Ciência e Natura, Santa Maria, 14: 65 - 70, 1992.

UMA REVISÃO DA TEORIA ESTATÍSTICA DA DIFUSÃO TURBULENTA

Gervásio A. Degrazia e Osvaldo L.L. Moraes

Departamento de Física, Centro de Ciências Naturais e Exatas.UFSM.
Santa Maria, RS.

Resumo

Neste trabalho apresenta-se a teoria de difusão estatística de Taylor. O artigo aborda com ênfase especial a relação entre dispersão e o espectro de energia turbulenta. Sugere-se um método de determinação dos coeficientes de difusão turbulenta.

Summary

DEGRAZIA, Gervásio A. e MORAES,Osvaldo L.L. STATISTICAL THEORY OF TURBULENT DIFFUSION. Ciência e Natura, 14: 65-70, 1992.

The Taylor statistical theory is presented wiht special emphasis in the relationship between turbulent dispersion and energy spectra. New turbulent diffusion coeficients based on parameters which describe the physics of the atmospheric boundary layer. are defined.

Introdução

A dispersão de uma substância abandonada em um fluxo turbulento não pode ser descrita por um único modelo ou teoria. A maioria dos métodos empregados na descrição da difusão turbulenta, apesar de revelarem fatos e tendências gerais do processo. exibem um intervalo limitado de aplicação. Responsável por esta complexidade é a natureza do fluxo turbulento. que contém um número muito grande de diferentes tamanhos de turbilhões. ou escalas de movimento, todos acoplados através do caráter não linear do fenômeno. Apesar de todas estas dificuldades, as teorias estatísticas de difusão turbulenta apresentam clareza física e um bem estabelecido embasamento teórico. Tais modelos indicam as limitações de vários esquemas práticos e permitem que o cálculo da dispersão turbulenta de contaminantes seja realizado em termos de medidas atmosféricas locais.

O objetivo principal no estudo da dispersão de uma substância (s) através de um fluxo turbulento é relacionar o desenvolvimento das distribuições e fluxos de concentração com o campo de velocidade turbulenta.

Dois esquemas são considerados na análise do transporte turbulento: a aproximação Euleriana e a Lagrangeana. No esquema Euleriano formulam-se equações de conservação para volumes de controle fixos no fluido; no esquema Lagrangeano formula-se um modelo de trajetórias aleatórias para o movimento das partículas de fluido. O elemento ou partícula de um fluido é um pequeno volume de controle que viaja na velocidade local do meio fluido. A sua dimensão é grande quando comparada com as escalas moleculares ($\underline{C}10^{-6}m$) e pequena em relação a menor escala do movimento, a microescala de Kolmogorov, que na atmosfera é 10^{-3}m. A medida que as partículas de fluido viajam no fluxo, moléculas abandonam ou passam a integrar o volume de controle, alterando assim, por difusão molecular, a concentração de um dado escalar. Este trabalho objetiva revisar a teoria estatística de difusão turbulenta e exibir alguns parâmetros físicos micrometeorológicos relevantes a este esquema. Baseado em argumentos de simplicidade, é útil iniciar a discussão do transporte turbulento por negligenciar a difusão molecular.

A equação da difusão-adveção; A parametrização do fluxo turbulento de concentração.

O fluxo turbulento de uma quantidade escalar, como a concentração (Kg/m^3), é frequentemente descrito como proporcional ao gradiente da concentração média:

$$F_i = \overline{u'_i c'} = -k_{ij}\frac{\partial \overline{c}}{\partial X_j} \tag{1}$$

Esta suposição, juntamente com a equação da continuidade, conduz ao conhecido modelo de transporte por grandiente:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \frac{\overline{U}_i \partial \overline{c}}{\partial X_i} = rc\frac{\partial^2 \overline{c}}{\partial X_i^2} + Sc + \frac{\partial}{\partial X_i}\left(k_{ij}\frac{\partial \overline{c}}{\partial X_j}\right) \tag{2}$$

Na equação de difusão-advecção acima, o primeiro termo representa a mudança temporal local da concentração média, o segundo termo descreve a adveção pelo vento médio, o terceiro termo representa a difusão molecular média do contaminante, o quarto termo é um termo de fonte e o quinto termo é o divergente do fluxo turbulento de concentração.

No modelo de fechamento, dado por (1), a ignorância acerca da física da covariança estatística $\overline{u_i'c'}$ é transferida para os coeficientes de difusão turbulentos K_{ij}. Uma parametrização deste tipo é útil quando K_{ij} pode ser inteiramente definido em termos do campo de velocidade turbulenta.

A teoria de difusão estatística de Taylor; Funções correlações e espectros

Considera-se o movimento de um partícula infinitesimal (sem massa), transportada no ar por flutuações turbulentas da velocidade. Se a partícula abandona a origem em t=o, a sua posição Z em um tempo qualquer t é dada por:

$$Z(t) = \int_0^t w'(t')dt' \tag{3}$$

Assume-se o movimento apenas ao longo da direção Z e que a velocidade média nesta direção é zero (w=o). Por multiplicar (3) pela velocidade turbulenta w(t) obtêm-se:

$$Z(t)w'(t) = Z(t)\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Z^2\right) = \int_0^t w'(t')w'(t)dt' \tag{4}$$

Tomando a média de (4) sobre um grande número de experimentos independentes (uma longa série de abandonos de partículas), resulta:

$$\overline{Z(t)w'(t)} = \overline{Z(t)\frac{dZ}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{Z^2}\right) = \int_0^t \overline{w'(t')w'(t)}dt' \tag{5}$$

A equação (5) acima possui a dimensão de uma difusividade (m^2/s). $\overline{w'(t')w'(t)}$ representa a correlação entre as componentes verticais da velocidade turbulenta da partícula em dois instantes diferentes. Se a velocidade turbulenta $w'(t)$ é uma função aleatória estacionária ($w'(t)$ descreve um processo aleatório, porém estacionário), a função correlação R_w é uma função da diferença de tempo $\varepsilon = t - t'$.

$$R_w(\varepsilon) = \overline{w'(t')w'(t)} = \overline{w'^2}\rho_w(\varepsilon) \tag{6}$$

onde o coeficiente de correlação satisfaz $\rho w(0) = 1$. A substituição de (6) em (5) resulta em:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{Z^2}\right) = \int_0^t R_w(\varepsilon)d\varepsilon = \overline{w'^2}\int_0^t \rho_w(\varepsilon)d\varepsilon \tag{7}$$

e,

$$\overline{Z^2} = 2\int_0^t (t-\varepsilon)R_w(\varepsilon)d\varepsilon = 2\overline{w'^2}\int_0^t (t-\varepsilon)\rho_w(\varepsilon)d\varepsilon \tag{8}$$

As equações (7) e (8) definem a dispersão turbulenta em termos de funções de corrrelação. Para dois casos limites a expressão(7) torna-se simples: a)Se $\rho_w(\varepsilon)$ vai a zero quando $\zeta \to \infty$, a integral em (7) aproxima-se de um valor constante. Esta quantidade é chamada a escala integral Lagrangeana de tempo,

$$t_{lw} = \int_0^\infty \rho_w(\varepsilon)d\varepsilon \tag{9}$$

para $\varepsilon >> t_{1w}$ a razão de dispersão turbulenta pode ser aproximada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{Z^2}\right)_{t\to\infty} = \overline{w'^2}\int_0^\infty \rho_w(\varepsilon)d\varepsilon = \overline{w'^2}t_{lw} \tag{10}$$

O coeficiente de difusão turbulento, definido por (10), é o produto de variança da velocidade turbulenta pela escala integral (o intervalo de correlação). Por escrever (8) na forma:

$$\overline{Z^2} = 2\overline{w'^2}t\int_0^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)\rho_w(\varepsilon)d\varepsilon \tag{11}$$

O comportamento de $\overline{Z^2}$ para $t \to \infty$ deixa-se avaliar mais facilmente. Caso $t >> t_{1w}$, o filtro $(1 - \frac{\varepsilon}{t})$ é inefectivo, porque seu valor permanece próximo a (1) para todos os valores de ε nos quais $\rho_w(\varepsilon)$ difere apreciavelmente de zero. Assim (11) é igual a:

$$\overline{Z^2}_{t\to\infty} = 2\overline{w'^2}t\int_0^\infty \rho_w(\varepsilon)d\varepsilon = 2\overline{w'^2}tt_l \tag{12}$$

b) Se $\rho_w = 1$ quando $\varepsilon \to 0$ resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{Z^2}\right)_{t\to 0} = \overline{w'^2}t \tag{13}$$

e

$$\left(\overline{Z^2}\right)_t \to 0 = 2\overline{w'^2}t^2 \tag{14}$$

As relações (10), (12), (13) e (14) são válidas respectivamente nos limites assimptóticos de grandes e pequenos tempos de difusão. Na prática, em muitas aplicações, o conhecimento de $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\overline{Z^2})$ e z^2 é exigido para todos os valores de t.

A quantidade $K_{zz} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{Z^2}\right)$é o coeficiente de difusão vertical. Deve ficar claro que a difusividade é uma propriedade do fluxo turbulento e portanto não pode ser descrito a priori sem um conhecimento da estrutura do fluxo.

Um espectro é a transformada de Fourier de uma função correlação. No contexto desta discussão, o emprego de transformadas de Fourier cosseno é apropriado. Define-se o par de transformada de Fourier,

$$R_w(\varepsilon) = \int_0^\infty F_w(n)cos2\pi n\varepsilon dn \tag{15}$$

$$F_w(n) = 4\int_0^\infty R_w(\varepsilon)cos2\pi n\varepsilon d\varepsilon \tag{16}$$

A transformada de $R_w(\varepsilon), F_w(n)$ é chamada o espectro de energia, porque o produto $F_w(n)$ dn representa a contribuição para a variança provocada pelas flutuações no intervalo de largura dn centrado em n. Para $\varepsilon = 0$,

$$\sigma_w^2 = R_w(0) = \overline{w'^2} = \int_0^\infty F_w(n)dn \tag{17}$$

Este resultado confirma que a variança da velocidade turbulenta vertical é obtida quando o espectro da energia turbulenta é integrado sobre todas as frequências de interesse. Para n=0

$$F_w(0) = 4\int_0^\infty R_w(\varepsilon)d\varepsilon = 4\overline{w'^2}\int_0^\infty \rho_w(\varepsilon)d\varepsilon = 4\overline{w'^2}t_{lw} \tag{18}$$

de modo que o valor do espectro na origem define o coeficiente de difusão turbulento. Além do mais (16) fornece a escala integral Lagrangeana de tempo, um parâmetro micrometeorológico importante em problemas de difusão turbulenta. Neste ponto é importante introduzir a seguinte questão: Como as diferentes frequências do movimento turbulento contribuem para a dispersão de contaminates? Para responder tal questão vamos considerar a equação (8) para $\overline{z^2}$. Por substituir (15) em (8) obtêm-se :

$$\overline{Z^2} = 2\int_0^t (t-\varepsilon)\left[\int_0^\infty F_w(n)cos2\pi n\varepsilon dn\right]d\varepsilon \tag{19}$$

e

$$\overline{Z^2} = t^2\int_0^\infty F_w(n)\left[\frac{sen(n\pi t)}{n\pi t}\right]^2 dn \tag{20}$$

Para grandes tempos de difusão, o filtro em (20) é muito estreito, porque seu primeiro zero ocorre em $n = \frac{1}{t}$. Neste caso o filtro seleciona $F_w(0)$, e descarta o movimento turbulento associado a frequências mais altas. Para $t \rightarrow 0$ a integral em (20) é aproximada por:

$$\overline{Z^2} = t^2 F_w(0)\int_0^\infty \left[\frac{sen(n\pi t)}{n\pi t}\right]^2 dn = 2\overline{w'^2}t_{lw}t \tag{21}$$

De (21) conclui-se que para grandes tempos a difusão turbulenta depende do comportamento do espectro na origem. Por derivar (20) em relação ao tempo uma expressão para o coeficiente de difusão turbulento pode ser obtida,

$$k_{zz} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F_w(n)\frac{sen(2\pi nt)}{n}dn \tag{22}$$

Para grandes tempos de difusão o filtro em (22) seleciona F_w (0), de modo que,

$$k_{zz} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)F_w(0)\int_0^\infty \frac{sen(2\pi nt)}{n}dn = \overline{w'^2}t_{lw} \tag{23}$$

O aumento de K_{zz} com o tempo, como descrito por (22), deve-se ao fato de que as oscilações de baixa frequência tornam-se cada vez mais efetivas em dispersar cada partícula acerca da sua posição original. O comportamento de (20) para pequenos tempos pode agora ser analisado. Se t é muito pequeno, o primeiro zero do filtro ocorre em altas frequências. Como o filtro para $n \rightarrow 0$ é igual a 1 , a primeira aproximação para (20) em $t << t_{1w}$ é :

$$\overline{Z^2} = t^2\int_0^\infty F_w(n)dn = \overline{w'^2}t^2 \tag{24}$$

Para pequenos valores de t todas as frequências do movimento turbulento contribuem para o processo de dispersão. Na equação (22), quando t é muito pequeno, o primeiro zero da função filtro ocorre em altas frequências. Como o filtro quando $n \rightarrow 0$ é igual a $2\pi t$, a primeira aproximação para (22) em $t << t_{1w}$ é:

$$K_{zz} = \overline{w'^2}t \tag{25}$$

Para um intervalo de tempo muito curto, após o instante de abandono do contaminante, a dispersão turbulenta segue as relações (24) e (25). Estas relações não encerram a evolução da turbulência, porque no instante do abandono o estágio inercial da dispersão é determinado pelas flutuações de velocidade na fonte. A medida que o tempo passa, a função filtro torna-se cada vez mais estreita e começa a remover energia da trubulência nas regiões de altas frequências.

As grandezas Lagrangeanas $\overline{w_l'^2}$, ρ_{lw} (ε) e $F_{1w}(n)$ descrevem as propriedades do movimento de partículas de fluido. Uma medida Lagrangeana é realizada quando uma pequena parcela do fluido, de alguma maneira, é identificada e perseguida através do fluido turbulento. Uma segunda forma de medida é conhecida como Euleriana. Neste caso as propriedades do movimento turbulento são medidas por instrumentos cujas posições são fixas em relação ao fluxo, como por exemplo, um anemômetro cativo a uma torre micrometeorológica. Como a difusão turbulenta é causada pela dispersão de pequenas parcelas do fluido, ela é melhor descrita em um sistema de referência Lagrangeano. Na prática, normalmente, deve-se predizer a difusão Lagrangeana a partir de medidas Eulerianas. Um problema difícil e de grande importância prática é a descoberta de relações entre grandezas estatísticas Lagrangeana e Eulerianas . Uma suposição simples, mas muito útil, devido a Gifford(1955) e Hay e Pasquill(1959), assume a forma da função correlação Lagrangeana é identica a Euleriana. Estas duas funções, descritas em distintos sistemas de referência, são deslocadas por um fator de escala β. A mesma suposição é válida para os espectros de energia. Matematicamente, esta suposição pode ser expressa como:

$$R_{lw}(\beta_w t) = R_{ew}(t) \tag{26}$$

$$nF_{lw}(n) = \beta_w n S_w(\beta_w n) \tag{27}$$

onde β_w é definido como a razão entre as escalas de tempo Lagrangeana e Euleriana,

$$\beta_w = \frac{T_{lw}}{T_e w} \tag{28}$$

substituição de (27) nas relações (20) e (22) conduz respectivamente as seguintes equações:

$$\overline{Z^2} = t^2 \int_0^\infty S_w(n) \left[\frac{sen \frac{n\pi t}{\beta_w}}{\frac{n\pi t}{\beta_w}} \right]^2 dn \tag{29}$$

$$k_{zz} = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \beta_w \int_0^\infty S_w(n) \left[\frac{sen \frac{2\pi n t}{\beta_w}}{n} \right] dn \tag{30}$$

O fator de escala β_w é obtido por Wandel e Kofoed Hanse (1962),

$$\beta_w = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\frac{\overline{u}}{\sigma_w} \tag{31}$$

com $\overline{u}$ a velocidade do vento médio.

Coeficientes de difusão na camada limite atmosférica convectiva e estável

No caso de poluente abandonados por fontes pontuais continuas elevadas, o processo de difusão turbulento em regiões próximas a fonte é distinto daquele que ocorre a grandes distâncias. Em regiões próximas a fonte, as trajetórias das partículas do fluido são determinadas pelas propriedades estatísticas da turbulência no ponto de emissão, isto é, elas são funções diretas das posições e das velocidades iniciais. Em termos matemáticos, a difusão turbulenta em regiões vizinhas a fonte pode ser modelada por uma equação de difusão-advecção com os coeficientes de difusão dependentes de Langevin com as escalas de tempo Lagrangeanas e as varianças das velocidades turbulentas especificadas (Durbin, 1983). Em regiões distantes da fonte, por causa do já longo tempo de difusão, este efeito não Markoffiano desaparece, de modo que o movimento das partículas do fluido torna-se completamente aleatório e K_{zz} será uma função apenas da turbulência. Degrazia (1988), deduz expressões universais para os coeficients de difusão na camada limite convectiva CLC e estável CLE:

$$\frac{k_{zz}}{w_\star Z_i} = 0,096 \left(\frac{\psi}{q_i^4}\right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{sen[3,972(\psi q_i^2)^{1/3} X n']}{n'(1+n')^{5/3}} dn' \tag{32}$$

$$\frac{k_{zz}}{u_\star h} = \frac{0,207(1-Z/h)^{\alpha_1/2} Z/h}{(1+3,72h/h_4)} \int_0^\infty \frac{sen\left[5,564(1-Z/h)^{\alpha_1/2} h/Z\phi\chi' n'\right]}{\left[1+(n')^{5/3}\right] n'} dn' \tag{33}$$

onde $\phi = \left(1 + 3,7\frac{Z}{h}\frac{h}{4}\right)$.

Nas equações acima o efeito de memória, presente no processo de difusão inicial, é modelado pela introdução das distâncias adimensionais χ e χ'.

Estas relações descrevem a dispersão turbulenta nas regiões próximas intermediárias e distantes de uma fonte pontual contínua. (32) e (33) contém basicamente todos os parâmetros físicos importantes no processo de transporte turbulento. $u_\star e w_\star$ são respectivamente as velocidades características nas camadas limite estável e convectiva, q_i é um parâmetro associado ao comprimento de onda dos turbilhões convectivos e $h/4$ expressa a estabilidade na CLE.

conclusão

Apresenta-se algumas aproximações que descrevem o processo de transporte turbulento. A ênfase principal foi dada a aproximação Euleriana, onde a equação de difusão-advecção foi analisada. Desenvolve-se o modelo estatístico de difusão enfatizando-se na abordagem a relação existente entre o espectro de energia e o caráter difusivo da turbulência na camada limite atmosférica. Um fechamento foi proposto para o fluxo turbulento de concentração em termos de coeficientes de difusão. As difusividades além de contêrem os parâmetros físicos que quantificam o estado turbulento de atmosferas instáveis e estáveis, descrevem a dispersão turbulenta nas regiões próximas, intermediárias e distantes de uma fonte pontual contínua.

References

[1] G. A. Degrazia,& O. L. L. Moraes,1989.*Simulação numérica da dispersão de poluentes em camadas limites planetárias convectivas e estável.* Revista Brasileira de Meteorologia,4:275-287.

[2] P. A. Durbin,1983.*Stochastic differential equations and trubulent dispersion.* Nasa reference publication 1103.

[3] F. A. Gifford,1955.*A simultaneous Lagrangian - Eulrian turbulence experiment.* Monthly Weather Review,83:293.

[4] J. S. Hay,& F. Pasquill,1959.*Difussion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence.Atmospheric Diffusion and Air Polution,*ed F.N. Frenkiel and P.A. Sheppard,Advances in Geophysics,6,345, Academis Press.

[5] T. Mizuno,O. Yokoyama, & A. Yasuraoka,1983.*On the vertical diffusion from elevated sources in the atmospheric boundary.* layer.J. Meteor. Soc. Japan,61:414-425.

[6] C. F. Wandel & O. Kofoed - Hansen,1962. *On the Eulerian- Lagrangian transform in the statistical theori of turbulence.*J. Geophyus. Res.,67:3089-3093.

[7] G. I. Taylor,1921.*Diffusion by continuous movements* .Proc.London Math. Soc.20:196 - 212