MODELOS BAYESIANOS

Maria Emilia Camargo e Odorico Antônio Bortoluzzi

Departamento de Estatística. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Neste trabalho, são apresentados os conceitos básicos da Metodologia Bayesiana, bem como a utilização de uma série simulada para verificar a sensibilidade de mudanças de estado.

SUMMARY

CAMARGO, M.E. & BORTOLUZZI, O.A., 1990. Bayesian Models. *Ciência e Natura*, **11**: 7-20, 1989.

In this work, will be presented the basic concept of Bayesian methodology, as well as the use of a simulated serie to check the sensibility of SBPC program to identify changes of state.

INTRODUÇÃO

Um dos tópicos da Estatística que tem merecido grande atenção dos pesquisadores é a análise de séries temporais, objetivando, fundamentalmente, métodos eficientes de previsão. A previsão é um subsídio relevante à tomada de decisões criteriosas e como decisões criteriosas geralmente proporcionam economias consideráveis, o estudo desses métodos se reveste de grande importância.

De um modo geral, a maioria da literatura se ocupa de modelos tipo caixa-preta, que são ajustados à série histórica segundo algum critério pré-estabelecido. Os trabalhos sobre modelos mais voltados à descrição interna do processo são menos freqüentes. Estes modelos (que se relacionam à Teoria de Controles através de uma correspondência entre os conceitos de estado e parâmetro) possibilitam uma forma de estimação essencialmente recursiva: em cada estágio, os parâmetros são atualizados pela estimativa anterior e pela informação acerca do passado suficiente para prever seu efeito no futuro.

A formulação recursiva permite uma abordagem Bayesiana ao problema de previsão. A cada estágio pode-se prover informações, através de distribuições a priori, de duas maneiras diferentes: internamente, estabelecendo leis de variação e propriedades estatísticas para os parâmetros e externamente, refletindo a ocorrência de fatos que influenciem o comportamento futuro da série. E este talvez seja o ponto principal: a inclusão formal do analista, com sua experiência e sensibilidade, como parte integrante do sistema de previsão.

A maioria dos métodos de séries temporais baseia a previsão numa análise retrospectiva dos dados, não levando em conta sua relação com o fato presente e suas conseqüências futuras. Existe uma tendência a previsões demasiadamente calcadas no passado e este pode, em determinado instante, deixar de ser significativo. Exemplificando, uma série de vendas de determinado produto sofre sensível modificação quando um competidor entre no mercado ou quando uma propaganda maciça é efetuada. Os efeitos provenientes, difíceis de expressar quantitativamente, necessitam de distribuições de probabilidade para descrever sua incerteza. Um modelo que opere somente com a série histórica, transformando mecanicamente dados de entrada em informação de saída, não pode prever acontecimentos desta natureza e corre o risco de, a partir de determinado instante, se tornar inadequado. Surge então a necessidade de métodos mais flexíveis que permitam incorporar à série histórica informações externas transmitidas pelo analista.

Baseados nestas idéias, Harrison & Stevens (1975) desenvolveram um método de previsão a curto prazo com as seguintes características principais (além da possibilidade de prover informações a priori):

- modela a série por um modelo linear dinâmico em que os parâmetros são atualizados através de uma relação de recorrência, o filtro de Kalman, bastante conhecida em Teoria de Controles. Com isto estabelece, implicitamente, a analogia parâmetro-estado;
- atribui aos parâmetros um significado físico (nível, inclinação, transiente), que facilita a visualização do processo e torna a previsão uma estimação a priori;
- é aplicável quando se dispõe de um número pequeno de observações ou até mesmo no início do processo, quando ainda não se dispõe de observações;
- é capaz de detectar e se adaptar rapidamente a situações anormais como mudanças bruscas de nível, de inclinação e transiências. Isto pode ser conseguido automaticamente através de uma modelagem explícita dessas situações ou sob intervenção direta do analista. Os métodos não Bayesianos geralmente se adaptam de um modo mais lento, produzindo erros sensíveis de previsão durante um certo tempo;
- inclui vários modelos convencionais como regressão linear, amortecimento exponencial e modelos lineares de séries temporais (Box-Jenkins) como casos particulares.

Para descrever a evolução e dar consistência à idéia de estimação recursiva, seus princípios são estabelecidos inicialmente para a regressão linear (mínimos quadrados) numa análise baseada no trabalho de Young (1974), e posteriormente, para as séries temporais, baseada no trabalho de Harrison & Stevens.

ALGORÍTMOS RECURSIVOS DE MÍNIMOS QUADRADOS

O princípio de estimação por mínimos quadrados, devido à sua simplicidade e precisão, é uma técnica bastante conhecida e utilizada. Após evoluir naturalmente de um processo mecânico de ajuste para um contexto estocástico no qual as observações e os estimadores são considerados variáveis aleatórias, o método recebeu um novo tratamento através de um trabalho de PLACKETT (1950). Nele, foi apresentada uma elegante formulação matricial recursiva que, a cada novo conjunto de observações, atualiza a estimativa dos parâmetros com um esforço computacional sensivelmente menor que o método clássico. Apesar de toda sua potencialidade, a análise recursiva de mínimos quadrados não causou de imediato a devida repercussão, só vindo a se popularizar após um trabalho de Kalman, um engenheiro de Controles, publicado em 1961. Ele estabeleceu uma analogia entre parâmetros e estados de um sistema, com isto pode-se generalizar a hipótese de parâmetros constantes de Plackett e considerá-los variáveis com componentes determinísticas e estocásticas.

Posteriormente, em 1974, Young sintetizou todas as idéias sobre mínimos quadrados num trabalho que objetivou estabelecer uma formulação recursiva para a análise de séries temporais.

ABORDAGEM CLÁSSICA

Seja uma variável Y que, por hipótese, se relaciona linearmente com N variáveis independentes X_j, j = 1, ..., N cujos valores são conhecidos. Efetua-se k observações da variável dependente Y, denotadas por Y_i, i = 1, ..., K. Sendo X_{ij}, j = 1, ..., N o conjunto de valores associados à observação Y_i, pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$Y_i = \theta_1 X_{i1} + \theta_2 X_{i2} + \ldots + \theta_N X_{iN} + V_i \qquad i = 1, \ldots, k$$

onde os V_i são ruídos aleatórios com média nula, variância constante σ^2, se realmente não correlacionados e independentes das variáveis $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iN}$ e θ_j, j = 1, ..., N são os parâmetros que se deseja estimar.

O estimador de mínimos quadrados, cuja derivação pode ser encontrada em qualquer texto sobre o assunto, tem a seguinte expressão:

$$\theta = (X'X)^{-1} X'Y \qquad (1)$$

onde:

$\hat{\theta}$ - estimador do vetor de parâmetros θ(Nx1)

X - vetor de variáveis independentes (KxN)

Y - vetor de observações (Kx1)

ABORDAGEM RECURSIVA

Pode-se considerar as duas situações a seguir:

Parâmetros Constantes

Partindo da equação (1) escrita na forma

$$\hat{\theta} = [\sum_{i=1}^{k} X'_i \ X_i]^{-1} [\sum_{i=1}^{k} X'_i \ Y_i] \qquad (2)$$

onde X_i é a i-ésima linha da matriz X, chega-se. após manipulações algébricas ao seguinte algoritmo estocástico recursivo:

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1} \ X'_k [\sigma^2 + X_k \ P_{k-1} \ X'_k]^{-1} \ X_k \ P_{k-1} \qquad (3)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - P_k/\sigma^2 \ [X''_k \ X_k \ \hat{\theta}_{k-1} \ X'_k \ Y_k] \qquad (4)$$

onde:

k = índice para indicar que a estimativa foi realizada levando-se em conta k conjuntos amostrais (X_k, Y_k);

P_k= matriz de covariância do erro da estimativa.

Parâmetros Variáveis

Na análise anterior efetuada, considera-se implícita a hipótese de que os parâmetros permanecem constantes ao longo do processo. Quando isto não acontece, a aplicação das fórmulas anteriores pode conduzir a erros sensíveis de estimação. Pode-se, então, utilizar dois procedimentos: o algoritmo de ponderação exponencial, que atribui peso maior às observações mais recentes e o algoritmo dinâmico estocástico, que supõe a evolução dos parâmetros obedecendo a uma regra determinística superposta a uma perturbação aleatória. No segundo, mais flexível por permitir informações a priori seletivas sobre os parâmetros e a detecção das variações dos parâmetros independentemente do ruído, o processo é modelado pelo seguinte sistema:

$$\theta_k = G_{k-1,k} \ \theta_{k-1} + \phi_{k-1,k} \ W_{k-1} \qquad (5)$$

$$Y_k = X_k \ \theta_k + V_k$$

onde:

$G_{k-1,k}$ = matriz de transição (NxN)

$\phi_{k-1,k}$ = matriz de entrada (NxM)

$W_{k-1,k}$ = vetor de perturbações (Mx1)

O algoritmo de estimação é composto de duas partes: previsão (estimação a priori), baseada na lei de variação dos parâmetros e na estimativa anterior e correção, baseada nas estimativas a priori e na informação contida no novo conjunto amostral. Suas fórmulas de recorrência são análogas ao filtro de Kalman a ser apresentado no item subsequente.

ANÁLISE RECURSIVA DE SÉRIES TEMPORAIS: MÉTODO BAYESIANO DE PREVISÃO

INTRODUÇÃO

A utilização dos princípios da estimação recursiva para a previsão de séries temporais é apresentada através do método Bayesiano de Harrison & Stevens. Após apontadas na introdução suas características gerais, uma descrição mais profunda é efetuada neste ítem.

CARACTERÍSTICAS DO MODELO

Representação Paramétrica

Utiliza uma representação paramétrica do processo (em vez de uma representação funcional) que, além de simplificar, possibilita a atribuição de um sentido físico a cada parâmetro, facilitando a visualização do mecanismo evolutivo do processo e a comunicação sistema-analista. Isto porque o analista pode transmitir, através de informações sôbre os parâmetros, sua opinião acerca da influência de fatos externos e o sistema pode responder, em termos de incerteza, suas possíveis conseqüências.

Descrição Probabilística dos Parâmetros

O vetor de parâmetros é suposto um vetor aleatório multidimensional desconhecido cuja distribuição conjunta se deseja inferir, a partir das observações, para todos os instantes. Esta informação é utilizada para prever os futuros valores da série. Deve-se ressaltar que a incerteza acerca do futuro provém não somente da grande aleatoriedade dos fatores que o determinam mas também da incerteza acerca dos valores presentes dos parâmetros. A isto se alia a capacidade do modelo estabelecer corretamente a ligação do passado com o futuro.

Descrição Seqüencial (Recursiva)

Especifica a evolução do sistema entre dois estágios subseqüentes (t-1,t) descrevendo como os parâmetros mudam no tempo, de modo sistemático e aleatório. Isto permite a inferência do vetor de parâmetros no instante t a partir:

- da distribuição a priori dos parâmetros no instante (t-1);
- das distribuições do ruído da observação e da perturbação dos parâmetros no instante t;
- da observação no instante t.

Um aspecto importante do método é não haver exigência que o modelo da transição (t-1,t) seja o mesmo para qualquer instante t. Isto proporciona grande flexibilidade já que diferentes modelos podem ser apropriados a determinadas transições (por exemplo, alterações no comportamento da série são esperadas como decorrência de fatos externos).

Modelos Múltiplos

Vários métodos estatísticos foram desenvolvidos para manipular a incerteza dos parâmetros de um determinado modelo, mas o problema da incerteza quanto ao próprio modelo não recebeu o mesmo tratamento. É estranho que pouca atenção tenha sido dada ao problema de haver dúvida sobre qual dos possíveis modelos está em curso em determinado instante, quando em séries temporais é bastante lógico supor que diferentes modelos estão em curso em diferentes instantes. Existem dois tipos principais de incerteza quanto a modelos:

- Um único modelo está em curso em todos os instantes, não sendo conhecido qual (entre um conjunto discreto de alternativas);
- O modelo num determinado instante é uma escolha aleatória entre um número discreto de alternativas. Isto possibilita modelar mudanças bruscas e transiências.

MODELO LINEAR DINÂMICO

Definições

O modelo linear dinâmico (MLD) é um sistema de equações matriciais estocásticas especificando a relação estocástica de dependência entre as observações e os parâmetros do processo e a evolução dos parâmetros no tempo, devido a uma regra sistemática inerente ao processo e a choques aleatórios.

O modelo linear dinâmico utilizado no método é o seguinte:

Equação de observação: $Y_t = F_t \theta_t + V_t$ (7)

Equação do sistema: $\theta_t = G\theta_{t-1} + W_t$, (8)

$V_t \simeq N(0, V_t)$

$W_t \simeq N(0, W_t)$

onde:

t - índice de tempo ($t = 1, 2, 3, \ldots$);

Y_t - vetor de observação (Mx1) no instante t;

F_t - matriz de variáveis independentes (MxN) conhecida no instante t;

θ_t - vetor dos parâmetros (Nx1) no instante t;

G - matriz do sistema (NxN) conhecida;

V_t - vetor de ruído aleatório (Mx1) com média nula e a matriz de covariância V_t conhecida no instante t;

W_t - vetor de perturbação aleatória (Mx1) com média nula e matriz de covariância W_t conhecida no instante t.

A equação de observações especifica a dependência estocástica entre a observação e os parâmetros, e portanto, a distribuição de Y_t enquanto a equação do sistema especifica a evolução dos parâmetros.

Considerando F_t constante, o Modelo Linear Dinâmico pode ser encarado como uma representação de espaço de estados de uma série temporal em que os parâmetros admitem interpretações físicas. Isto estabelece a ligação com a teoria de controles na medida em que estimar um vetor de parâmetros pelo sistema (7) e (8) é semelhante a estimar um vetor de estados de um sistema linear estocástico discreto a partir de um vetor de observações linearmente relacionado ao vetor de estados por uma equação matricial estocástica. Olhando desta forma, os conceitos de parâmetro e estado são equivalentes: a distinção é meramente convencional: a denominação de parâmetros é utilizada quando a variação é lenta ou não há variação e a denominação estado, quando a variação é rápida.

Pode-se generalizar o modelo considerando G variável, distribuição conjunta e médias não nulas para V_t e W_t.

Estimação dos Parâmetros através do Filtro de Kalman

Para a estimação dos parâmetros do MLD é utilizada uma relação recursiva denominada filtro de Kalman (utilizada em controles para estimar o estado de sistemas lineares dinâmicos) que atualiza, a cada instante, a informação sobre eles. Partindo da hipótese que $\theta_{0_t} \simeq N(\hat{\theta}_0, P_0)$, estabelece que a distribuição a posteriori θ_t é:

$(\theta_t | Y, F) \simeq N(\hat{\theta}_t, P_t)$, onde a média $\hat{\theta}_t$ e a covariância P_t são obtidas pelas relações:

$$\hat{\theta}_{t|t-1} = G\hat{\theta}_{t-1} \qquad (9)$$

$$P_{t|t-1} = GP_{t-1} G' + W_t \qquad (10)$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t|t-1} + P_{t|t-1} F'_t [V_t + F_t P_{t|t-1} F'_t]^{-1} [Y_t - F_t \hat{\theta}_{t|t-1}] \qquad (11)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} F'_t [V_t + F_t P_{t|t-1} F'_t]^{-1} F_t P_{t|t-1} \qquad (12)$$

Assim, a distribuição a posteriori no instante t, $(\theta_t | Y^t, F^t)$ pode ser calculada a partir da distribuição a priori no instante t-1, $(\theta_{t-1} | Y^{t-1}, F^{t-1})$ da observação Y_t e das variâncias do ruído e da perturbação no instante t, V_t e W_t. Isso possibilita, conforme aludido na introdução, uma base teórica sólida para previsões com poucas ou até mesmo nenhuma observação e o desenvolvimento de estruturas que permitem a comunicação sistema-analista.

Previsão

Obtida a distribuição a posteriori do vetor de parâmetros no instante t, esta informação pode ser usada para inferir as distribuições futuras Y_{t+k} com (k = 1,2, ...). As previsões decorrem da extrapolação de incerteza de valores presentes dos parâmetros combinada às matrizes de covariância futuras V_{t+k} e W_{t+k}, sendo portanto distribuições. Em conseqüência, pode-se escolher como previsão o parâmetro mais apropriado a situação em estudo (por exemplo, o valor esperado, a mediana, a moda). Isto é importante quando as conseqüências de um erro numa direção são mais sérias que um erro da mesma magnitude no sentido oposto. Sejam:

$$\hat{\theta}_{k,t} = E(\theta_{t+k} | Y^t, F^t) \quad (13)$$

$$P_{k,t} = Cov(\theta_{t+k} | Y^t, F^t) \quad (14)$$

A partir das estimativas (11) e (12) fornecidas pelo filtro de Kalman, pode-se determinar (13) e (14). A previsão K passos à frente e sua matriz de covariância ficam

$$\hat{Y}_{k,t} = F_{t+k} \, \hat{\theta}_{k,t} \quad (15)$$

$$\hat{Y}_{k,t} = F_{t+k} \, P_{k,t} \, F'_{t+k} + V_{t+k} \quad (16)$$

Quando F_{t+k} não é conhecida no instante t, as expressões (15) e (16) se modificam para refletir a incerteza adicional na previsão decorrente da incerteza associado ao valor de F_{t+k}.

MODELOS DE ESTADOS MÚLTIPLOS

A abordagem Bayesiana faz com que, no instante (t-1) as únicas informações necessárias para prever a observação no instante t, sejam a distribuição $(\theta_{t-1} | Y^{t-1}, F^{t-1})$ e o MLD da transição(t-1, t). Logicamente, nada obriga a que o MLD seja o mesmo para todas as transições. Neste item, será tratado o caso no qual nenhum MLD sozinho descreve adequadamente o que irá acontecer ao processo no próximo período. Isto possibilita um tratamento adequado a situações anormais que ocorram subitamente, assumindo grande importância se for considerado que em processo sócio-econômicos estas ocorrências são até certo ponto normais (por exemplo em séries de vendas, observações esdrúxulas ocorrem com freqüência, além de mudanças de nível do processo em decorrência de propaganda ou alteração de hábitos do consumidor). Estas situações podem ser adequadamente expressas como parte de um MLD, relacionando-se variações do ruído e da perturbação aos parâmetros do processo (exceto quando as mudanças nas matrizes V e/ou W não forem associadas a quantidades mensuradas a priori).

Para tratar este problema serão considerados modelos que em qualquer instante t compreende um conjunto de MLDs cada qual com uma forma definida idêntica (F e G iguais) mas diferindo entre si pela matriz de covariância do ruído V e perturbação W_t.

Como ilustração, seja o modelo de crescimento linear

$$Y_t = \mu_t + V_t$$

onde:

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \delta\mu_t$$

$${}_t = \beta_{t-1} + \delta\beta_t$$

O ruído V_t afeta o processo somente no instante t, não afetando os valores subseqüentes. Já as perturbações do nível $\delta\mu_t$ e inclinação $\delta\beta_t$ se incorporam ao processo, atuando sobre todos os valores futuros da série. A Figura 1, ilustra os três casos, (supondo que V_t, $\delta\mu_t$ e $\delta\beta_t$ só não são nulos no instante t).

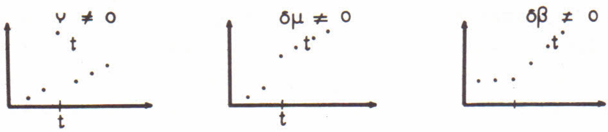

Figura 1 - Comportamento das variâncias.

Um valor muito grande de V_t causa somente uma transiência instantânea, de $\delta\mu_t$ causa uma mudança de nível permanente e de $\delta\beta_t$ causa uma mudança de inclinação permanente. Pode-se, portanto, depreender o papel desempenhado pelas matrizes V_t e W_t. V_t excepcionalmente grande indica uma observação anormal no instante t sem efeito no futuro; já W_t, indica uma perturbação no instante t que se incorpora ao processo. Isto permite que se modele explicitamente estas situações supondo a existência de um número de possíveis distribuições a partir das quais os valores de V_t, $\delta\mu_t$ e $\delta\beta_t$ são gerados no instante t. Como W_t é (Nx1), pelo menos (N+1) dessas anormalidades podem ser modeladas.

Esta colocação dá origem ao modelo de múltiplos estados. Nela um modelo $M_t^{(j)} = (F_t, G, V_t^{(j)})$, conhecido, define um estado j e caracteriza a evolução do processo no instante t. O modelo de múltiplos estados compreende todo o conjunto $M^{(j)}$ e descreve o estado em curso no instante t por um processo Markoviano. Cada um dos modelos $M^{(j)}$ tem uma probabilidade π_j constante de estar em curso no instante t. Para exemplificar, seja o modelo de crescimento linear:

Quatro estados básicos podem ser definidos:

1. Normal, 2. Mudança de Nível, 3. Mudança de inclinação e 4. Transiente.

Figura 2 - Representação dos quatro estados.

Cada um deles é caracterizado pelas variâncias do ruído e da perturbação (além das probabilidades de estado π_j, $j = 1,\ldots,4$) conforme mostrado na Tabela I.

Estado	V_t	Var. Pert. Nível	Var. Pert. Inclinação
1	normal	muito pequena	muito pequena
2	normal	grande	muito pequena
3	normal	muito pequena	grande
4	grande	muito pequena	muito pequena

Dado um modelo $M^{(j)}$, a distribuição a posteriori de θ_t pode ser obtida diretamente pelo filtro de Kalman usando os valores V e W correspondentes. Supondo que as probabilidades a posteriori de θ_t é uma combinação linear de N distribuições normais distintas, onde N é o número de estados. No instante (t+1), a distribuição a posteriori de θ_{t+1} seria uma combinação de N normais distintas. Prosseguindo, se obteria N, N, ... componentes num processo proliferativo que, de algum modo deve ser contido. O seguinte procedimento é sugerido por Harrison & Stevens: grupar toda a informação a posteriori correspondente ao mesmo estado j, preservando as informações mais relevantes (e reduzindo a dimensão a posteriori N^2 para a dimensão a priori N). Isto pode ser feito pelas equações:

$$\theta_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N} Pr_t^{(i,j)} \theta_t^{(i,j)} \Big/ \left[\sum_{i=1}^{N} Pr_t^{(i,j)} \right]$$

$$P_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{N} Pr_t^{(i,j)} \{ P_t^{(i,j)} + [\theta_t^{(i,j)} - \theta^{(i,j)} - \theta_t^{(i,j)}](\theta_t^{(i,j)} - \theta_t^{(i,j)})' \}$$

onde:

$Pr_t^{(i,j)}$ - probabilidade de transição $(M^{(i)}, M^{(j)})$ em (t-1,t).

MODELOS BAYESIANOS COM DESCONTOS

A formulação do modelo Bayesiano apresentado anteriormente apesar de simples e elegante, apresenta como dificuldade o conhecimento prévio das variâncias dos ruídos (V_ε, V_μ e V_β no caso do MCL), o que dificulta ao usuário sem maiores conhecimentos estatísticos. Na tentativa de contornar esta dificuldade Ameen & Harrison (1983), apresentaram a formulação do MLD com descontos. Neste trabalho vamos descrever o comportamento do Modelo de Crescimento Linear de Estados Múltiplos com Descontos.

MCL DE ESTADOS MÚLTIPLOS COM DESCONTOS

Neste trabalho vamos considerar a caracterização de quatro estados possíveis, tais como:

a. Estado 1: Normal

É o estado padrão, em que o comportamento da série não apresenta qualquer tipo de descontinuidade sendo as variações observadas causadas basicamente pela variância V_t;

$$M_t^{(1)} = \{\underline{F}_t, \underline{G}, V_t, \underline{B}\}$$

b. Estado 2: Transiente

É o estado em que ocorrem descontinuidades bruscas na série, sendo porém de caráter transitório. Este comportamento é explicado por um valor acentuado de variância do ruido das observações;

$$M_t^{(2)} = \{\underline{F}_t, \underline{G}, V_G, \underline{B}\}$$

onde $V_G >> V_t$ (Usualmente $V_G = \alpha V_t^{(N)}$)

c. Estado 3: Mudança de Nível

Adequado para a modelagem de mudanças estruturais no processo gerador da série, que acarreta numa mudança permanente no nível da série. Este comportamento é explicado por um valor pequeno do fator de desconto do nível;

$$M_t^{(3)} = \{\underline{F}, \underline{G}, V_t, \underline{B}^{(N)}\}$$

onde $\underline{B} = \text{diag}\{B_\mu, \beta_\beta\}$, sendo $\beta_\mu^{(N)} = [\beta_\mu^{(N)}]^{k3}$; $k3>>1$

d. Estado 4: Mudança de Inclinação

É aplicado à taxa de crescimento da série β_t, é representado por:

$$M_t^{(4)} = \{\underline{F}_t, \underline{G}, V_t, \underline{B}^{(I)}\}$$

onde $\underline{B}^{(I)} = \text{diag}\{\beta_\mu^{(N)}; \beta_\beta^{(I)}; \beta_\beta^{(I)}\} = \{\beta_\beta^{(N)}\}^{k4}$; $k4 >>1$

Vemos portanto que a caracterização dos quatro estados do MCL com descontos é feita a partir do conhecimento prévio de 6 quantidades: os valores nominais $V_t^{(N)}$; $\beta_\mu^{(N)}$ e $\beta_\beta^{(N)}$ e os fatores α, k3 e k4.

APLICAÇÃO

O método descrito foi aplicado à uma série temporal simulada de 20 observações geradas de uma população Normal (μ=1; σ=0.1) e nela foi introduzido as seguintes descontinuidades:

i) Transiente de 5σ em t=5;

ii) Mudança de Nível Permanente de 2.5σ em t=10;

iii) Mudança de Inclinação Permanente de 2.5σ em t=15.

A tabela com os valores da série e o respectivo gráfico estão apresentados na Tabela I e a Figura 1, respectivamente.

TABELA I - VALORES DA SÉRIE SIMULADA

Nº da Observação	Valor
1	1.11
2	1.14
3	1.11
4	1.10
5	1.75
6	1.12
7	1.11
8	1.12
9	1.19
10	1.54
11	1.49
12	1.51
13	1.53
14	1.55
15	1.10
16	1.03
17	1.02
18	1.03
19	0.99
20	0.84

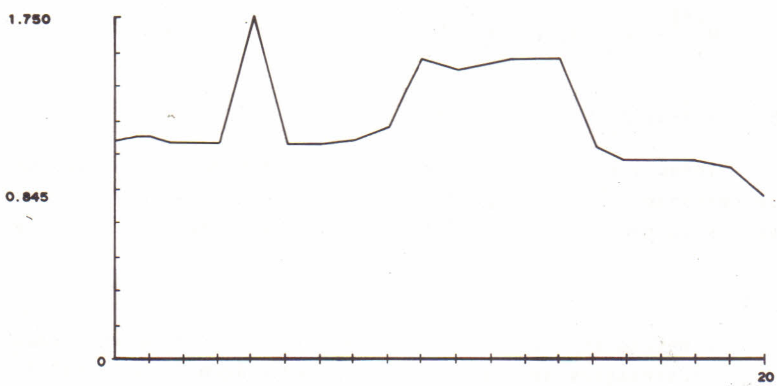

Figura 1 - Gráfico da Série Simulada com 20 observações.

ANÁLISE

Procedemos inicialmente à calibração dos hiperparâmetros do modelo, após várias tentativas, optamos por adotar os próprios valores adotados no programa SBPC, que são:

$\pi_1 = 0.8000$ $\pi_2 = 0.0940$ $\pi_3 = 0.0830$ $\pi_4 = 0.0230$

$\beta_2 = 0.90$ $\beta_2 = 0.95$ $k3 = 15$ $k4 = 15$

$\alpha = 90$ $V_t = 0.001$

As probabilidades condicionadas estão apresentadas na Tabela II.

TABELA II - PROBABILIDADES CONDICIONADAS

$M_t^{(1)}$	$M_t^{(2)}$	$M_t^{(3)}$	$M_t^{(4)}$	Modelo de maior probabilidade
0.8789	0.0467	0.0491	0.0253	1
0.9045	0.0253	0.0502	0.0200	1
0.8689	0.0323	0.0763	0.0226	1
0.8977	0.0172	0.0608	0.0243	1
0.1327	0.8158	0.0450	0.0064	2
0.9865	0.0123	0.0012	0.0000	1
0.9871	0.0123	0.0006	0.0000	1
0.9766	0.0124	0.0110	0.0000	1
0.9395	0.0139	0.0466	0.0000	1
0.3117	0.1361	0.3900	0.1623	3
0.9114	0.0117	0.0556	0.0213	1
0.9198	0.0122	0.0478	0.0202	1
0.9183	0.0129	0.0485	0.0204	1
0.9138	0.0135	0.0514	0.0213	1
0.1138	0.3322	0.4858	0.0682	3
0.8802	0.0187	0.0766	0.0246	1
0.8625	0.0209	0.0846	0.0320	1
0.8612	0.0205	0.0833	0.0350	1
0.8401	0.0238	0.0954	0.0407	1
0.6538	0.0554	0.2045	0.0863	1

A adaptabilidade (automática) do modelo pode ser sentida em:

a) em t=5, que indica um transiente;

b) em t=10, que indica uma mudança de nível;

c) em t=15, o modelo interpreta como uma uma mudança de nível, mas na realidade o que ocorreu foi uma mudança de inclinação.

Assim, a performance do modelo possivelmente pode ser melhorada, pois o sistema foi insensível a mudança de inclinação (estado 4) ocorrida no período 15.

CONCLUSÃO

Neste trabalho pode-se verificar que a modelagem Bayesiana é realmente muito útil para a análise de séries que apresentam mudanças estruturais, bem como a presença de outlier, pois permite ao investigador a incorporar essas descontinuidades ao modelo em estudo.

Quanto ao programa utilizado pode-se afirmar que realmente está muito bem elaborado, pois somente quanto a mudança de inclinação é que o modelo não apresentou sensibilidade instantânea, mas analisando-se mais algumas observações que foram extrapoladas na série, pode-se afirmar que o sistema leva em média 7 observações para detectar uma mudança de inclinação.

BIBLIOGRAFIA

1. FARIAS NETO, J.J. (1981). Modelo Bayesiano de Crescimento Linear Aplicado à Previsão de Séries Temporais. *Tese de Mestrado*, Grupo de Sistemas, DEE PUC-Rio.
2. SOUZA, R.C. (1988). Modelos Bayesianos para Previsão e Controle Via CUSUM. Minicurso apresentado na XIRRE, IERMQ e III ERERS, Santa Maria, RS.
3. Anotações de Aula do Prof. Reinaldo Castro Souza. PUC. Rio.

Recebido em dezembro, 1989; aceito em janeiro, 1990.