UM ALGORÍTMO COMPUTACIONAL PARA A APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES POR SPLINES CÚBICOS

Alcibíades Gazzoni, Alsimar Teresinha Ferreira Gazzoni e Lilian Mari Kieling Ries

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Neste trabalho mostra-se que existe um único Spline Cúbico, S(+) satisfazendo as condições de simples interpolação no intervalo $[t_k, t_{n-k-1}]$, sendo $\sigma = (t_j)_{j=k}^{n-k-1}$ uma sequência real estritamente crescente de pontos igualmente espaçados. A seguir, apresenta-se um algorítmo com um modelo computacional para a determinação do Spline Cúbico de Interpolação.

SUMMARY

GAZZONI, A., GAZZONI, A. T. F. and RIES, L. M. K., A computational algorithm for function approximattion by cubic splines. Ciência e Natura, 13: 21-33, 1991.

This work shows the existence of a unique cubic spline S(+), which satisfies the conditions of simple interpolation within the interval $[t_k, t_{n-k-1}]$ when $\sigma = (t_j)_{j=k}^{n-k-1}$ is a real strictly increasing sequence of points equally spaced. Next an algorithm with a computacional model to determine the cubic spline of interpolation is presented.

INTRODUÇÃO

Seja k um inteiro positivo e $\sigma = (t_j)_{j=k}^{n-k-1}$ uma sequência real estritamente crescente. Se N é o número de pontos de σ, então $N = (n-k-1) - (k-1) = n-2k$ com n inteiro positivo.

Considere-se a função de s, $g_k(s, t)$, tal que, para cada t fixo em R, ela é definida por

$$(1) \quad g_k(s,t) = (s-t)_+^k = \begin{cases} (s-t)^k & \text{se } s \geq t \\ 0 & \text{se } s < t, \end{cases}$$

Denomina-se "i-ésimo β-Spline" de grau k, com nós nos k+2 pontos $t_i, t_{i+1}, \ldots\ldots, t_{i+k}, t_{i+k+1}$, de σ, a função de t, dada pela (k+1)-ésima diferença dividida de $g_k(s, t)$ nos pontos $t_i, t_{i+1}, \ldots., t_{i+k+1}$.

Indica-se o i-ésimo β-Spline por $M_{i,k}(t)$. Assim,

$$(2) \quad M_{i,k}(t) = g_k\,[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots\ldots, t_{i+k+1}; t]$$

Deste modo, tomando-se como exemplo uma sequência com 8 pontos e k=3, $\sigma = (t_j)_{j=3}^{10}$, tem-se os seguintes β-Splines de grau 3 com nós em σ:

$$M_{3,3}(t) = g_3[t_3, t_4, t_5, t_6, t_7; t]$$

$M_{4,3}(t) = g_3[t_4, t_5, t_6, t_7, t_8; t]$
$M_{5,3}(t) = g_3[t_5, t_6, t_7, t_8, t_9; t]$
$M_{6,3}(t) = g_3[t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}; t]$.

A partir de $M_{i,k}(t)$ pode-se obter o i-ésimo β-Spline Normalizado, $N_{i,k}(t)$, tomando-se $(t_{i-k+1} - t_i)\, M_{i,k}(t)$ ou seja,

(3) $N_{i,k}(t) = (t_{i-k+1} - t_i)\, M_{i,k}(t)$.

As funções β-Splines são de vital importância para a obtenção das Funções Splines, largamente usados na prática computacional, para aproximação de funções.

Uma função Spline, de grau k, com nós em $\sigma = (t_j)_{j=k}^{n-k-1}$ é uma função definida no intervalo $[t_k, t_{n-k-1}]$ e que tem as seguintes propriedades:

(i) em cada intervalo (t_j, t_{j+1}), $j=k, \ldots, n-k-2$, pode ser dada por um polinômio de grau menor ou igual a k;

(ii) possui derivadas contínuas até a ordem k-1, no intervalo $[t_k, t_{n-k-1}]$.

O conjunto das funções Splines de grau k, com nós em σ, é um espaço vetorial de dimensão (n-k-1). Introduzindo-se 2k nós adicionais, na sequência σ, a saber $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{k-1}$ e $t_{n-k}, t_{n-k+1}, \ldots t_{n-1}$ tais que

$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-k-1} < t_{n-k} < t_{n-k+1} < \ldots < t_{n-1}$

e considerando-se os (n-k-1) β-Splines Normalizados, com nós na sequência σ ampliada,

$N_{0,k}(t), N_{1,k}(t), N_{2,k}(t), \ldots, N_{n-k-2,k}(t)$

obtém-se uma base para o espaço vetorial das funções Splines definidas em $[t_k, t_{n-k-1}]$.

Assim, indicando-se por S(t), cada função desse espaço vetorial, tem-se que S(t) pode ser representada de modo único como combinação linear dos β-Splines Normalizados, ou seja,

(4) $$S(t) = \sum_{j=0}^{n-k-2} \alpha_j N_{j,k}(t).$$

Como exemplo, suponha-se que σ tenha 8 pontos e k=3, isto é, $\sigma = (t_j)_{j=3}^{10}$.

Introduzindo-se 2k nós adicionais, obtém-se a sequência σ ampliada,

$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{10} < t_{11} < t_{12} < t_{13}$

com 14 pontos. Os dez β-Splines Normalizados $N_{0,3}(t), N_{1,3}(t), \ldots, N_{9,3}(t)$ formam uma base para as funções Splines definidas em $[t_3, t_{10}]$, ou seja,

$$S(t) = \sum_{j=0}^{9} \alpha_j N_{j,3}(t).$$

Neste trabalho, determina-se um algorítmo para obter-se os β-Splines Nomalizados de grau k=3, com nós na sequência σ ampliada, considerando-se somente sequências de pontos igualmente espaçados. Mostra-se também, que existe um único Spline Cúbico satisfazendo as condições de simples interpolação em $[t_k, t_{n-k-1}]$ e apresenta-se um programa computacional para determiná-lo.

DESENVOLVIMENTO

Considere-se a sequência real, estritamente crescente, $\sigma = (t_j)_{j=k}^{n-k-1}$, de pontos igualmente espaçados ou seja,

$$t_{j+1} - t_j = h, \forall\, j,\ j=k, \ldots, n-k-1.$$

Os β-Splines Normalizados de grau k=3 com nós em σ, de acordo com (2) e (3) são dados por:

$$N_{i,3}(t) = (t_{i+4} - t_i)\, g_3[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+4}; t].$$

Aplicando-se, sucessivamente, propriedades das diferenças divididas tem-se:

$$N_{i,3}(t) = (t_{i+4} - t_i) \left[\frac{g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+4}; t] - g_3[t_i, \ldots, t_{i+3}; t]}{t_{i+4} - t_i}\right]$$

$$= g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+4}; t] - g_3[t_i, \ldots, t_{i+3}; t]$$

$$= \left[\frac{g_3[t_{i+2}, \ldots, t_{i+4}; t] - g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+3}; t]}{t_{i+4} - t_{i+1}}\right] - \left[\frac{g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+3}; t] - g_3[t_i, \ldots, t_{i+2}; t]}{t_{i+3} - t_i}\right]$$

$$= \frac{1}{3h} g_3[t_{i+2}, \ldots, t_{i+4}; t] - \frac{1}{3h} g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+3}; t] - \frac{1}{3h} g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+3}; t] + \frac{1}{3h} g_3[t_i, \ldots, t_{i+2}; t]$$

$$= \frac{1}{3h} g_3[t_{i+2}, \ldots, t_{i+4}; t] - \frac{2}{3h} g_3[t_{i+1}, \ldots, t_{i+3}; t] + \frac{1}{3h} g_3[t_i, \ldots, t_{i+2}; t]$$

$$= \frac{1}{3h}\left[\frac{g_3[t_{i+3}, t_{i+4}; t] - g_3[t_{i+2}, t_{i+3}; t]}{t_{i+4} - t_{i+2}}\right] - \frac{2}{3h}\left[\frac{g_3[t_{i+2}, t_{i+3}; t] - g_3[t_{i+1}, t_{i+2}; t]}{t_{i+3} - t_{i+1}}\right] + \frac{1}{3h}\left[\frac{g_3[t_{i+1}, t_{i+2}; t] - g_3[t_i, t_{i+1}; t]}{t_{i+2} - t_i}\right]$$

$$= \frac{1}{6h^2}\Big[g_3[t_{i+3}, t_{i+4}; t] - g_3[t_{i+2}, t_{i+3}; t] - 2g_3[t_{i+2}, t_{i+3}; t] + 2g_3[t_{i+1}, t_{i+2}; t] + g_3[t_{i+1}, t_{i+2}; t] - g_3[t_i, t_{i+1}; t]\Big]$$

$$= \frac{1}{6h^2}\Big[g_3[t_{i+3}, t_{i+4}; t] - 3g_3[t_{i+2}, t_{i+3}; t] +$$

$$3g_3[t_{i+1},\ t_{i+2};t] - g_3[t_i,\ t_{i+1};t]\Big]$$

$$=\frac{1}{6h^2}\left[\frac{g_3[t_{i+4};\ t] - g_3[t_{i+3};t]}{t_{i+4} - t_{i+3}} - 3\left(\frac{g_3[t_{i+3};\ t] - g_3[t_{i+2};\ t]}{t_{i+3} - t_{i+2}}\right) + 3\left(\frac{g_3[t_{i+2};\ t] - g_3[t_{i+1};\ t]}{t_{i+2} - t_{i+1}}\right) - \frac{g_3[t_{i+1};t] - g_3[t_i;t]}{t_{i+1} - t_i}\right]$$

$$=\frac{1}{6h^3}\Big[g_3[t_{i+4};t] - 4g_3[t_{i+3};t] + 6g_3[t_{i+2};t] - 4g_3[t_{i+1};t] + g_3[t_i;t]\Big],$$

ou seja,

(5)

$$N_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\left[(t_{i+4}-t)_+^3 -4(t_{i+3}-t)_+^3 +6(t_{i+2}-t)_+^3 -4(t_{i+1}-t)_+^3 +(t_i-t)_+^3\right]$$

Mas, desde que, por (1)

$$g_k(s,t)=(s-t)_+^k=\begin{cases}(s-t)^k \text{ se } s\geq t\\ 0 \text{ se } s<t\end{cases}$$

então substituindo-se em (5) obtém-se:

(6)

$$N_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases}(t_{i+4}-t)^3-4(t_{i+3}-t)^3+6(t_{i+2}-t)^3-4(t_{i+1}-t)^3+(t_i-t)^3; & t\leq t_i\\ (t_{i+4}-t)^3-4(t_{i+3}-t)^3+6(t_{i+2}-t)^3-4(t_{i+1}-t)^3; & t_i\leq t\leq t_{i+1}\\ (t_{i+4}-t)^3-4(t_{i+3}-t)^3+6(t_{i+2}-t)^3; & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2}\\ (t_{i+4}-t)^3-4(t_{i+3}-t)^3; & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3}\\ (t_{i+4}-t)^3; & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4}\\ 0; & t_{i+4}\leq t.\end{cases}$$

Considerando-se o fato de σ ser uma sequência com nós igualmente espaçados, ou seja, $t_{i+1}-t_i=h$, $\forall i$, então:

(7) $$(t_{i+4}-t)^3=[(4h+t_i)-t]^3=[4h+(t_i-t)]^3=64h^3+48h^2(t_i-t)+12h(t_i-t)^2+(t_i-t)^3$$

(8) $$-4(t_{i+3}-t)^3=-4[3h+(t_i-t)]^3=-108h^3-108h^2(t_i-t)-36h(t_i-t)^2-4(t_i-t)^3$$

(9) $$6(t_{i+2}-t)^3=6[2h+(t_i-t)]^3=48h^3+72h^2(t_i-t)+36h(t_i-t)^2+6(t_i-t)^3$$

(10) $\quad -4(t_{i+1}-t)^3=-4[h+(t_i-t)]^3=-4h^3-12h^2(t_i-t)-12h(t_i-t)^2-4(t_{i-2}-t)^3$

(11) $\quad (t_i-t)^3=(t_i-t)^3$

Somando-se as expressões (7), (8), (9), (10) e (11) obtém-se uma expressão identicamente nula que é equivalente a 1ª linha da expressão (6).

Somando-se as expressões (7), (8), (9) e (10) obtém-se a expressão $(t-t_i)^3$ que é equivalente a 2ª linha da expressão (6).

Somando-se as expressões (7), (8) e (9) obtém-se uma expressão equivalente a 3ª linha da expressão (6).

A 4ª linha da expressão (6) é equivalente a soma das expressões (7) e (8) enquanto que a 5ª linha é a expressão (7).

Deste modo, a expressão (6) pode ser reescrita como:

(12)
$$N_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases} 0; & t\leq t_i \\ (t-t_i)^3; & t_i\leq t\leq t_{i+1} \\ 4h^3+12h^2(t_i-t)+12h(ti-t)^2+3(t_i-t)^3; & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2} \\ -44h^3-60h^2(t_i-t)-24h(t_i-t)^2-3(t_i-t)^3; & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3} \\ 64h^3+48h^2(t_i-t)+12h(t_i-t)^2+(t_i-t)^3; & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4} \\ 0; & t_{i+4}\leq t. \end{cases}$$

Tendo em vista que

$t_i=t_{i+1}-h=t_{i+3}-3h=t_{i+4}-4h$ reescreveremos a expressão (12) como

(13)
$$N_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases} (t-t_i)^3; & t_i\leq t\leq t_{i+1} \\ h^3+3h^2(t-t_{i+1})+3h(t-t_{i+1})^2-3(t-t_{i+1})^3; & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2} \\ h^3+3h^2(t_{i+3}-t)+3h(t_{i+3}-t)^2-3(t_{i+3}-t)^3; & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3} \\ (t_{i+4}-t)^3; & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4} \\ 0; & \text{outros.} \end{cases}$$

A expressão (13) define os β-Splines cúbicos com nós na seqüência real estritamente crescente, de pontos igualmente espaçados $\sigma=(t_j)_{j=3}^{n-4}$. Introduzindo-se 6 nós adicionais em σ, t_0, t_1, t_2, t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1} tais que

$t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots<t_{n-4}<t_{n-3}<t_{n-2}<t_{n-1}$ e $h=t_{i+1}-t_i$, $\forall$ i,

pode-se determinar os n-4 β-Splines cúbicos que formam uma base para o espaço vetorial das funções Splines-Cúbicos definidas em $[t_3,t_{n-4}]$ com nós em σ. Por exemplo, considerando-se a sequência

10

$\sigma=(t_j)_{j=3}$ com $t_3=1$; $t_4=2$; $t_5=3$; $t_6=4$; $t_7=5$; $t_8=6$; $t_9=7$; $t_{10}=8$ e introduzindo-se os nós adicionais $t_0=-2$; $t_1=-1$; $t_2=0$; $t_{11}=9$; $t_{12}=10$ e $t_{13}=11$ pode-se determinar os β-Splines definidos em $[1,8]$ com nós em σ.

De fato, como neste caso, h=1, considernado-se a expressão (13) obtém-se,

(14)

$$N_{i,3}(t)=\frac{1}{6}\begin{cases}(t-t_i)^3; & t_i\leq t\leq t_{i+1}\\ 1+3(t-t_{i+1})+3(t-t_{i+1})^2-3(t-t_{i+1})^3; & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2}\\ 1+3(t_{i+3}-t)+3(t_{i+3}-t)^2-3(t_{i+3}-t)^3; & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3}\\ (t_{i+4}-t)^3; & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4}\\ 0; & \text{outros.}\end{cases}$$

Observando-se que

(15)

$$N_{i,3}(t_j)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{para } j=i+1 \text{ ou } i+3\\ \frac{4}{6} & \text{para } j=i+2\\ 0 & \text{para } j=i \text{ ou } i+4\end{cases}$$

e fazendo-se i variar de 0 a 9 na expressão (14), obtém-se os β-Splines que geram as funções Splines-Cúbicos com nós em σ,

$$N_{0,3}(t)=\frac{1}{6}\begin{cases}(t+2)^3; & -2\leq t\leq -1\\ 1+3(t+1)+3(t+1)^2-3(t+1)^3; & -1\leq t\leq 0\\ 1+3(1-t)+3(1-t)^2-3(1-t)^3; & 0\leq t\leq 1\\ (2-t)^3; & 1\leq t\leq 2\\ 0; & \text{outros,}\end{cases}$$

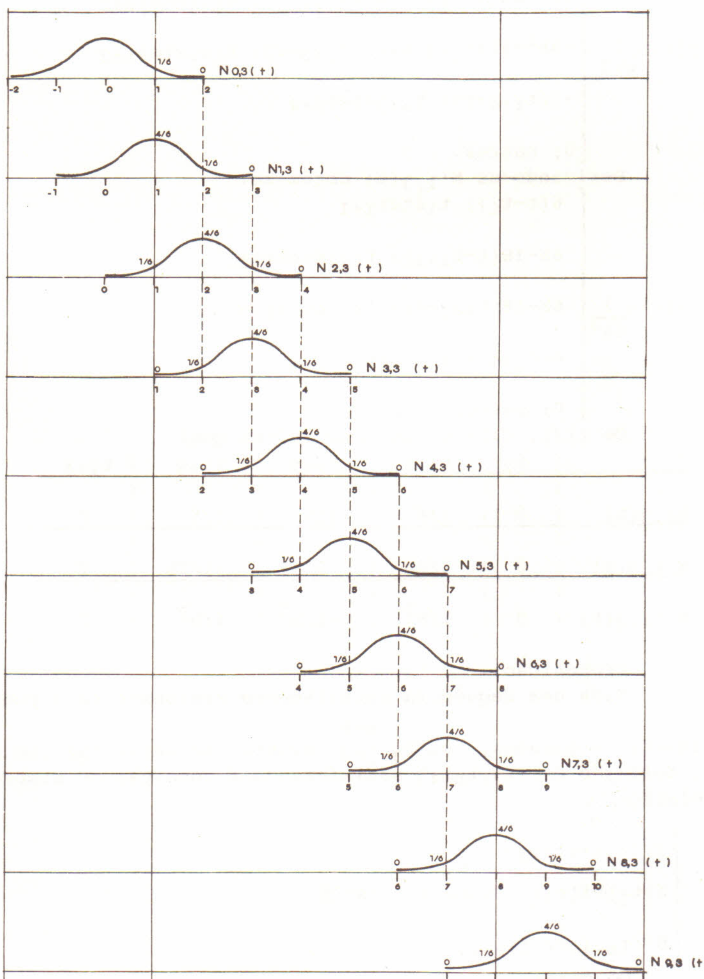
$$N_{1,3}(t)=\frac{1}{6}\begin{cases}(t+1)^3; & -1\leq t\leq 0\\ 1+3(t-0)+3(t-0)^2-3(t-0)^3; & 0\leq t\leq 1\\ 1+3(2-t)+3(2-t)^2-3(2-t)^3; & 1\leq t\leq 2\\ (3-t)^3; & 2\leq t\leq 3\\ 0; & \text{outros,}\end{cases}$$

$$N_{2,3}(t)=\frac{1}{6}\begin{cases}(t-0)^3; & 0\leq t\leq 1\\ 1+3(t-1)+3(t-1)^2-3(t-1)^3; & 1\leq t\leq 2\\ 1+3(3-t)+3(3-t)^2-3(3-t)^3; & 2\leq t\leq 3\\ (4-t)^3; & 3\leq t\leq t\\ 0; & \text{outros.}\end{cases}$$

$$N_{9,3}(t)=\frac{1}{6}\begin{cases}(t-7)^3; & 7\leq t\leq 8\\ 1+3(t-8)+3(t-8)^2-3(t-8)^3; & 8\leq t\leq 9\\ 1+3(10-t)+3(10-t)^2-3(10-t)^3; & 9\leq t\leq 10\\ (11-t)^3; & 10\leq t\leq 11\\ 0; & \text{outros.}\end{cases}$$

Observa-se que, se o número de pontos de σ é N=8 então o número de pontos da sequência ampliada é n=8+6=14 e o número de β-Splines é n-k-1=14-3-1=10.

Graficamente os β-Splines têm o seguinte aspecto:



Analisando-se os gráficos dos β-Splines Cúbicos verifica-se que, no máximo quatro deles são não nulos em um particular intervalo $[t_j,t_{j+1}]$, $j=3,\ldots, n-5$, sendo que $\Sigma N_{i,3}(t)=\sum_{i=j-3}^{j} N_{i,3}(t)$, $\forall\, t \in [t_j,\, t_{j+1}]$.

Pode-se também provar que,

$$\sum_{i=j-3}^{j} N_{i,3}(t)=1,\ \forall\, t \in [t_j,t_{j+1}]$$

e que os β-Splines Cúbicos são funções de Classe C^2 em $[t_3,t_{n-4}]$ sempre que a sequência σ é estritamente crescente.

Derivando-se $N_{i,3}(t)$ obtém-se:

(15)
$$N'_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases} 3(t-t_i)^2; & t_i\leq t\leq t_{i+1} \\ 3h^2+6h(t-t_{i+1})-9(t-t_{i+1})^2; & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2} \\ -3h^2-6h(t_{i+3}-t)+9(t_{i+3}-t); & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3} \\ -3(t_{i+4}-t); & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4} \\ 0; & \text{outros.} \end{cases}$$

Derivando-se $N'_{i,3}(t)$ obtém-se:

(16)
$$N''_{i,3}(t)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases} 6(t-t_i); & t_i\leq t\leq t_{i+1} \\ 6h-18(t-t_{i+1}); & t_{i+1}\leq t\leq t_{i+2} \\ 6h-18(t_{i+3}-t); & t_{i+2}\leq t\leq t_{i+3} \\ 6(t_{i+4}-t); & t_{i+3}\leq t\leq t_{i+4} \\ 0; & \text{outros.} \end{cases}$$

De (13), (15) e (16) conclui-se que:

(17)

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}
$N_{i,3}(t)$	0	1/6	4/6	1/6	0
$N'_{i,3}(t)$	0	1/2h	0	-1/2h	0
$N''_{i,3}(t)$	0	$1/h^2$	$-2/h^2$	$1/h^2$	0

Proposição:

Dada uma sequência estritamente crescente de N pontos igualmente espaçados, $\sigma=(t_j)_{j=3}^{n-4}$, existe um único Spline Cúbico $S(t)$, definido em $[t_3,t_{n-4}]$ satisfazendo a condição de simples interpolação:

(18)
$$\begin{cases} S'(t_3)=f'(t_3) \\ S(t_j)=f(t_j) \quad 3\leq j\leq n-4;\ n=N+2k \\ S'(t_{n-4})=f'(t_{n-4}) \end{cases}$$

De fato:

Seja $\beta=\{N_{0,3}(t),\ N_{1,3}(t),\ldots,\ N_{N,3}(t),\ N_{N+1,3}(t)\}$

e

$S(t)=\alpha_0 N_{0,3}(t)+\alpha_1 N_{1,3}(t)+\ldots+\alpha_N N_{N,3}(t)+\alpha_{N+1}N_{N+1,3}(t)$

satisfazendo as condições expressas em (18), ou seja:

$S'(t_3)= \alpha_0 N'_{0,3}(t_3)+\ldots+\alpha_{N+1}N'_{N+1,3}(t)=f'(t_3)$

$S(t_j)=\alpha_0 N_{0,3}(t_j)+\ldots+\alpha_{N+1}N_{N+1,3}(t)=f(t_j),\ j=3,\ldots n-4$

$S'(t_{n-4})=\alpha_0 N'_{0,3}(t_{n-4})+\ldots+\alpha_{N+1}N'_{N+1,3}(t_{n-4})=f'(t_{n-4})$.

Assim, obtém-se um sistema de N+2 equações lineares que pode ser representado por AX=B (19), onde

$$A=\begin{bmatrix} N'_{0,3}(t_3) & N'_{1,3}(t_3)\ldots\ldots\ldots\ldots N'_{N+1,3}(t_3) \\ N_{0,3}(t_3) & N_{1,3}(t_3)\ldots\ldots\ldots\ldots N_{N+1,3}(t_3) \\ N_{0,3}(t_4) & N_{1,3}(t_4)\ldots\ldots\ldots\ldots N_{N+1,3}(t_4) \\ \vdots & \vdots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \vdots \\ N_{0,3}(t_{n-4}) & N_{1,3}(t_{n-4})\ldots\ldots\ldots\ldots N_{N+1,3}(t_{n-4}) \\ N'_{0,3}(t_{n-4}) & N'_{1,3}(t_{n-4})\ldots\ldots\ldots\ldots N'_{N+1,3}(t_{n-4}) \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_N\\ \alpha_{N+1}\end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix} f'(t_3)\\ f(t_3)\\ f(t_4)\\ \vdots\\ f(t_{n-4})\\ f'(t_{n-1})\end{bmatrix}.$$

De acordo com a tabela (17) e a equação (19) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2h} & & \frac{1}{2h} & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \quad 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6} \quad 0\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{-1}{2h} \quad 0 \quad \frac{1}{2h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_N\\ \alpha_{N+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t_3)\\ f(t_3)\\ f(t_4)\\ f(t_5)\\ \vdots\\ f(t_{n-4})\\ f'(t_{n-4})\end{bmatrix}.$$

A matriz A é diagonalmente dominante com diagonal estrita mente dominante e, portanto, o sistema tem uma única solução e assim existe um único Spline Cúbico satisfazendo as condições expressas em (18). Para encontrar-se este Spline, basta resolver o sistema e determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{N+1}$.

Os coeficientes α_i, $i=0, \ldots, N+1$ são determinados no programa computacional adotado, através do Método de Gauss.

Assim, considerando-se (12) com a notação

(20) $$N_{i,3}(t) \begin{cases} \varphi_1 & \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ \varphi_2 & \text{para } t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2} \\ \varphi_3 & \text{para } t_{i+2} \leq t \leq t_{i+3} \\ \varphi_4 & \text{para } t_{i+3} \leq t \leq t_{i+4}, \end{cases}$$

onde

$$\varphi_1 = \frac{1}{6h^3}(t-t_i)^3;$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{6h^3}[h^3+3h^2(t-t_{i+1})+3h(t-t_{i+1})^2-3(t-t_{i+1})^3];$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{6h^3}[h^3+3h^2(t_{i+3}-t)+3h(t_{i+3}-t)-3(t_{i+3}-t)^3] \text{ e}$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{6h^3}(t_{i+1}-t)^3.$$

Assim, sendo

$$S(t)=\alpha_0 N_{0,3}(t)+\alpha_1 N_{1,3}(t)+\alpha_2 N_{2,3}(t)+\alpha_3 N_{3,3}(t)$$

tem-se que

$$S(t)=\alpha_0\varphi_4+\alpha_1\varphi_3+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_1 \quad \text{para } t_3 \leq t \leq t_4$$

$$S(t)=\alpha_1\varphi_4+\alpha_2\varphi_3+\alpha_3\varphi_2+\alpha_4\varphi_1 \quad \text{para } t_4 \leq t \leq t_5$$

e, assim sucessivamente

$$S(t)=\alpha_{i-4}\varphi_4+\alpha_{i-3}\varphi_3+\alpha_{i-2}\varphi_2+\alpha_{i-1}\varphi_1 \quad \text{para } t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Desta forma, foi elaborado um modelo computacional que permite calcular o valor da função Spline Cúbico para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

A listagem do modelo computacional adotado para calcular o valor da função Spline baseado na descrição anterior encontra-se no final do trabalho e necessita da entrada de dados que o próprio programa vai solicitar na execução do mesmo.

Em primeiro lugar irá solicitar ao usuário, o número de pontos, após solicitará a entrada dos valores destes pontos. Os 2k nós adicionais são calculados no próprio programa. Em seguida irá formar o sistema para determinar os valores dos coeficientes α_i, que será resolvido através do método de Gauss. Após, irá determinar os valores da função Spline para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ em toda a seqüência $\sigma=(t_j)_{j=k}^{n-k-1}$.

O programa apresenta também o gráfico da função obtida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo computacional adotado foi testado em pontos de diversas funções conhecidas, tais como, funções polinomiais, seno, cosseno, exponencial e comparado com valores destas funções. Apresentou em todas elas uma boa precisão com erros muito pequenos nos pontos interiores aos nós da sequência σ fornecida, sendo que nestes pontos o valor é o mesmo da função Spline e da função usada para o teste. Este trabalho foi elaborado para a sequência σ estritamente crescente e com nós igualmente espaçados não sendo válido para outros casos.

BIBLIOGRAFIA

1. GAZZONI, A. and GAZZONI, A. T. F., 1984. Diferenças Divididas. Ciência e Natura, 6:31-40, 1984.
2. GAZZONI, A. T. F. Uma limitação para interpolação de funções contínuas por Splines. Rio de Janeiro, 1979. (Tese de Mestrado-UFRJ).
3. PRENTER, P. M. Splines and Variational Methods. Wiley, Interscience Publication, 1975.
4. ISAACSON, E. and KELLER, H. B. Analysis of Numerical Methods. New York, John Wiley & Sons, 1966.
5. DE BOOR, C. A pratical guid to Spline. New York, Springer Verlag, 1978.
6. CLÁUDIO, D. M. and MARINS, J. M. Cálculo Numérico Computacional. Editora Atlas S.A.-1989.

PROGRAMA

```
 10 REM SPLINES CUBICOS
 20 REM APROXIMAÇÃO ATRAVÉS DE PONTOS
 50 CLS
100 REM ENTRADA DE DADOS
120 INPUT "NÚMERO DE PONTOS N = "; N:NS=N
125 PRINT: PRINT "VALORES DA VARIÁVEL INDEPENDENTE": PRINT
130 K=3: N=N+2*K
140 DIM T(N), F(N), FD(N), A(N,N), S(100), X(100), FS(100),
    XV(100)
150 FOR I=3 TO N-4
160 PRINT "T(";i;")=";:INPUT T(I)
170 NEXT I
180 H=T(4)-T(3)
200 T(2)=T(3)-H:T(1)=T(2)-H:T(0)=T(1)-H
220 T(N-3)=T(N-4)+H:T(N-2)=T(N-3)+H:T(N-1)=T(N-2)+H
240 FOR I=1 TO NS
260 FOR J=1 TO NS
280 A(I,J)=0
290 NEXT J:NEXT I
295 PRINT:PRINT "VALORES DA FUNÇÃO": PRINT
300 FOR I=3 TO NS+2
320 PRINT "F(";I;")=";:INPUT F(I)
340 NEXT I
360 F1=(F(4)-F(3))/H:2=(F(NS+2)-F(NS+1))/H
370 NS=NS+2
380 J=1:PRINT
400 FOR I=2 TO NS-1
410 A(I,J)=1/6:J=J+1
420 A(I,J)=4/6:J=J+1
```

```
430 A(I,J)=1/6:J=J-1:NEXT I
450 FOR I=2 TO NS-1
460 A(I,NS+1)=F(I+1):NEXT I
480 A(1,1)=-1/(2*H):A(1,3)=1/(2*H)
490 A(NS,NS-2)=-1/(2*H):A(NS,NS)=1/(2*H)
500 A(1,NS+1)=F1:A(NS,NS+1)=F2
700 FOR L=1 TO NS
710 IF A(L,L)=0 THEN GOSUB 5000
720 L1=L+1
730 FOR I=1 TO NS
740 IF I=L THEN 800
750 M(I)=-A(I,L)/A(L,L)
760 FOR J=L TO NS+1
770 A(I,J)=M(I)*A(L,J)+A(I,J)
780 NEXT J
800 NEXT I
810 NEXT L
820 Li=NS:X(L1)=A(L1,NS+1)/A(L1,L1)
830 FOR I+1 TO NS
840 FOR J+1 TO NS+1
850 C(I,J)=A(I,J)
860 NEXT J:NEXT I
870 FOR I=1 TO L1-1
880 C(I,L1)=C(I,L1+1)-C(I,L1)*X(L1)
890 NEXT I
900 L1=L1-1:IF L1<1 THEN 1000
910 X(Li)=C(L1,L1+1)/C(L1,L1)
 20 GOTO 870
1000 REM DETERMINAÇÃO DOS PONTOS DA FUNÇÃO SPLINE
1090 J1=1
1100 FOR I=3 TO N-4
1110 FOR J=T(I) TO T(I+1)-H/4 STEP H/4
1115 XV(Ji)=J
1120 S1=X(I-2)*((T(I+1)-^3)/(6*H^3)
1140 S2=X(I-1)*(H^3+3*H^2*(T(I+1)-J)+3*H*(T(I+1)-J)^2-3*(T(I+1)-
        J)^3)/(6*H^3)
1150 S3=X(I)*(H^3+3*(H^2)*(J-T(I))+3*H*((J-T(I))^2)-3*(J-T(1))^3)/
        (6*H^3)
1160 S4=X(I+1)*((J-T(I))^3)/(6*H^3)
1170 S(J1)=S1+S2+S3+S4:J1=J1+1
1175 NEXT J:NEXT I
1178 PRINT:PRINT
1180 PRINT "VALORES DE X(I), S(I)"
1200 FOR I=1 TO J1
1210 PRINT XV(I);"        ";S(I)
1220 NEXT I
1224 LOCATE 23,10
1230 INPUT "DIGITE UMA LETRA";LT$
2000 CLS:SCREEN 1:COLOR 3
2010 WINDOW (-5,-5)-(5,5)
2030 LINE (0,-5)-(0,5)
2050 LINE (-5,0)-(5,0)
2100 FOR I=1 TO J1-2
2110 LINE (XV(I),S(I))-(XV(I+1),S(I+1))
```

```
2120 NEXT I
3000 END
5000 KX=L+1
5050 FOR I=KX TO NS
5100 IF A(I,KX)<>0 THEN II=I:GOTO 5300
5200 NEXT I:PRINT:PRINT:PRINT "NAO E POSSIVEL ADOTAR O METODO ,
     PIVOT  ZERO":GOTO 3000
5300 FOR J=1 TO NS+1
5400 TR=A(L,J):A(L,J)=A(II,J):A(II,J)=T
5500 NEXT J
```

Recebido em dezembro, 1990; aceito em abril, 1991.