SISTEMA GEOMÉTRICO NÃO-EUCLIDIANO

Marli Basso.
Departamento de Matemática. CCNE. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Este artigo aborda o desenvolvimento da geometria não-euclidiana, abrangendo o trabalho dos principais matemáticos que contribuíram com esta nova descoberta, enntre eles, Saccheri, Gauss, Lobachevsky, Bolyai e Riemann.

SUMMARY

BASSO, M., System Geometric No Euclidean. Ciência e Natura, 13: 45-53, 1991.

In this paper we approach the historical development of the geometry no-euclidean. It includes the work of the main mathematical that contribute with this new discovery. We approach Saccheri, Gauss, Lobachevsky, Bolyai e Riemann.

ABORDAGEM HISTÓRICA

O sistema geométrico euclidiano reinou absolutamente desde antes de Cristo até quase nossos dias. Porém, ao longo destes séculos, paralelamente às glórias e elogios à obra de Euclides Os Elementos, na qual está sistematizada toda a geometria da Antigüidade, também lhe foram feitos vários questionamentos e críticas. Isto, aconteceu em relação ao quinto postulado, enunciado no livro I desta obra, como:

> Se uma reta interceptando duas outras retas, forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos. (Aaboe, 1984, p. 58).

As dúvidas e questionamentos sobre este postulado levaram inúmeros matemáticos a dedicarem-se a tal questão. Estes procederam de distintas maneiras em suas buscas, para eliminar a dificuldade contida no postulado da teoria euclidiana.

Após muitos esforços e tentativas de lidar com este quinto postulado, o resultado é a conquista de um novo sistema geométrico, porém até esta conquista, como se refere Francisco Vera, foram gastos montanhas de papel e mares de tinta.

O modelo geométrico não-euclidiano surge unicamente de abstração humana, totalmente desvinculado da base empírica, sendo, portanto, um produto apenas do intelecto humano. A geometria não-euclidiana é uma geometria bem mais ampla, mais geral, abrangendo todo o Universo em que vivemos.

> A geometria não-euclidiana não se faz para contradizer a geometria euclidiana. É, antes, uma espécie de fator adjunto que permite a totalização, o acabamento do pensamento geo-

> métrico, a absorção numa pangeometria. Constituída como guarnição da geometria euclidiana, a geometria não-euclidiana desenha de fora, com uma luminosa precisão, os limites do pensamento antigo. O mesmo acontecerá com todas as formas novas do pensamento científico que vêm a posteriori projetar uma luz recorrente sobre as obscuridades dos conhecimentos incompletos. (Bachelard, 1986, p. 13).

Desde os tempos de Euclides, o quinto postulado perturbou muito estudiosos, pois este não parecia auto-evidente, característica dos demais postulados euclidianos, além de ser bastante complexo e menos claro. Mesmo admitindo que o principal objetivo da organização dos fatos goemétricos, em Os Elementos, fossem exibi-los de maneira clara, num sistema rigorosamente dedutivo, tal postulado parecia fora de contexto, dada a sua complicada forma. Junto a estas razões e à preocupação observada na referida obra, Euclides quase não o utilizou nas demonstrações de suas proposições. Muitos matemáticos lançaram seus esforços para solucionar o problema das paralelas, levando praticamente vinte séculos para que a razão fosse dada a Euclides.

O desenvolvimento histórico do sistema geométrico não-euclidiano é o resultado das entativas de lidar com as dificuldades deste postulado de Euclides. Podemos classificar esta evolução histórica em quatro fases distintas:

- Tentativas de demonstrações diretas para o postulado euclidiano
- Demonstração por redução ao absurdo
- Criação definitiva da geometria não-euclidiana
- Interpretações concretas desta em relação com outros ramos da matemática.

Na primeira fase classificam-se os estudos e realizações ocorridas desde o século I aC. até praticamente o século XVII, que são trabalhos anteriores aos do matemático italiano Saccheri.

A segunda fase do desenvolvimento histórico da geometria não-euclidiana foi marcada pelo matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1773) e pelo matemático suiço J. H. Lambert (1728-1777). Saccheri, provavelmente, teria chegado à descoberta da nova geometria, caso não tivesse se perturbado pela exagerada paixão por Euclides.

Na terceira fase, ocorreu a etapa definitiva da criação da geometria não-euclidiana e assim o absolutismo geométrico chegou ao fim e, conseqüentemente, deixou muitas pessoas perturbadas diante das novas questões geométricas. Tal fase foi oficialmente representada pelos matemáticos: Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856) e Bolyai (1802-1860).

A quarta fase ocorreu, quase em paralelo à terceira. Nessa deu-se uma ampla generalização do conhecimento geométrico e, isto, devido ao matemático alemão Riemann (1826-1866).

Na primeira fase, muitos pensadores se dedicaram ao quinto postulado euclidiano. Alguns, insatisfeitos com suas tentativas frustradas de demonstrações, procuraram modificar a definição euclidiana de retas paralelas; outros, procuraram maneiras de eliminá-lo da condição de postulado; outros ainda, buscaram mostrar que esse não era independente dos quatro primeiros, pois desejavam mostrar que era um teorema dedutível destes postulados.

No entanto, na tentativa de demonstração deste quinto postulado, nos foram revelados numerosos princípios geométricos que o substituem, tal como o princípio de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Porém, este princípio alternativo, como outros enumerados na ápoca, não eram mais simples do que o postulado original de Euclides e encerravam muitas vezes, erros de natureza lógica ou eram tão complicados quanto o próprio postulado em questão. Assim, por longos séculos, este foi motivo de estudos e preocupações junto aos matemáticos.

A demonstração do quinto postulado foi estudada por vários matemáticos, acentuando-se após as traduções e publicações ocorridas no Renascimento. Essa questão se fazia tão importante a ponto de os gregos transformarem-na no quarto problema da geometria. Quarto problema, pois já existiam os três famosos problemas geométricos desde antes de Euclides, que consistiam na resolução da quadratura do círculo, na duplicação do cubo e na trissecção do ângulo, usando a régua e o compasso.

Foi em torno dos séculos XII e XIII que começaram a aparecer as primeiras versões feitas de Os Elementos a partir de textos árabes, bem como as feitas a partir de textos gregos no século XV e início do século XVI que provavelmente despertaram maiores críticas ao quinto postulado e, em conseqüência, maiores estudos e contribuições à geometria.

O matemático Saccheri estudou detalhadamente a teoria euclidiana, as contestações feitas ao quinto postulado, e após algumas observações, voltou-se a este postulado e tentou demonstrá-lo, porém não usando os métodos diretos até então utilizados, mas sim empregando o método de redução ao absurdo.

Saccheri, em seus estudos, admitiu a validade dos quatro primeiros postulados euclidianos e a falsidade do quinto. A partir de então, considerou um quadrilátero bi-retangular (isto é, tendo dois ângulos retos). Mostrou inicialmente que os outros dois ângulos são iguais, e concluiu que podemos obter três hipóteses sobre estes dois ângulos em qualquer retângulo nestas condições. Ou seja, os ângulos:

i) são retos - hipótese do ângulo reto. Esta hipótese é equivalente ao postulado das paralelas; ou
ii) são obtusos - hipótese do ângulo obtuso; ou
iii) são agudos - hipótese do ângulo agudo.

Mais tarde, com Riemann, vê-se estas três hipóteses corresponderem a distintos sistemas geométricos, isto é:

i) hipótese do ângulo reto - Geometria Euclidiana
ii) hipótese do ângulo agudo - Geometria Hiperbólica
iii) hipótese do ângulo obtuso - Geometria Elíptica

Uma vez que, Saccheri admitiu a falsidade do quinto postulado, deixou de lado, conseqüentemente, a hipótese do ângulo reto. Tembém abandonou a hipótese do ângulo obtuso, justificando que esta conduzia a absurdos, quando supunha que as retas tivessem comprimentos infinitos.

Talvez a culpa pelo abandono desta hipótese, segundo Bell (1895), seja do próprio Euclides por ter definido a reta de uma forma tão sem sentido, definição quatro do livro I: linha reta é a que repousa igualmente sobre seus pontos. Na verdade, Euclides deveria ter definido um segmento de reta, como a menor distância entre dois pontos, de tal modo que é quase imediato o conceito de geodésica de uma superfície[1].

Portanto, restou apenas a hipótese do ângulo agudo. Saccheri tentou mostrar que esta hipótese era incompatível com os seus pressupostos, pois desta forma completaria sua demonstração para chegar à contradição esperada. No entanto, nesta busca, Saccheri abandonou a idéia, em virtude da obtenção de algumas conseqüências desta terceira hipótese seriam impossibilidades lógicas. Porém, foi na tentativa de mostrar o absurdo das hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso, que Saccheri obteve inúmeros teoremas fundamentais de um tipo completamente novo de geometria e também deduziu de maneira diferente fatos paralelos aos teoremas euclidianos, tendo o mérito de mostrar que o quinto postulado da obra euclidiana é uma proposição essencialmente geométrica e não um axioma lógico que seria imperativamente verdadeiro, como Euclides o considerou.

Saccheri não conseguiu descobrir a geometria não-euclidiana no século XVIII que já estava fazendo, provavelmente devido ao seu excessivo convencimento de que a geometria euclidiana era a única verdadeira, e obstinadamente continuou a adoração a seu ídolo, apesar dos insistentes impulsos da razão. Conseqüentemente, deixou de fazer o que teria sido, sem dúvida, no século XVIII, a descoberta matemática mais importante: a geometria não-euclidiana.

Seus esforços acabam desta forma, na obra Euclides abomni naevo vindicatus (Euclides com toda a falha retirada), publicada no ano de sua morte. Provavelmente, tenha morrido sem ter se dado conta de que havia demonstrado vários teoremas de sua novas geometrias, ambas tão logicamente sólidas como a de Euclides.

[1] Gauss define geodésica como a linha de uma superfície que constitui a menor distância entre dois pontos dessa mesma superfície. No espaço plano, a geodésica é uma linha reta. Na esfera é o arco de círculo máximo. Numa superfície irregular ou num espaço curvo, pode ser qualquer tipo de curva.

Porém, podemos dizer que ele começou a história destas geometrias, pois construiu postulados que se diferenciam dos euclidianos e, principalmente, deu o passo decisivo para abolir o absolutismo matemático.

Neste mesmo século, o matemático suiço Lambert, em sua obra Die Theorie der Parallelliniem (A Teoria das Retas Paralelas), avançou alguns passos no caminho da geometria não-euclidiana, aberto por Saccheri, e estabeleceu novas proposições importantes. Partiu, fundamentalmente, de um quadrilátero tri-retângulo (isto é, tendo três ângulos retos) e considerou três possibilidades para o quarto ângulo, ou seja, que este poderia ser reto, obtuso ou agudo. Utilizando os mesmos métodos usados por Saccheri, mostrou que a soma dos ângulos de um triângulo seria respectivamente menor que, igual a, ou maior que dois ângulos retos.

Lambert notou que a hipótese do ângulo obtuso se realizava numa esfera e, indicou que necessitaria de um novo tipo de superfície para representar a geometria plana correspondente à hipótese do ângulo agudo. Este novo tipo de superfície surgiu com o italiano E. Beltrami (1835-1900), em 1868, dizendo que Lambert estava certo em sua conjectura e tal superfície é a pseudoesfera - "uma superfície de curvatura constante e negativa gerada revolvendo uma tratriz sobre seu eixo" (Boyer, 1974, p. 340).

Os resultados de Saccheri e de Lambert levou os geômetras da época a suspeitarem da impossibilidade de provar o quinto postulado e, conseqüentemente, pensarem na necessidade de aceitá-lo, sem demonstração, ou até substituí-lo por outro equivalente. E, perante os contínuos fracassos, estes geômetras aceitavam, ainda com certo cepticismo, sua validade absoluta, apoiando-se no prestígio de Kant, que dava à geometria euclidiana um caráter de eternidade, de acordo com sua concepção de espaço.

Após a dedicação de vários matemáticos, ao longo destes vinte séculos, estava claro que a geometria de Euclides podia ser ampliada e, de fato, o quinto postulado era independente dos demais. Portanto, a idéia da indemonstrabilidade deste postulado e de sua independência dos demais, estava desabrochando, e o descobrimento de uma nova geometria já era quase inevitável.

Esta etapa definitiva, ocorrida no início do século XIX, foi descoberta quase que simultaneamente pelo matemático russo Lobachevsky e pelo húngaro Bolyai. Os dois matemáticos independentes um do outro, e praticamente sem ter conhecimento dos trabalhos de Saccheri, ao contrário deste, que considerou absurda a hipótese relativa aos ângulos agudos, desenvolveram-na obtendo uma geometria nova e logicamente consistente e, nessa geometria, assim como na de Euclides, as retas têm comprimento infinito.

Antes, porém, o matemático alemão Gauss, embora não tenha divulgado suas idéias e conclusões obtidas sobre o tema, foi provavelmente o primeiro matemático que viu claramente a independência do quinto postulado e, conseqüentemente, a possibilidade de construir uma geometria nova, tão lógica e coerente, quanto a de Euclides, mas diferente da dele, sendo mais ampla e mais abrangente. A expressão não-euclidiana foi introduzida por ele, por descrever uma geometria que na verdade é a hipótese de Saccheri referente aos ângulos agudos.

As idéias revolucionárias de Lobachevsky em relação a uma nova geometria já estavam se consolidando. Estas idéias e os princípios desta nova geometria eram bem diferentes dos princípios euclidianos. Nesta, é válido o seguinte postulado:

> Por um ponto P fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB.

Portanto, por um ponto que esteja fora da reta, é possível fazer passar mais de uma paralela a esta reta. O geômetra russo, após ter estabelecido teoremas que são válidos na geometria euclidiana e outros teoremas independentes do postulado euclidiano, definiu que: Dada uma reta num plano, as retas deste plano classificam-se em dois grupos: o das retas que cortam a reta dada e o das retas que não cortam a reta dada.

A reta-limite destes dois grupos se diz paralela à reta dada no sentido lobachevskiano, contradizendo o postulado quinto de Euclides. Através desta definição o sistema lobachevskiano foi se fundamentando até chegar a uma geometria harmoniosa, lógica e sem contradições e o quinto postulado ficou definitivamente reconhecido como independente dos outros postulados euclidianos.

As linhas paralelas na geometria lobachevskiana nunca se encontram, mas se aproximam assintoticamente, isto é, a distância entre elas diminui à proporção que elas se prolongam. Na geometria euclidiana, as linhas paralelas nunca se cortam e permanecem, por mais que sejam prolongadas, a uma mesma distância.

A obtenção dessa nova geometria surpreendeu até seu autor; como se refere Boyer (1974, p. 397), pois esta era "em todos os sentidos uma geometria válida, mas ela parecia tão contrária ao senso comum que o próprio Lobachevsky a chamou geometria imaginária.

Os princípios desta nova geometria foram expostos publicamente pela primeira vez em 1826, na Universidade de Kazan. Entretanto, nasceu oficialmente em 1829, com o artigo On The Principles of Geometry (Sobre os Princípios da Geometria) de Lobachevsky. Neste artigo ele admitia todos os postulados euclidianos menos o das paralelas, e foi negando sua aceitação a este que alargou enormemente o conhecimento geométrico.

Outro matemático a inscrever-se na lista dos precursores da geometria não-euclidiana foi o húngaro J. Bolyai. Este obteve praticamente as mesmas conclusões a que Lobachevsky havia chegado. Desenvolveu o que chamou a Ciência Absoluta do Espaço, publicando-a em 1832.

Um resultado notável, entre outros, devido a esses dois matemáticos é que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é sempre menor do que dois retos. E, à proporção que um triângulo aumenta de área, a soma dos ângulos diminui, ou seja, somente triângulos de áreas iguais podem ter os mesmos ângulos, o que não ocorre na geometria euclidiana, pois nesta, dois triângulos podem ter os mesmos ângulos, mas áreas diferentes.

Neste momento, as diferenças entre a geometria de Euclides e a de Lobachevsky-Bolyai tornam-se evidentes e a geometria euclidiana deixa de ser a verdade absoluta até então considerada.

Assim, Lobachevsky revolucionou a geometria de até então, e, conseqüentemente, abriu novos caminhos, bem como fundamentou todo um ramo novo da geometria.

Paralelamente a revolucionar a geometria, também desferiu o golpe devastador da filosofia Kantiana, pois Kant, eternizava a geometria euclidiana e esta, apesar de receber muitos acrescentos, permaneceu com o mesmo pensamento fundamental e, provavelmente, este pensamento geométrico fundamental contituiu a essência da razão humana, pois "é sobre o caráter imutável da arquitetura da geometria que Kant fundamenta a arquitetura da razão humana" (Bachelard, 1986, p. 22).

Ainda no decorrer do século XIX, o matemático alemão Riemann, desenvolveu outro tipo de geometria e a expressão geometria não-euclidiana passou a ser usada para a geometria de LobachevskyBolyai e para a geometria de Riemann, denominadas, respectivamente, de geometria lobachevskiana e geometria riemanniana, onde na riemanniana postulamos que as retas são fechadas e têm comprimento finito.

As idéias de Riemann são mais gerais que as de seus predecessores e a sua geometria corresponde à hipótese dos ângulos obtusos, devido a Saccheri. Sob esta hipótese, dada uma reta r de um plano e um ponto P fora dela, todas as retas deste plano passando por P cortam a reta r. E, ainda, por um ponto qualquer não passa nenhuma paralela a uma reta dada.

Nessa geometria é negado o quinto postulado e a possibilidade de alongar arbitrariamente um dado segmento; cada segmento admite um comprimento máximo que pode chegar a atingir. Riemann propunha uma visão global da geometria em qualquer tipo de espaço.

Um resultado fundamental dessa geometria é que a soma dos ângulos de um triângulo é sempre maior do que dois retos. À diferença entre essas somas chama-se o excesso do triângulo, e esse excesso é proporcional à area do triângulo.

Na realidade a geometria riemanniana não é desenvolvida através de critérios postulacionais, mas sim através da generalização e ampliação da noção de curvatura estudada anteriormente por Gauss.

Riemann mostrou que a natureza das geodésicas, em uma superfície, depende de sua curvatura. E esta, pode ser positiva, negativa, nula, ou ter parte positiva e parte negativa. Genericamente, podemos dizer que uma superfície que tem curvatura positiva é aquela que está se arrendondando, para encontrar a si própria, como a casca de um ovo, ou seja, os raios de curvatura estão situados sempre no mesmo lado. No entanto, a curvatura de uma superfície em forma de sela é negativa, uma vez que os raios de curvatura situam-se em lados opostos.

Nas superfícies de curvatura constante negativa, as curvas geodésicas também podem ser interpretadas como retas, obtendo-se, assim, uma geometria onde é válido a hipótese dos ângulos agudos geometria lobachevskiana. A pseudoesfera, portanto, é um exemplo de uma superfície de curvatura constante negativa, pois sobre a sua superfície há muitas linhas retas que passam por um ponto dado e que não interceptam uma reta dada. Evidentemente, estamos interpretando linhas retas como sendo as curvas mais curtas unindo dois pontos quaisquer desta superfície.

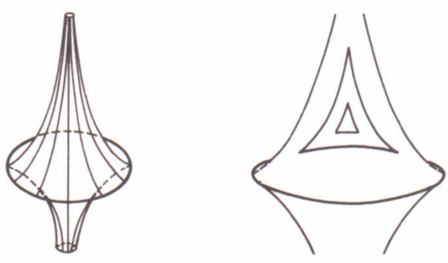

fig. 1. Na pseudoesfera vemos claramente que a soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois retos e que es-

ta decresce quando aumenta a área do triângulo.

Nas superfícies chamadas de curvatura constante positiva as curvas geodésicas são as retas de uma geometria não-euclidiana, para a qual vale a hipótese do ângulo obtuso. Um modelo para essa geometria pode ser imaginado na superfície de uma esfera euclidiana tomando as retas como círculos máximos (círculo formado sobre a superfície de uma esfera por um plano que passa pelo centro da esfera), desde que se identifiquem dois pontos diametralmente opostos. Ou seja:

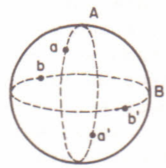

Fig. 2. Esfera Euclidiana, onde: A e B: círculos; aa' e bb': par de pontos opostos.

Assim, observamos que dois círculos máximos quaisquer sempre se interceptam e por qualquer par de pontos passam muitos círculos máximos.

De acordo com Vera (1963), temos um exemplo interessante de geometria riemanniana, ou seja: tomando uma superfície esférica, a Terra - uma vez que é sensivelmente esférica consideremos o equador e dois meridianos, e obteremos um triângulo curvilíneo PAB isóceles, conforme fig. 3, onde PA e PB são arcos de geodésicas perpendiculares ao terceiro lado AB. Se traçarmos outra geodésica que corte os dois lados PA e PB de tal modo que os segmentos compreendidos entre ela e o equador sejam iguais, resultará, na esfera, o quadrilátero ABCD análogo ao quadrilátero de Saccheri considerado no plano.

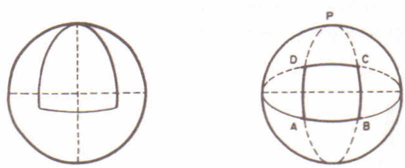

Fig. 3. Superfície Esférica. Nesta podemos ver claramente que a soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos, e esta soma cresce à medida que cresce a área do triângulo.

A geometria riemanniana é a geometria da esfera ampliada ao espaço. Nela as retas são geodésicas, equivalentes a arcos de círculo máximo da esfera, portanto, duas geodésicas se cortam sempre em dois pontos e não existem paralelas.

Riemann, ao entender a geometria da esfera ao espaço, acabou definitivamente com o mistério do espaço e nos ensinou que nenhuma geometria e nenhum espaço correspondem necessariamente a nossa percepção.

As geometria não-euclidianas não estão em oposição com a geometria euclidiana, o que foi realizado foi uma generalização e não a negação da geometria de Euclides, portanto, todas podem conviver, porque nenhuma das três é mais ou menos verdadeira do que as outras duas.

As geometrias não-euclidianas são instrumentos que utilizamos, hoje, para interpretação do Universo em que vivemos, e isto é evidenciado na Física com Einstein e a teoria da relatividade. Portanto, apesar de ter nascido de um plano puramente teórico, apontando a fragilidade da geometria euclidiana, logo se vinculou com a prática, encontrando imediatamente aplicações e, sendo tão verdadeira e lógica quanto a de Euclides.

Uma característica fundamental nestas geometrias é que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo plano não é exatamente igual a dois retos. Sendo, então, ora uma geometria lobachevskiana, quando esta soma for menor do que dois retos, ora riemanniana se esta for maior do que dois retos. Conseqüentemente, por geometria não-euclidiana entende-se, habitualmente, qualquer dos sistemas dedutivos construídos sobre a negação do postulado de Euclides, conservadas as proposições primitivas de Euclides.

E, certamente caberá ao aplicador de uma experiência, e não ao geômetra, a escolha pelo tipo de geometria que melhor vier a representar os fenômenos naturais. Assim, o geômetra estará livre para fazer suas construções abstratas, desde que respeitadas as leis da razão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AABOE, A. . Episódio da História Antiga da Matemática (SBM). Brasília. Editora PAX, 1984.
2. BACHARELARD, G. .O Novo Espírito Científico. São Paulo. Edições 70, 1986.
3. BELL, E. T. . História de Las Matemáticas. México. Fondo de Cultura Economica, 1985.
4. BOYER, C. B. . História da Matemática. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.
5. VERA, F. . Breve História de La Geometria. Buenos Aires. Editorial Losada S. A., 1963.
6. VERA, F. . Científicos Griegos. Madrid. Aguilar, S. A., 1970.

Recebido em dezembro, 1990; aceito em abril, 1991.