

SISTEMA GEOMÉTRICO EUCLIDIANO

Marli Basso

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas.
UFSM. Santa Maria, RS.

Ivanilda Basso

Curso de Pós-Graduação em Matemática. UFSC. Florianópolis, SC.

RESUMO

Este trabalho aborda o histórico da geometria desenvolvida na Antiguidade, enfocando principalmente a obra Os Elementos do matemático Euclides.

SUMMARY

BASSO, I. e BASSO, M., System Geometric Euclidean. Ciência e Natura, 13: 35-43, 1991.

In this paper we approach the historical development of the geometry advanced in the ancient, emphasize mainly the Os Elementos of the mathematical Euclides.

Abordagem Histórica

Para falarmos da origem da Geometria, faz-se necessário reportarmo-nos à pré-história. E, para tirarmos conclusões daquela época, dependemos de interpretação baseadas em artefatos restantes, de informações da antropologia e de documentos sobreviventes, pois foi somente nos últimos seis milênios que o homem começou a fazer registros e colocar seus pensamentos em forma escrita. Assim, fica arriscado afirmar algo sobre as origens da matemática, e, conseqüentemente, da geometria, mas certamente a mesma é mais antiga que a arte de escrever.

Provavelmente, as primeiras noções geométricas surgiram quando o homem se viu compelido a efetuar medidas, isto é, comparar as distâncias entre vários pontos e as formas e dimensões dos corpos que o rodeavam.

Porém, devido à falta de registros, possuímos, hoje, várias interpretações sobre a origem do conhecimento geométrico. De um lado, acredita-se que a Geometria tenha se originado de princípios empíricos, pois as civilizações antigas, principalmente os egípcios, muito haviam desenvolvido sobre o que veio a chamar-se Geometria. Por exemplo, fixar os limites das propriedades, bem como a necessidade prática de fazer novas medidas de terras após a inundação anual no vale do Nilo para delimitar as áreas de cultivo de seus proprietários, Outras inúmeras atividades, tais como: a beça dos estiradores de corda¹; os sentimentos estéticos, como a beleza das formas, onde potes, tecidos e cestos traziam em suas pinturas, desenhos de congruência e simetria, ... podem ter provocado a origem deste conhecimento, e, conseqüentemente, sua evolução.

De outro lado, segundo Boyer (1974), Aristóteles via a origem da Geometria pela condução ao estudo da mesma, por uma classe sacerdotal existente no Egito.

Assim, a partir das diferentes experiências, das observações realizadas e principalmente devido às necessidades de diversos povos, as atividades laboriais e o raciocínio indutivo contribuíram para a obtenção dos conceitos básicos da Geometria. Estes conceitos foram sendo trabalhados e ordenados, originando rupturas entre o teórico e o prático, principalmente na cultura grega, e o conhecimento empírico foi sendo transformado num conhecimento abstrato, teórico e abrangente, ou seja, numa Geometria que iria servir aos interesses da humanidade durante longos séculos.

Alguns filósofos e matemáticos gregos, após observarem e apreciarem os princípios empíricos geométricos desenvolvidos e assimilados pelos egípcios e por outros povos, (por volta de 600 a.C.), começaram a sistematizar o conhecimento geométrico acumulado até então. Isto provavelmente ocorreu devido à forma pura e abstrata da Geometria, pois para eles esta aproximava-se bastante da Metafísica e da Religião.

Nesta época, foi exatamente o campo da filosofia que rotulou estes primeiros séculos da história cultural e não o campo da ciência. Na sistematização do conhecimento geométrico deste período são apontados como colaboradores os filósofos: Tales (viveu em torno de 624-548 a.C.), Pitágoras (580-500 a.C.) e Platão (428-347 a.C.).

Segundo a tradição grega, é atribuída a Tales, no início do século VI a.C., a transplantação da Geometria do Egito para a Grécia, onde os gregos começam a alargar e a estender seus conhecimentos, pois aos mesmos não bastava "o critério empírico, procuravam encontrar demonstrações dedutivas rigorosas das leis acerca do espaço, que governavam as aplicações práticas da Geometria" (Barker, 1969, p. 28).

Tales principiou, dando à Matemática a forma que ela sempre teve, desde a antiguidade grega, enfatizando a noção de demonstração. E os gregos descobriram proposições relativas às paralelas, aos triângulos e às propriedades do círculo, que apesar de não terem uma seqüência lógica, já apresentavam demonstrações dedutivas.

Apesar das primeiras tentativas para a demonstração de teoremas de Geometria, com caráter lógico, serem devidas a Tales, foi principalmente pelos trabalhos de Pitágoras e de seus discipu-

¹ Estiradores de corda - nome atribuído aos agrimensores daquela época.

los da Escola Pitagórica², que a Geometria e a Aritmética conheceram os progressos mais importantes.

Os pitagóricos fizeram várias contribuições em distintas áreas. Em Geometria aprimoraram vários conhecimentos já praticados por várias culturas. Pitágoras fez da Geometria a base de seu ensino. Definiu as noções de pontos, linhas, ângulos e superfície. Conhecia e ensinava retas paralelas, triângulos, paralelogramos, áreas de figuras planas e importantes propriedades relacionadas com estes temas.

Tradicionalmente a Escola Pitagórica não costumava divulgar suas descobertas. No entanto, dos estudos pitagóricos, re-

sultaram importantes contribuições, entre elas a elaboração da prova, para a tradicional relação pitagórica (Três, quatro e cinco) utilizada pelos agrimensores daquela época. Esta prova, fornecida pelo teorema que leva seu nome - Teorema de Pitágoras - é considerada a mais brilhante aquisição da escola.

Mais tarde, as realizações matemáticas destes dois filósofos são incorporadas na obra de Euclides Os Elementos.

Apesar de até por volta do séc. III aC. o conhecimento geométrico ter um avanço relativamente significativo, foi nesta época que os gregos começaram a atribuir aos princípios empíricos existentes, uma forma mais geral e abstrata e, em consequência, ordenar tais conhecimentos. Tal período destacou-se em relação aos anteriores, a ponto de ser denominado a Idade Áurea da Matemática grega.

Em parte, esta denominação foi consequência das obras de:

Euclides - Arquimedes - Apolônio, que viveram e trabalharam num período de somente uns cem anos. Nesta época, são organizados os trabalhos matemáticos e dada atenção especial à geometria, momento, portanto, em que a Geometria começa a ser transformada de uma ciência empírica numa ciência matemática e, conseqüentemente, da necessidade prática, passou-se a desenvolver o teórico, originando uma Geometria mais elaborada, mais formalizada.

Euclides viveu aproximadamente de 365 a 275 aC.. Trabalhou em Alexandria, onde organizou várias obras matemáticas, entre as quais destaca-se Os Elementos, obra eminentemente teórica, que se constituiu, durante vinte séculos, na base do ensino da Geometria. Esta obra foi traduzida e publicada em todas as línguas conhecidas, tornando-se o texto mais influente de todos os tempos e, merecendo de antigos e modernos admiração e respeito, pela sua notável forma de construção lógica em que o autor, partindo dum reduzido número de simples

² Escola Pitagórica - uma associação fundada por Pitágoras, sendo esta, em parte científica, mas com cunho especialmente político-religioso.

proposições, quase evidentes, chega, gradualmente, por demonstrações sempre rigorosas e métodos muitas vezes elegantes e fáceis a fazer uma exposição sistemática das principais verdades da geometria elementar (Vasconcellos, 1960, p. 290).

Arquimedes viveu aproximadamente de 287 a 212 aC. na Colônia grega de Siracusa na Sicília. Dedicou-se a questões novas e as resolveu genialmente, obtendo realizações mais práticas que o tornaram famoso entre o público. No entanto, seu louvor foi ignorado até quase a época renascentista.

Quanto à vida do terceiro matemático da época alexandrina Apolônio - pouco se sabe, mas viveu aproximadamente em torno de 262 a 190 aC. tendo nascido em Pérgamo, cidade da Panfília (Sul da Ásia Menor). Dedicou-se igualmente aos outros matemáticos da época, a problemas relativos à Geometria e especificamente ao estudo das cônicas.

Portanto, são os gregos que organizam e sistematizam os conhecimentos geométricos dessa época, fazendo-os num corpo de doutrina sob o método axiomático.

Como vimos, inicialmente, nos primórdios da civilização, os egípcios detiveram-se quase que exclusivamente em critérios empíricos. Os gregos, baseados no conhecimento destes e de outros povos, procuravam encontrar demonstrações rigorosas que regiam as aplicações práticas da Geometria. Porém, isto só se concretizou a partir de Euclides, momento em que se deu a identificação do saber matemático com a abstração, com o teórico, centrado no raciocínio.

Quanto á vida do terceiro matemático da época alexandrina Apolônio - pouco se sabe, mas viveu aproximadamente em torno de 262 a 190 aC. tendo nascido em Pérgamo, cidade da Panfíia (Sul da Ásia Menor). Dedicou-se igualmente aos outros matemáticos da época, a problemas relativos à Geometria e especificamente ao estudo das cônicas.

Portanto, são os gregos que organizam e sistematizam os conhecimentos geométricos dessa época, fazendo-os num corpo de doutrina sob o método axiomático.

Como vimos, inicialmente, nos primórdios da civilização, os egípcios detiveram-se quase que exclusivamente em critérios empíricos. Os gregos, baseados no conhecimento destes e de outros povos, procuravam encontrar demonstrações rigorosas que regiam as aplicações práticas da Geometria. Porém, isto só se concretizou a partir de Euclides, momento em que se deu a identificação do saber matemático com a abstração, com o teórico, centrado no raciocínio.

Isso foi revelado claramente nos postulados que Euclides enunciou, onde ele não se deteve nas concepções indutivas e empíricas adotadas pelos egípcios, como por exemplo, no da mensuração da terra. Partiu dessas noções primitivas, tais como a noção de ponto, reta, plano e espaço, e construiu uma teoria dedutiva, considerada, hoje, um dos primeiros exemplos conhecidos de uma tal teoria. Euclides estabeleceu esta teoria sob a forma de definições, axiomas, postulados e proposições, registrando o conhecimento já existente e também ampliando-o.

Com este matemático, tivemos o florescimento de todo o conhecimento acumulado desde o século VI aC., e a superação do conhecimento difuso e arraigado a fatos empíricos e filosóficos. Consequentemente, a partir de então, a Geometria passa a ter um corpo teórico consistente, mais abrangente e organizado.

A obra prima de Euclides foi Os Elementos composta de treze livros que se constituíram num dos mais notáveis compêndios de Matemática de todos os tempos. Esta obra cobriu toda a Matemática elementar. Especificamente, quanto ao conteúdo de cada um dos livros dedicados à geometria temos:

- livro I: Construções elementares, teoremas de congruência, área de polígonos, teorema de Pitágoras
- livro II: Álgebra geométrica
- livro III: Geometria no círculo
- livro IV: Construção de certos polígonos regulares
- livro V: A teoria das proporções de Eudoxo
- livro VI: Figuras Semelhantes
- livro XI: Geometria no espaço e volumes simples
- livro XII: Áreas e volumes achados pelo método de

exaustão (integração de Eudoxo)

livro XIII: Construção dos cinco sólidos regulares

Este clássico - Os Elementos - foi a obra precursora do sistema axiomático, escrito em aproximadamente 300 aC. onde Euclides reuniu, numa compilação rigorosa e bem ordenada, os teoremas já demonstrados por seus predecessores, bem como incluiu problemas novos, intercalando-os adequadamente.

O trabalho pessoal de Euclides, em quase toda a obra Os Elementos, constituiu-se num trabalho matemático de grande exatidão e de uma especulação sábia, caracterizado por um elo progressivo das proposições que paulatinamente partem do particular ao geral, do simples ao composto, do desconhecido ao conhecido.

Esta obra exerceu enorme influência no pensamento ocidental, a tal ponto de não ser apenas o livro texto da Geometria nos tempos antigos, na Idade Média, no período moderno, e até no século XIX, mas o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser.

Levando-se em conta a época em que foi produzido, Os Elementos, possui um alto grau de perfeição, pois como se refere Boyer (1974, p. 153), esta obra: "é uma síntese bem ordenada de matemática pura com alto grau de abstração, uma estrutura lógica clara e uma evidente intenção pedagógica".

Em Os Elementos, Euclides introduziu, inicialmente, definições, postulados e axiomas necessários, para a partir de então utilizá-los nas demonstrações de proposições (ou teoremas) por ele enunciados. Desta maneira o autor de Os Elementos deu à Geometria uma forma dedutiva sistemática, o que lhe permitiu demonstrações rigorosas e a descoberta de novas leis, estabelecendo conclusões com o rigor da absoluta necessidade lógica.

Os postulados são as hipóteses relativas ao ramo específico do saber, neste caso, a Geometria. Os axiomas são verdades evidentes por si próprias - verdades aceitas sem demonstração.

As definições, postulados e axiomas foram obtidos e praticamente confirmados pela experiência, e constituem, portanto, o alicerce da geometria euclidiana.

As proposições são decorrências que necessitam de demonstrações e, estas, são realizadas a partir das definições, dos postulados e axiomas inicialmente citados. Estas demonstrações foram elaboradas com muito rigor lógico e construídas por meio de dois instrumentos apenas a régua e o compasso. Instrumentos estes característicos do momento histórico e indispensáveis.

Assim, o sistema euclidiano fundou a Geometria nas hipóteses que se acham nas definições, postulados e axiomas dos diferentes livros de Os Elementos. E a Geometria, sistematizada por seu autor, contemplada nos seis primeiros livros e nos três últimos desta obra, mais tarde denominou-se Geometria Euclidiana; isto é uma geometria construída a partir de construções geométricas que se realizam pela retae pelo círculo e que praticamente se executam com a régua e com o compasso.

O livro I da obra euclidiana tem um interesse especial, porque os resultados sucessivamente construídos sobre as hipóteses constituem os primeiros princípios geométricos e formam a base dos demais livros. Nesse, constam vinte e três definições, cinco pos-

tulados, cinco axiomas ou noções comuns e quarenta e oito proposições.

Após as definições, Euclides enunciou os postulados. Segundo Aaboe (1984), estes são:

1. É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro qualquer;
2. É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta;
3. É possível traçar um círculo com qualquer centro e raio;
4. Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si;
5. Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores, do mesmo lado, menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Todos os postulados são considerados verdades geométricas necessárias às futuras demonstrações. Os quatro primeiros postulados, parecem de enunciados fáceis e evidentes por eles próprios. O quinto postulado é diferente. Aborda um enunciado mais complicado e muito menos evidente por si próprio. Este postulado "traz em seu conteúdo um forte apelo à evidência, à intuição do plano- no sentido euclidiano do termo, isto é, considerando o plano como um retângulo infinito" (Souza, 1986, p. 93).

Graficamente, o resultado deste quinto postulado fica mais claro, ou seja:

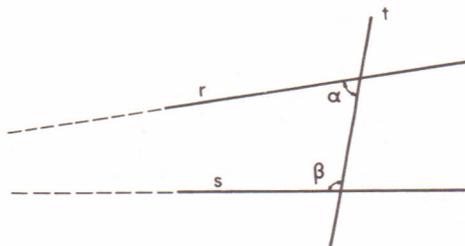


Fig.1 Representação gráfica do 5º postulado euclidiano.

Suponhamos que temos três retas: r , s e t . O postulado diz que se t cortar r e s de modo que os ângulos α e β , somados dêem um ângulo menor do que dois ângulos retos, então as retas r e s cortar-se-ão, desde que sejam suficientemente prolongadas.

Desde o início, este quinto postulado chamou especialmente a atenção, e após muitas tentativas, esforços, e até preocupações, foi através de sua negação que nasceu um novo sistema geométrico, o sistema não-euclidiano, cujas construções lógicas são tão verdadeiras quanto as do sistema euclidiano.

Foram inúmeras as investigações em torno do quinto postulado de Euclides. A partir dessas investigações no século XIX, uma nova geometria começa a despontar com Lobachevski, Bolyai e Riemann, onde foi provada a independência deste quinto postulado, dos quatro anteriores, e, conseqüentemente criadas as geometrias não-euclidianas.

Também no livro I, Euclides fez cinco axiomas, abrangendo não apenas geometria, mas outros elementos importantes que, juntamente com as definições e os postulados, constituem o ponto de partida para as demonstrações euclidianas.

As proposições contidas no livro I, de Euclides, versam sobre congruências de triângulos, sobre construções simples com régua e compasso, sobre desigualdades relativas a ângulos e lados de um triângulo, sobre propriedades de retas paralelas, perpendiculares e sobre paralelogramos.

Uma das críticas atribuídas hoje a Euclides, à luz de conhecimentos posteriores, é o livre uso, em suas provas, da unicidade e da infinidade. Porém, manifesta-se Boyer (1974, p.79): Em seu tempo, a obra *Os Elementos*, evidentemente, constituiu o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora erigido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse tempo, a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.

Assim, vemos a obra de Euclides como um momento de superação do conhecimento geométrico, pois a geometria esparsa existente até ele e ligada a fatos empíricos é transformada numa ciência logicamente organizada. Portanto, a intuição de Euclides, como se refere Souza (1986, p. 101) "é um momento de superação da essência menos profunda para a mais profunda".

Outro matemático, dessa época, que deu inúmeras contribuições geométricas foi Arquimedes. Este, ao contrário de Euclides, em *Os Elementos*, que fez uma compilação dos resultados de seus antecessores, prestou contribuições novas ao conhecimento matemático, e devido a estas é reconhecido como o maior matemático da Antiguidade e da Idade Helenística.

Arquimedes era todo original, desde as idéias, até seus métodos, perfeitamente heterodoxos para sua época. Para lê-lo era necessário ter alguma formação matemática.

Arquimedes produziu várias obras e entre elas, em relação à geometria, temos:

1. Sobre a Esfera e os Cilindros - Nesta obra, Arquimedes completou o livro XI de *Os Elementos*, tratando de áreas e volumes de corpos redondos e seus segmentos.
2. A medida do Círculo, foi uma das obras mais profundas no período medieval. Arquimedes estabeleceu a equivalência do problema da quadratura do círculo, a retificação da circunferência, bem como o cálculo do número π com notável aproximação.
3. Sobre Espirais - nesta é estudada a espiral de Arquimedes². Através dessa espiral buscava soluções para os três famosos problemas geométricos: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.
4. Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas - nesta Arquimedes inicialmente demonstrou a lei das alavancas, utilizando-a para determinar o centro de gravidade de várias figuras geométricas.
5. A Quadratura da Parábola - nesta obra Arquimedes demonstrou que

a área de um segmento de uma parábola é quatro terços da área de seu triângulo inscrito de maior área.

O próximo geômetra, considerado o terceiro grande matemático da Idade Áurea da geometria grega e o último da Antiguidade Clássica, foi Apolônio de Perga, pois juntamente com as de Euclides e de Arquimedes, suas obras destacaram-se, a grande distância, dos demais da época.

Apolônio floresceu meio século depois de Arquimedes, não sistematizando os conhecimentos anteriores a ele, como Euclides, nem abraçou a diversidade de temas como Arquimedes, mas sim, orientou esforços numa única direção, e dedicou-se exclusivamente

² A espiral de Arquimedes é definida como o lugar geométrico no plano de ponto em que se move, partindo da extremidade de um raio ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio, enquanto esse, por sua vez, gira uniformemente em torno de sua origem. ao estudo das Cônicas, o que o fez ser considerado o primeiro especialista em Geometria.

Tratou os temas como: eixos, centros, diâmetros, assíntotas, cordas conjugadas e focos com muita superioridade. Foi exatamente com a teoria das cônicas de Apolônio, que a matemática grega superou a rígida etapa da régua e do compasso e, assim, conseqüentemente, o conhecimento geométrico elevou seu nível cultural.

No entanto, como se manifesta Aaboe (1984, p. 108),

é um erro comum supor que os gregos se limitavam inteiramente a construções com régua e compasso. É verdade que virtualmente todas as construções de Euclides podem ser efetuadas com estes meios, mas de maneira geral, os geômetras gregos não reconheciam tais restrições em seus trabalhos.

Esta restrição, que prevalecia nas construções geométricas, pode ter sido devida a Platão, pelo fato dele considerar o uso de aparatos mecânicos, em Geometria como "pura e simples corrupção e aniquilação do que há de bom na Geometria" (Boyer, 1974, p. 64).

As obras de Apolônio são de muita originalidade, sendo a principal delas, As Cônicas. Esta consta de oito livros, sendo que os quatro primeiros contém os elementos fundamentais necessários ao desenvolvimento de sua teoria e foram preservados originalmente em grego. Parte destes fundamentos já haviam aparecido em trabalhos anteriores. Os três livros seguintes referem-se a uma extensão do assunto além do fundamental e, provavelmente, foram conservados por tradução árabe. O último deles foi dedicado aos problemas que exigem maiores discussões. Infelizmente encontra-se perdido.

Como vimos, provavelmente a Geometria tenha se originado de um conhecimento difuso e arraigado a crenças e apoiado em necessidades práticas. Os condicionamentos sociais e políticos da época, na cultura grega, originaram a ruptura entre o saber e o fazer, ou seja, entre o teórico e o prático e, a Matemática sai do plano real para o plano abstrato. Conseqüentemente, na Geometria este momento ficou caracterizado pelo sistema geométrico euclidia-

no, pois foi através das obras de Euclides, Arquimedes e Apolônio que esta transformou-se numa Ciência logicamente organizada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AABOE, A. . Episódios da História Antiga da Matemática (SBM). Brasília. Editora PAX., 1984.
2. BARKER, S. F. . Filosofia da Matemática. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1969.
3. BOYER, C. B. . História da Matemática. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.
4. SOUZA, A. C. C. de. Matemática e Sociedade. Um estudo das categorias do conhecimento matemático. Campinas, Dissertação de mestrado, UNICAMP, 1986.
5. VASCONCELLOS, F. de A. . História das Matemáticas na Antiguidade. Lisboa, Livrarias Aillaud e Bertrand, 1960.
6. VERA, F. . Científicos Griegos. Madrid. Aguilar, S. A., 1970.

Recebido em dezembro, 1990; aceito em abril, 1991.

