. Pela hipótese de indução, para construirmos  $(t_2, \dots, t_{n-2})$  pelo processo de Cayley-Prüfer a partir de  $\hat{T}$  e  $\hat{T}'$ , devemos ter  $\hat{T} = \hat{T}'$ , já que a sequência  $(t_2, \dots, t_{n-2})$  tem tamanho  $(n-2)-1 = n-3 < n-2$ . Provaremos agora que  $\Psi$  é injetora.

É claro que  $s_1 \notin \hat{T}, t_1 \in \hat{T}$  e  $s'_1 \notin \hat{T}', t_1 \in \hat{T}'$ . Não podemos ter  $s_1 \neq s'_1$  em  $T$ . De fato, se isso ocorresse teríamos:

$$\#(V(K_n)) = \#(V(T)) = n = \#(V(\hat{T})) + 1 = \#(V(\hat{T}')) + \#(\{s_1, s'_1\}) = (n-1) + 2 = n+1,$$

um absurdo, já que  $n$  é natural e  $n \geq 4$ . Portanto,  $s_1 = s'_1$ , o que implica que  $[s_1, t_1] = [s'_1, t_1]$ , logo  $T = T'$ , como queríamos provar.  $\square$

**Proposição 3.6.** *A função  $\Psi : \Omega \rightarrow \wp$  dos lemas anteriores que aplica cada  $T \in \Omega$  em sua respectiva sequência de Cayley-Prüfer é bijetora.*

*Demonstração.* Já vimos pelo Lema 3.3 que  $\Psi$  é uma aplicação injetora  $\forall n \geq 2$ . Como foi discutido no Lema 3.5,  $\Psi$  é uma bijeção se  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Podemos assumir então que  $n \geq 4$  a partir de agora. Para provar essa proposição, basta mostrar que  $\Psi$  é sobrejetora se  $n \geq 4$ . Para tanto, devemos tomar uma sequência  $\hat{h} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in \wp$  e mostrarmos que existe uma árvore geradora  $T$  de  $K_n$  tal que  $\Psi(T) = \hat{h}$ . Vamos provar tal resultado por indução sobre o tamanho das sequências  $\hat{h}$  envolvidas. Pela hipótese de indução, dada qualquer sequência  $\hat{f} = (r_1, \dots, r_b)$ , com  $1 \leq b < n-2$  e  $r_j \in \{1, \dots, b, b+1, b+2\}$ , sempre existe uma única árvore geradora  $\hat{T}$  com  $b+2$  vértices tal que aplicando-se o processo de Cayley-Prüfer sobre essa árvore obtemos  $\hat{f}$ , em outras palavras, a função  $\Psi$  é sobrejetora quando analisamos a mesma associada a grafos completos cujo o número de vértices é menor do que  $n$ .

Considere o conjunto  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Dado  $\hat{h} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in \wp$ , pode-se obter uma aresta em  $K_n$ , ligando-se  $a_1$  ao elemento  $s_1$ , digo, pode-se formar uma aresta  $e_1 = [s_1, a_1]$ , onde  $s_1$  é o menor elemento de  $N$  tal que  $s_1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$  (isso segue do processo de Cayley-Prüfer). Agora seja  $(a_2, \dots, a_{n-2})$  a sequência numérica com as  $n-3$  últimas coordenadas de  $\hat{h}$  (tal sequência existe pois  $n \geq 4$ ). Pela hipótese de indução, existe uma única árvore geradora  $\hat{T}$  de  $K_{n-1}$  (a menos de isomorfismo), cujo conjunto de vértices é  $N \setminus \{s_1\}$  ( $\#(V(\hat{T})) = n-1$ ), e tal que aplicando-se o processo de Cayley-Prüfer sobre  $\hat{T}$  resulta na sequência  $(a_2, \dots, a_{n-2})$ . É claro que  $\hat{T}$  é uma subárvore de um grafo isomorfo a  $K_n$ . Vamos mostrar que adicionando à  $\hat{T}$  o vértice  $s_1$ , juntamente com a aresta  $e_1 = [s_1, a_1]$ , obteremos uma árvore geradora  $T$  de  $K_n$ , tal que utilizando-se o processo de Cayley-Prüfer sobre essa árvore, obteremos  $\hat{h}$ , isto é,  $\Psi(T) = \hat{h}$  e  $\Psi$  será sobrejetora para  $n \geq 4$ , completando assim a prova desta proposição.

Seja  $T = \hat{T} \cup \{s_1, e_1\}$ . Note que  $T$  é um grafo com conjunto de vértices dado por  $V(T) = V(\hat{T}) \cup \{s_1\}$ , onde  $\#(V(T)) = (n-1) + 1 = n = \#(V(K_n))$  e  $a_1 \in V(\hat{T})$ , conjunto de arestas dado por  $E(T) = E(\hat{T}) \cup \{e_1\}$  e função de incidência dada por  $\Psi_T : E(T) \rightarrow V(T) \times V(T)$ , que aplica:  $\Psi_T(\hat{e}) = \Psi_{\hat{T}}(\hat{e})$  se  $\hat{e} \in E(\hat{T})$  e  $\Psi_T(e_1) = [s_1, a_1]$ .

Note que  $\hat{T}$  é conexo visto que é uma árvore, e além disso, existe um único caminho entre  $\hat{T}$  e  $s_1$ , dado pela única aresta  $e_1 = [s_1, a_1]$ , donde segue que todos os vértices de  $T$  estão conectados, e portanto  $T$  é conexo. Observe também que  $e_1$  é uma aresta de corte de  $T$ , pois  $\omega(T - e_1) = 2 > 1 = \omega(T)$ . Logo todas as arestas do grafo conexo  $T$  são de corte (as arestas de  $\hat{T}$  são cortantes pelo Teorema 2.11). Portanto, por esse mesmo teorema  $T$  é uma árvore geradora de  $K_n$ .

Por fim, aplicaremos o processo de Cayley-Prüfer a essa árvore geradora  $T = \hat{T} \cup \{s_1, e_1 = [s_1, a_1]\}$  de  $K_n$ . Na primeira etapa, escolhemos uma folha de  $T$  com a menor numeração, que, nesse caso é o  $s_1$  por construção, logo o primeiro termo da sequência CP será  $a_1$ . Em seguida, retire  $s_1$  e a aresta  $[s_1, a_1]$  de  $T$ , assim obtemos a subárvore  $\hat{T}$  de  $T$ . Agora pela hipótese de indução, aplicando-se o processo de Cayley-Prüfer a  $\hat{T}$ , obtemos a sequência  $(a_2, \dots, a_{n-2})$ . Portanto, utilizando-se o processo de Cayley-Prüfer sobre  $T$ , obtemos  $\Psi(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) = \hat{h}$ , o que mostra que  $\Psi$  é sobrejetora. Portanto  $\Psi$  é uma bijeção entre  $\Omega$  e  $\wp$ , como desejado.  $\square$

**Teorema 3.7.** *(Fórmula de Cayley) Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Considere  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices. Então o número de árvores geradoras de  $K_n$  é dado por  $n^{n-2}$ .*

*Demonstração.* Se  $n = 1$  então existe uma única árvore geradora em  $K_1$ , o grafo trivial, e o teorema está provado já que  $1^{1-2} = 1^{-1} = 1$ . Considere agora  $n \geq 2$ . Pela Proposição 3.6,  $\Psi : \Omega \rightarrow \wp$  é bijetora, logo  $\#(\Omega) = \#(\wp)$ . Agora como os elementos de  $\wp$  são seqüências numéricas da forma  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ , com  $t_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos pelo princípio multiplicativo de contagem que  $\#(\wp) = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{n-2} = n^{n-2}$ , o que prova o teorema.  $\square$

## 4 Processo inverso de Cayley-Prüfer

Nesta seção será apresentado o **Processo Inverso de Cayley-Prüfer**, que é uma maneira distinta da que fizemos na Seção 3, de mostrar que a aplicação  $\Psi$  é sobrejetora, em outras palavras, tal algoritmo é uma maneira precisa de construção das árvores geradoras de  $K_n$  a partir de seqüências de Cayley-Prüfer de  $\wp$ . Para  $n = 2$ , o procedimento é claro, e foi discutido na demonstração do Lema 3.3, já que dada a seqüência vazia, construímos a árvore geradora de  $K_2$  pela simples ligação dos vértices 1 e 2, por uma única aresta. Se  $n \geq 3$ , tome

$$\hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \in \wp.$$

Vamos encontrar  $T \in \Omega$  tal que  $\Psi(T) = \hat{t}$ , ou seja, vamos exibir um método de construir  $T$ , uma árvore geradora de  $K_n$ , tal que aplicando-se o processo de Cayley-Prüfer a esta árvore obteremos  $\hat{t}$ . As notações a seguir e a ordenação do conjunto de vértices são como nas seções anteriores.

### Algoritmo inverso:

**Passo 1:** Se a seqüência  $\hat{t} = \hat{t}_1 = \emptyset$ , pare e faça  $T = \{1, 2, [1, 2]\}$  a árvore desejada. Caso contrário siga ao passo 2;

**Passo 2:** Considere  $s_1$  o menor elemento de  $V(K_n) = N = \{1, 2, \dots, n\}$  que não está em  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-2}\}$ . Conecte  $s_1$  e  $t_1$  formando  $e_1$ , uma das arestas de  $T$ ;

**Passo 3:** Se a seqüência remanescente deste processo for vazia, pare e faça  $T = \{s_1, t_1, a, [s_1, t_1], [a, t_1]\}$ , onde  $a$  é um vértice diferente de  $s_1$  e  $t_1$ . Caso contrário, a seqüência e o conjunto de vértices remanescentes serão  $\hat{t}_2 = (t_2, \dots, t_{n-2})$  e  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{s_1\}$ , respectivamente. Feito isso, volte ao passo 2, isto é, tome  $s_2$  o menor vértice de  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{s_1\}$  que não está em  $\{t_2, \dots, t_{n-2}\}$  e o conecte com  $t_2$ , para obtermos  $e_2$ , uma das arestas de  $T$ ;

**Passo 4:** Observe que a próxima aresta  $e_3$ , caso exista, é construída tomando  $s_3$  como sendo o menor vértice de  $N \setminus \{s_1, s_2\}$  que não está em  $\{t_3, \dots, t_{n-2}\}$  e o conectando a  $t_3$ . O processo inverso de Cayley-Prüfer vai ser repetido até obtermos como seqüência remanescente a seqüência vazia. Nesta etapa, teremos produzidas  $n - 2$  arestas:  $e_1 = [s_1, t_1], e_2 = [s_2, t_2], \dots, e_{n-2} = [s_{n-2}, t_{n-2}]$  de  $T$ , mas pelo Teorema 2.6,  $T$  possui  $n - 1$  arestas, sendo assim para obtermos a árvore geradora  $T$  de  $K_n$ , devemos conectar os vértices terminais  $a, b \in V(K_n)$ , que não estão no conjunto  $\{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}\}$ , obtendo assim a última aresta de  $T$ .

Portanto, ao final do processo, obteremos

$$T = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}, a, b\} \cup \{[s_1, t_1], [s_2, t_2], \dots, [s_{n-2}, t_{n-2}], [a, b]\},$$

a árvore geradora de  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), associada a seqüência  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ .

### 4.1 Funcionalidade do algoritmo

Mostraremos que o grafo  $T$  como construído no algoritmo é uma árvore. O caso  $n = 2$  é trivial, desde que  $T = \{a, b, [a, b]\}$ . Considere  $n \geq 3$ . Inicialmente mostraremos que  $T$  é acíclico. Para tanto, suponha que exista um ciclo  $C$  em  $T$ . Pelo passo 2 do algoritmo, o vértice  $s_1$  é uma folha de  $T$ , assim,  $C$  não contém  $s_1$  e  $[s_1, t_1]$ . Portanto  $C$  está contido no grafo  $T_1 = T \setminus \{s_1, [s_1, t_1]\}$ . Novamente usando o passo 2 do algoritmo, segue que  $s_2$  é uma folha de  $T_1$ , desta forma,  $C$  não passa por  $s_2$  e  $[s_2, t_2]$ . Portanto  $C$  está contido no grafo  $T_2 = T \setminus \{s_1, s_2, [s_1, t_1], [s_2, t_2]\}$ . Aplicando o processo  $n - 2$  vezes, concluímos que  $C$  está contido em

$$T_{n-2} = T \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}, [s_1, t_1], [s_2, t_2], \dots, [s_{n-2}, t_{n-2}]\} = \{a, b, [a, b]\},$$

um absurdo, pois  $T_{n-2}$  é uma árvore. Portanto  $T$  é um grafo acíclico contendo  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Segue pelo Teorema 4.1 em Harary (1969) que  $T$  é uma árvore.

De acordo com a bijeção  $\Psi$  estabelecida na Seção 3 (Proposição 3.6), mostraremos que o processo inverso de Cayley-Prüfer associa a seqüência  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$  com a árvore geradora  $T$ , desta seção. Os casos  $n = 2, 3$  são triviais e fazem parte dos conteúdos dos passos 1 e 3 do algoritmo. Considere  $n \geq 4$ . Observe que  $s_1, s_2, \dots, s_{n-2}$  são folhas nas subárvores remanescentes de  $T$  a cada iteração (isso segue pela construção de  $T$ ). Como  $s_1$  é o menor vértice de grau 1 em  $T$ , tomamos o vértice adjacente a ele, digamos  $t_1$ , como a primeira coordenada de  $\Psi(T)$ . Delete  $s_1$  e  $[s_1, t_1]$  de  $T$ , obtendo-se a subárvore remanescente  $T_1$ . Pelo algoritmo do processo inverso,  $s_2$  não aparece em  $\{t_2, \dots, t_{n-2}\}$ ,  $s_2 \neq s_1$ , e além disso  $s_2$  está ligado unicamente a  $t_2$ , logo

escolha para a segunda coordenada de  $\Psi(T)$ , o elemento  $t_2$ . Repetimos esse processo até obtermos as duas últimas arestas remanescente de  $T$ , que são  $[s_{n-2}, t_{n-2}]$  e  $[a, b]$ . Até essa etapa,  $\Psi(T)$  tem como coordenadas:  $t_1, t_2, \dots, t_{n-3}$ . Agora, como  $s_{n-2}$  é uma folha do grafo remanescente até essa etapa, escolha  $t_{n-2}$  para a última coordenada de  $\Psi(T)$ , restando  $[a, b]$  como a aresta remanescente do algoritmo inverso, logo o algoritmo para, e assim  $\Psi(T) = \hat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ , como queríamos provar.

**Exemplo 4.1.** Considere o grafo completo  $K_5$ . Pela Fórmula de Cayley temos  $5^3 = 125$  árvores geradoras distintas associadas a esse grafo. Cada uma dessas árvores geradoras está associada a uma única sequência de Cayley-Prüfer (veja Proposição 3.6). Neste exemplo, o conjunto dessas sequências é:

$$\wp = \{(t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Dada uma sequência no conjunto  $\wp$ , iremos construir passo a passo, a árvore geradora associada a essa sequência, utilizando-se do algoritmo apresentado nesta seção:

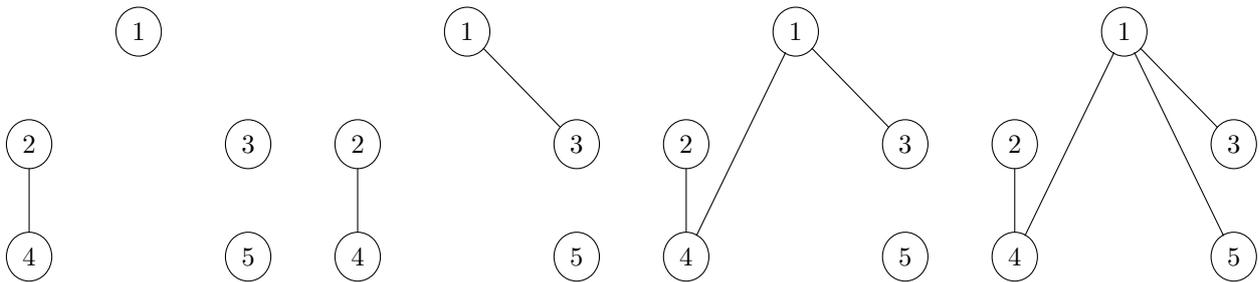


Figura 8: Construção da árvore geradora associada a sequência de Cayley-Prüfer (4,1,1).

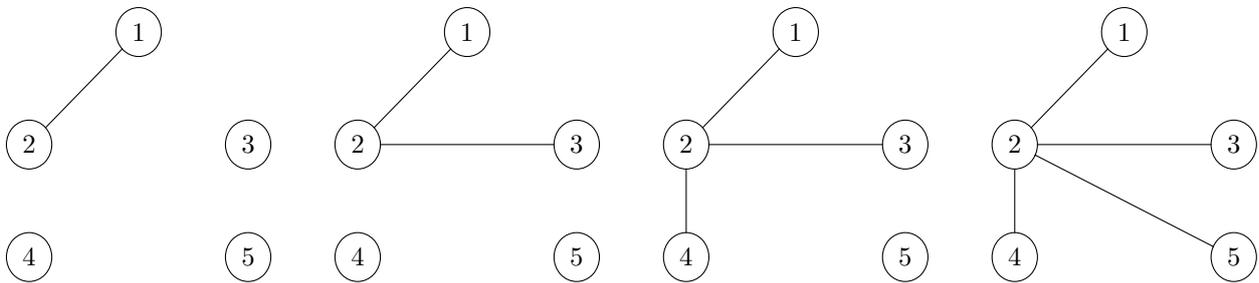


Figura 9: Construção da árvore geradora associada a sequência de Cayley-Prüfer (2,2,2).

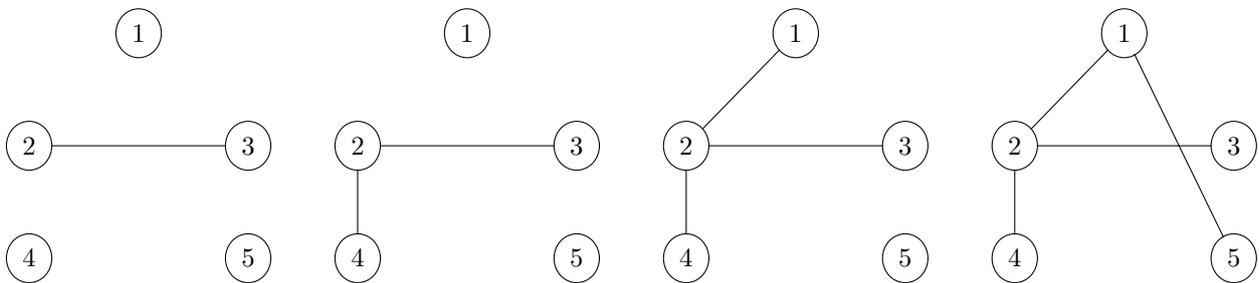


Figura 10: Construção da árvore geradora associada a sequência de Cayley-Prüfer (2,2,1).

Na figura 10, note que as arestas  $[1,5]$  e  $[2,3]$  não tem vértices em comum, além disso, não existe ciclos no respectivo grafo.

**Observação 4.2.** Se retirarmos da hipótese da Proposição 3.6 o fato de que o grafo considerado é completo, então a função  $\Psi$  desta proposição não será mais sobrejetora. Para mostrar isso, basta considerar um grafo  $G$ , com 4 vértices (representado abaixo de forma geométrica). Pode-se notar, a partir do processo inverso de Cayley-Prüfer, que a sequência  $(1,1)$  não está associada a nenhuma árvore geradora de  $G$ .

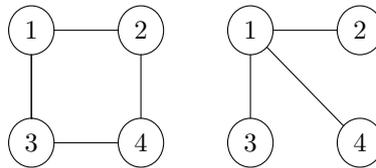


Figura 11: Grafo  $G$  e árvore associada a sequência de Cayley-Prüfer  $(1,1)$ , respectivamente.

**Observação 4.3.** Aplicando-se o processo inverso de Cayley-Prüfer à sequência  $\hat{t} = (7, 7, 1, 1, 1)$  obtemos a árvore geradora  $T$  de  $K_7$ , como na figura 12:

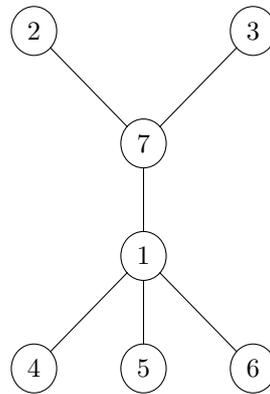


Figura 12: Grafo  $G$  e árvore geradora associada a sequência de Cayley-Prüfer, respectivamente.

Note que os vértices terminais  $a$  e  $b$  de  $T$ , são respectivamente 1 e 7, podendo ocorrer tais escolhas, em ordem trocada. Nos exemplos das figuras 8, 9 e 10, as respectivas arestas  $[a, b]$  possuem como um de seus vértices, uma folha de  $T$ . No entanto, isso nem sempre se verifica, pois pela Proposição 3.2, temos  $d_T(7) = 3$  e  $d_T(1) = 4$ , e portanto esses vértices não são folhas de  $T$ .

## 5 Conclusões Finais

Neste trabalho, abordamos os conceitos fundamentais sobre a teoria dos grafos e suas propriedades. Foi feito um estudo sobre a fórmula de Cayley para a contagem de árvores geradoras de um grafo completo. Para um grafo com  $n$  vértices, constatou-se que o número de árvores geradoras é dado pela fórmula  $n^{n-2}$ . A demonstração proposta por Prüfer em 1918, para essa contagem, é dada por um algoritmo que se baseia na construção de sequências numéricas de acordo com uma numeração dos vértices do grafo dado, estabelecendo uma bijeção entre o conjunto de sequências CP e o número de árvores geradoras do grafo completo.

Nos baseamos nos conceitos contidos em Bondy e Murty (1982) e Harary (1969), para a elaboração de uma demonstração minuciosa dos resultados, de forma rigorosa e original, onde usamos como ferramenta principal o princípio de indução finita. Por fim, apresentamos um algoritmo inverso do processo de Cayley-Prüfer para obtenção das árvores geradoras de um grafo completo.

## Referências

- Abu-Sbeih, M. Z. (1990). On the number of spanning trees of  $K_n$  and  $K_{m,n}$ . *Discrete Mathematics, North-Holland*, 84, 205–207.
- Bondy, J. A., Murty, U. R. S. (1982). *Graph theory with applications*, 5º edn. New York: North Holland.
- Domingues, H. H., Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna*, 4º edn. São Paulo: Atual.

- Fracasso, P. (2008). Análise de técnicas para amostragem e seleção de vértices no planejamento probabilístico de mapa de rotas. Dissertação de mestrado, Escola politécnica da USP.
- Harary, F. (1969). *Graph Theory*, 1º edn. Menlo Park: Addison Wesley Pub. Co. Inc..
- Júnior, E. R. H., Nicoletti, M. C. (2006). *Fundamentos da teoria dos grafos para computação*, 1º edn. São Carlos: Edufscar.
- Konzen, D. C. (1997). *Automata and computability*, 1º edn. Springer New York.
- Orsini, L. Q., Consonni, D. (2002). *Curso de circuitos elétricos*, 2º edn. Edgard Blücher Ltda.
- Wilson, R. J. (1996). *Introduction to graph theory*, 4º edn. London: Prentice-Hall.
- Wu, B. Y., Chao, K. (2004). *Spanning trees and optimization problems*, 1º edn. Chapman & Hall/CRC Press, USA.

**Anderson Luiz Pedrosa Porto**

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil  
Instituto de Ciências Exatas, Email: [ander.porto@ict.ufvjm.edu.br](mailto:ander.porto@ict.ufvjm.edu.br)

Participação do autor: demonstrações, exemplos e ilustrações

**Vagner Rodrigues de Bessa**

Universidade Federal de Viçosa, Brasil

Instituto de Ciências Exatas, Email: [vrbessa@gmail.com](mailto:vrbessa@gmail.com)

Participação do autor: demonstrações, exemplos e ilustrações

**Matheus Pereira da Silva Aguiar**

Email: [matheuspereira@live.com](mailto:matheuspereira@live.com)

Participação do autor: desenvolveram um trabalho de conclusão de curso relacionado ao tema.

**Mariana Martins Vieira**

Email: [marianamartins.v@outlook.com](mailto:marianamartins.v@outlook.com)

Participação do autor: desenvolveram um trabalho de conclusão de curso relacionado ao tema.