UMA ESTRATÉGIA NÃO-TRADICIONAL PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º GRAU

Angela Rocha dos Santos
Instituto de Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro, RJ.

RESUMO

Desde 1983, um grupo de professores do Departamento de Métodos Matemáticos da Universidade Federal do Rio de Janeiro, preocupados em despertar vocações para pesquisa e estimular o espírito científico nos alunos de Graduação, vêm desenvolvendo um projeto de Iniciação Científica de caráter extra-curricular que se baseia no estudo por meio da formulação de modelos matemáticos.

Esta atividade é oferecida não só a alunos de Matemática mas também a alunos de outras áreas que usam a Matemática como ferramenta básica e atende tanto ao aspecto informativo quanto ao aspecto formativo da educação pois, por ter caráter predominantemente ativo, transforma o aluno de paciente em agente do processo aducativo.

Dentro do Projeto desenvolvido os modelos matemáticos são usados como forma de levar os alunos a adquirirem e/ou aprofundarem seus conhecimentos ao mesmo tempo em que reconstroem por si mesmos todas as etapas do processo criativo que levam em última análise ao desenvolvimento da Ciência.

Este projeto também fornece subsídios para que um método ativo semelhante possa ser pelo menos em parte, aplicado nos cursos regulares da Graduação, visando a melhoria da qualidade do Ensino da Matemática.

SUMMARY

SANTOS, A.R. dos., 1988. One non-traditional strategy the the teaching of mathematics for the third grade. Ciência e Natura, 10: 13-23.

In this paper, we report a teaching experience which has been done in Mathematics Institute of Universidade Federal do Rio de Janeiro since 1983 by a group of teachers.

This activity has been presented as an extra-course of Scientific Initiation and its main purpose is to develop the Scientific though and the searching vocation of the undergraduated students.

In this project, mathematical models have been used by teachers and students as a way of acquiring or improving their learning while they rediscover by themselves all the steps on the creative process that lead to scientific development.

This scheme is important because it valorizes two aspects of education - the informative and the formative one-changing the focal point of the educational process from the teacher to the students.

UMA ESTRATÉGIA NÃO-TRADICIONAL PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º GRAU

O que são Modelos Matemáticos?

Um modelo, de modo geral, é tudo que tenta imitar através de um meio qualquer (um protótipo, um mapa, uma equação matemática) o que ocorre na natureza.

Os modelos devem ser adaptados e ajustados à situação que se quer estudar ou para qual são construídos. Por exemplo, não é natural se tentar achar uma determinada estrada ou rodovia em um mapa de relevo. Esta informação deverá ser procurada (e encontrada) num mapa rodoviário da região em que estamos interessados. Portanto ao se construir qualquer modelo é importantíssimo saber com clareza o propósito a que se destina.

Um Modelo Matemático, por sua vez, é uma tentativa abstrata e simplificada de se descrever a realidade ou uma parte dela, usando a linguagem matemática.

Como se formula um Modelo Matemático

O procedimento científico adotado ao tentarmos matematizar um problema real qualquer envolve essencialmente três etapas interrelacionadas:

(i) Formulação de hipóteses;

(ii) Resolução do problema matemático;

(iii) Interpretação crítica dos resultados obtidos;

A primeira etapa compreende a observação do fenômeno, a definição das variáveis envolvidas e de suas interrelações.

A definição das variáveis, por sua vez, consiste na separação das várias partes do universo em:

a) coisas cujos efeitos são desprezíveis: essas, o Modelo ignora - são as chamadas hipóteses simplificadoras;
b) coisas que afetam o Modelo mas cujo comportamento não é objeto de estudo - são as chamadas variáveis independentes, parâmetros ou variáveis de entrada;
c) coisas cujo comportamento o Modelo tenta explicar - variáveis dependentes ou de saída.

Essas três categorias (variáveis desprezíveis, variáveis dependentes e independentes) são importantes no processo de modelagem. Se as variáveis erradas são desprezadas, o Modelo não será bom; se muitas variáveis forem levadas em consideração, o Modelo resultante será extremamente complexo e provavelmente requerirá uma incrível quantidade de dados.

Às vezes um matemático precisa negligenciar certos efeitos não porque os considera desprezíveis, mas simplesmente porque não sabe como manuseá-los e, esperar que essa simplificação não invalide os resultados finais.

Assim, por exemplo, quando Galileo estudou o problema da queda dos corpos, desprezou a resistência do ar por ser esta um efeito secundário comparado com a ação da Gravidade. Esta é uma hipótese que simplifica enormemente o problema pois, para considerarmos movimentos em meios onde a resistência seja não-desprezível, como por exemplo, na água, devemos primeiramente saber que tipo de resistência e de que elementos depende.

Esta informação não nos é dada pela Matemática, mas pela Física.

Atualmente sabe-se que a resistência é uma forma que atua em conjunto com outras, tais como a força da Gravidade, e depende de muitos fatores como a densidade do meio, a forma e a velocidade do objeto. Para se obter uma expressão precisa para a resistência do meio, todos esses fatores devem ser levados em consideração, como é feito por exemplo, no projeto de aviões.

Se Galileo não tivesse desprezado este efeito ao estudar as leis da queda dos corpos, não teria chegado a nenhum resultado já que a Matemática necessária para tratar esses problemas, não estava suficientemente desenvolvida naquela época.

Ao montarmos um Modelo, devemos ter em mente também os fins que queremos atingir, pois é impossível minimizar ao mesmo tempo generalidade, realismo e precisão como em economia não se consegue um investimento que nos dê ao mesmo tempo segurança, liquidez e rentabilidade máximas.

A definição das variáveis e de suas interrelações constituem as hipóteses do Modelo que devem ser formuladas baseadas em experimentos e observações e tendo em mente o fim que queremos atingir.

As interrelações entre as variáveis, como já dizemos, em geral não nos são dadas pela Matemática mas pelas outras Ciências- Física, Química, Biologia, por exemplo. A Matemática contribui com a sua linguagem.

Neste ponto chega-se naturalmente ao estudo da Teoria das Equações Diferenciais que se constitui essencialmente na linguagem da Ciência Moderna. Há outras maneiras de tentarmos descrever o mundo real, mas nenhuma tão flexível, tão versátil, tão fácil de manipular analiticamente e tão conveniente para o uso de computadores. Através das Equações Diferenciais conseguimos estudar simples e rapidamente importantes classes de fenômenos das mais diversas Ciências.

A segunda etapa inclui os cálculos necessários à resolução matemática do problema e conseqüentemente o estudo da Teoria Matemática necessária a esta resolução. Essa etapa inclui também o uso de computadores para obter soluções aproximadas onde soluções analíticas não são possíveis.

A última etapa consiste na comparação dos resultados teóricos obtidos com os resultados experimentais a fim de se comprovar a validade do Modelo e possivelmente tentarmos aprimorá-lo. Se os resultados teóricos não coincidem com os experimentos então devemos voltar as etapas (i) e (ii) para tentarmos reformular e/ou aprimorar o Modelo.

Esta fase é usada também para tirar conclusões e prever o futuro.

Este é um processo dedutivo; se as hipóteses são verdadeiras, as conclusões devem ser verdadeiras. Predições falsas implicam que o Modelo deve estar errado em algum aspecto.

Infelizmente as coisas não são tão simples assim. Nossos Modelos são idealizados para tentar descrever fenômenos reais que são constituídos por processos iterativos de natureza bastante complexa e portanto não se pode esperar previsões perfeitas de Modelos que são apenas uma grosseira aproximação da realidade.

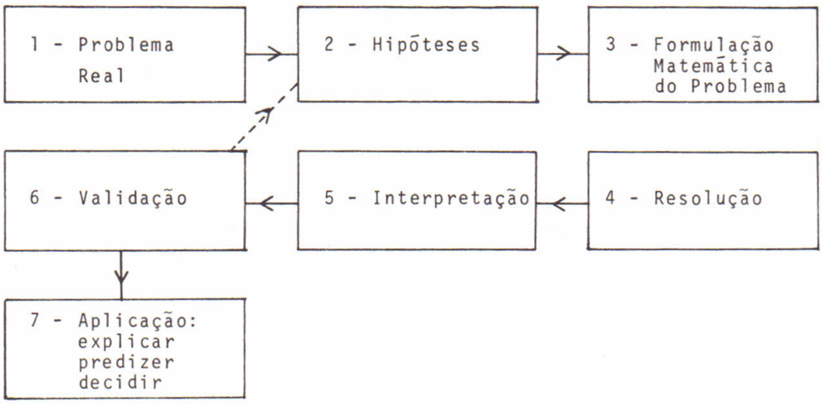
Nesse caso como podemos julgar um Modelo?

Em primeiro lugar os resultados devem estar de acordo com os dados teóricos e o senso comum, embora não seja muito aconselhável se basear exclusivamente no senso comum pois ele pode estar errado. Deve-se começar com predições fáceis. Se elas são ruins então volta-se as etapas (i) e (ii) e reformulamos o Modelo (ou o aprimoramos). Se essas predições são boas isso nos dá o sentimento que o Modelo se aplica aos nossos propósitos. Se a precisão é mais baixa do que esperávamos é bom tentar compreender porquê, pois isso pode estar encobrindo hipóteses falsas. Às vezes é impossível testar o Modelo, por exemplo um Modelo para medir os efeitos de uma guerra nuclear. Isto acontece mais freqüentemente em campos de estudo onde as leis não são precisamente formuladas (Ciências Humanas). Aqui a experiência é essencial.

Neste ponto o Modelo está pronto para ser usado, mas com cuidado! É perigoso aplicá-lo cegamente a problemas que diferem grandemente daqueles para os quais eles foram testados. Toda aplicação deve ser entendida como um teste para o Modelo.

As idéias aqui expostas podem ser esquematizadas no quadro-resumo a seguir:

A etapa (i) corresponde aos quadros 1, 2 e 3, a etapa (ii) ao quadro 4 e a etapa (iii) aos quadros 5, 6 e 7.



Note ainda que no esquema acima os retângulos do lado esquerdo correspondem ao mundo real, os do lado direito ao "mundo matemático" e os intermediários, às interligações entre essas "dois mundos".

EXEMPLO: um modelo matemático para o controle da potência da vacina de febre amarela

O Problema Real

A febre amarela é uma doença epidêmica causada por um vírus e é particularmente grave em países tropicais, por ser transmitida pela picada de um mosquito. Quase sempre é muito grave e pode causar a morte em sete a dez dias.

O método mais eficaz de combate à doença se baseia na vacinação preventiva e em medidas de profilaxia para o extermínio dos mosquitos vetores.

A vacinação preventiva tem por objetivo provocar nos vacinados a formação de anticorpos que conferem imunidade ativa.

As vacinas se preparam em laboratórios especializados e autorizados e são constituídas por linfas carregadas de vírus atenuados por processos especiais, emulsionados em solução salina fisiológica.

Após à etapa de produção, as vacinas empregadas para imunização passam por vários testes de qualidade, entre outros: o de pH, identidade, esterilidade e potência.

A potência ou título mede a grosso modo o conteúdo viral da vacina a fim de garantir a sua inocuidade e eficácia e é medida experimentalmente.

Os métodos normais usados nos laboratórios para medir a potência são essencialmente de dois tipos. O primeiro é o que inocula a vacina diluída em cobaias vivas e o método de cálculo da potência consiste numa relação percentual média entre o número de cobaias mortas e o tempo de sobrevida. O segundo consiste em inocular uma certa dose de vacina diluída em cultivos celulares e a potência é calculada por meio de uma razão, dada em logaritmo, entre as células destruídas após um certo tempo por diluição empregada no processo e por dose humana da vacina.

Os dois métodos apresentam vantagens e desvantagens em que são válidos mas o primeiro é mais dispendioso além de exigir o sacrifício de animais por isso, atualmente, o segundo método tem sido mais usado nas Instituições que fazem este controle.

O nosso objetivo é definir matematicamente a potência da vacina formulando um modelo que descreva a relação entre as variáveis envolvidas no segundo método.

Nesse método o cultivo é feito em placas esterilizadas de 24 furos onde se inocula usando três amostras diferentes de vacina, 0,1 ml de cada diluição empregada. Após uma hora, tempo necessário para que os vírus penetrem nas células uma substância gelatinosa é adicionada para diminuir a mobilidade dos vírus e garantir que o ataque dos mesmos esteja restrito a uma determinada região da placa. Cinco dias são necessários para que seja visível a olho nú as lesões características do grupo de células mortas. O número médio de lesões em cada diluição é dividido pela concentração e multiplicado por cinco (pois a dose humana de vacina é de 0,5 ml), o logaritmo decimal desse número é então a potência da vacina. Para que a vacina seja eficaz concluiu-se experimentalmente que a potência não deve ser inferior a 3.

Hipóteses

(i) Os vírus e as células não se reproduzem durante o processo.

(ii) A taxa de variação das células lesionadas depende da relação vírus/célula. Esta relação aumenta e o processo se torna mais rápido, a medida em que as células morrem. Por outro lado quando a diluição é fraca todas as células são destruídas no tempo em que dura o processo.

(iii) De (i) e (ii) pode-se concluir que a taxa de variação das células mortas é proporcional ao número de células mortas em cada instante.

(iv) O número de células destruídas no instante inicial é igual ao número de partículas virais presentes na dose de vacina. Esta hipótese nem sempre é verdade pois uma mesma célula pode ser atacada por mais de um vírus, mas se a diluição for bem feita é bastante razoável.

Formulação Matemática

Seja $N(t)$ o número de células mortas num instante t qualquer de tempo e V o número de partículas virais na dose de vacina. Então tem-se que

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

$$N(0) = V$$

Resolução Matemática

Resolvendo o problema de valor inicial em (3.3) tem-se que

$$N(t) = Ve^{\alpha t}$$

Interpretação

A constante de proporcionalidade α que aparece na equação em 3.3 é a potência da vacina e para t = 1h tem-se:

$$\alpha = \ell n \frac{N}{V}$$

Validação

A potência assim calculada concorda significativamente com a obtida em laboratório. Como exemplo veja os dados da Tabela abaixo.

diluição (partículas/ml)	lesões na placa A	B	C	nº médio de lesões
1:4	*	*	*	*
1:16	*	*	*	*
1:64	24	20	19	21
1.256	12	10	8	10

A, B, C amostras da vacina
* não foi possível contar (todas as células destruídas)

Volume inoculado: 0,1 ml Dose humana: 0,5 ml
Potência calculada no laboratório: 3.99 log/dose humana
Potência usando a equação matemática: $\bar{\alpha}$ = 3.98, onde $\bar{\alpha}$ é a média dos α obtidos para cada diluição. O resultado matemático foi convertido para logaritmo decimal.

Aplicação

A utilidade dessa equação é permitir o processo inverso, isto é, conhecendo a potência requerida para que a vacina seja eficaz (no caso $\alpha \geq 3.0$) estabelecer para cada diluição qual deve ser o número mínimo de células mortas no cultivo celular inoculado. Uma tabela desse tipo evita os cálculos posteriores ao experimento laboratorial para confirmar a eficácia da vacina.

Como funciona o Projeto

O projeto se divide basicamente em duas fases. Na primeira comum a todos os alunos, estuda-se em forma de seminários os modelos clássicos tais como crescimento de populações, propagação de epidemias, diluição de substâncias, circuitos elétricos e vibrações mecânicas. Eventualmente entre os seminários algumas exposições sobre a teoria matemática necessária à resolução dos problemas é feita pelo professor. O processo de avaliação dos seminários é conjunto: todos se avaliam e são avaliados. É avaliada também a participação da turma como um todo e um relatório escrito é apresentado pelo expositor.

A segunda fase é específica para cada aluno ou grupo de no máximo três alunos. É nesta etapa que projetos específicos são desenvolvidos seguindo o esquema:

(i) escolha do tema;
(ii) levantamento bibliográfico;
(iii) leituras;
(iv) seminários de apresentação dos assuntos estudados ao grupo para debate e discussão;
(v) redação final e conclusões.

Por que o uso de Modelos para ensinar Matemática?

Essa pergunta leva a outras indagações de caráter filosófico:

- Qual o aluno que queremos formar?
- Qual o papel da Universidade - para com o aluno e para com a sociedade?
- Qual dos aspectos da educação (informativo ou formativo) deve ser enfatizado?

A principal falha da Universidade nos últimos anos, se dá pela priorização do seu papel informativo em detrimento do seu papel formativo, isto é, a Universidade de um modo geral, tem se empenhado fortemente em seu papel de transmissora de conhecimentos mas tem sido extremamente falha em formar o aluno para que ele venha a participar efetiva e criativamente da construção do conhecimento científico.

Nem a Universidade, nem a Sociedade como um todo têm definido com clareza o profissional que pretende formar. Por falta dessa definição precisa e clara e pela inexistência de canais que promovam a discussão desta questão crucial, a Universidade tem abdicado do seu papel de construtora do conhecimento, capaz de formar profissionais criativos dentro de uma perspectiva científica para se ater a um papel de mera transmissora de conhecimentos que forma técnicos de alto nível.

Por outro lado, as nossas aulas em geral, privilegiam a função docente de repassar conhecimentos - o professor é o centro do processo educativo - e raramente informam como esse conhecimento é gerado ou se preocupa com o fato de que a educação Científica se se supõe ser uma atividade criativa que não pode se desenvolver por meio simplesmente, de exposições e leituras de livros e manuais escritos especialmente para estudantes que raramente são postos ante o problema de conduzir um processo de investigação nem de apreciá-lo com visão crítica.

Esta é uma tentativa de reverter esta situação. De criar condições para que o aluno aprenda fazendo (ou redescobrindo), transformando-o de paciente - que é alguém que consome, aceita, guarda, reproduz, executa e obedece - em agente do processo educativo - alguém que pensa, critica, questiona, reflete, dirige, decide e atua.

Para atender a estes propósitos pensamos em oferecer uma atividade que permitisse a participação ativa do aluno de tal modo que a todos fosse dada igual oportunidade de observar, criticar, concluir e principalmente criar, integrando os aspectos formativo e informativo da educação e deslocando o centro do processo educativo do Professor (conseqüência do uso puramente de métodos expositivos) para o aluno (por meio do uso de métodos ativos).

Por seu caráter ativo essa educação é adaptada às exigências tecnológicas de qualquer espécie, da sociedade contemporânea - tarefa técnica do ensino - e por seu liberalismo é adaptada ao sentido da evolução democrática - tarefa cívica da educação.

Vantagens do Ensino por meio de Modelos

(i) Leva o aluno a redescobrir como os problemas em que estão interessados surgiram, como foram primeiramente equacionados e como, a partir desses problemas reais o conhecimento foi gerado, conduzindo-o a "reconstruir" o caminho científico produtor desse conhecimento.

(ii) Motiva fortemente os alunos de outras áreas para o estudo da Matemática porque trabalha com aplicações e portanto promove a ilustração concreta dos princípios matemáticos envolvidos.

O estudo da Matemática toma grande parte do Currículo do estudante porque ela é útil como ferramenta para resolver problemas práticos mas, exemplos dessa utilidade raramente são mostrados nos cursos tradicionais de Graduação.

(iii) A partir da observação, resolução, discussão e análise - etapas essenciais na formulação de um Modelo, usando a linguagem de Piaget, gera-se condições de desequilíbrio desencadeando-se o processo assimilação/acomodação por meio do qual se processa a real aprendizagem.

(iv) Conduz a Interdisciplinaridade do Ensino integrando as diversas

Ciências Físicas e Sociais e os diversos ramos da Matemática.

Historicamente a Matemática e a Física sempre estiveram interligadas mas atualmente as demais Ciências Físicas e Sociais (Química, Biologia, Psicologia, Economia, Sociologia) e a Matemática estão tendo importantes efeitos no desenvolvimento uma da outra.

A Matemática começa a desempenhar um importante papel no desenvolvimento da Ciência, assim como os problemas físicos condicionaram o desenvolvimento da Matemática no século XVIII.

Essa espécie de interação é extremamente importante para o desenvolvimento de ferramentas matemáticas próprias. Na realidade as mais importantes idéias de Análise, Álgebra, Topologia, surgiram de tentativas matemáticas de resolver problemas naturais. Nenhuma outra forma de trabalhar coloca tão em evidência esse aspecto de interligação entre as Ciências.

(v) Leva de forma natural ao estudo integrado da Teoria Matemática necessária à resolução do problema e ao uso do computador como instrumento de apoio para avaliar e calcular soluções aproximadas onde a teoria não é suficiente pois a busca por soluções sugere naturalmente o uso de algoritmos e/ou métodos numéricos e estatísticos.

O papel do Professor

Essa é uma forma árdua de trabalhar por isso o interesse e a participação do professor consciente do trabalho que está realizando é essencial. Por outro lado esta forma de trabalhar oferece ao professor a vantagem adicional de se colocar no papel do aluno e de aprender com eles.

O professor deve:

- inicialmente selecionar os modelos;
- incentivar os alunos;
- ceder e/ou compartilhar sua liderança;
- conduzir o estudo das questões matemáticas envolvidas;
- promover avaliações periódicas do trabalho.

A construção de modelos envolve imaginação e habilidade. É impossível ensinar a criar mas podemos oferecer ao aluno condições para que a sua criatividade natural se desenvolva.

Observações e Conclusões

Este projeto faz parte do Programa de Iniciação Científica do IM-UFRJ onde vários outros projetos com diferentes objetivos são desenvolvidos. Dele participa um grupo de professores do Departamento de Métodos Matemáticos e alunos de diferentes áreas com grande aceitação e procura. Cerca de 90% desses alunos ao se formarem, têm ingressado em cursos de Pós-Graduação no Brasil e no Exterior com excelente desempenho.

Durante o desenvolvimento do projeto nota-se grande melhora nos alunos de baixo e médio rendimento. Esta melhora ocorre especialmente pelo convívio de alunos de diferentes áreas e pelo contato desses com grupos de pesquisa, participação em congressos, edição dos melhores trabalhos, etc.

Este é um método pouco empregado por isso carece de referências, troca de informações e experiências o que aumenta muito o trabalho e responsabilidade do professor.

Ao tentarmos aplicar este método em turmas normais, surgem dificuldades adicionais como limitações de tempo, currículos fixos, pouca bibliografias, turmas grandes. No entanto alguma coisa pode ser tentada. Sugerimos a realização de seminários em algum momento do curso; o uso de modelos clássicos pré-escolhidos pelo professor que conduza ao estudo de tópicos do programa do curso; utilização da ajuda de monitores especialmente treinados para que técnicas dinâmicas possam ser empregadas com sucesso em turmas grandes.

É um dos objetivos deste projeto também, a edição dos melhores trabalhos realizados pelos alunos, o que consistirá em uma tentativa de se suprir de material bibliográfico necessário ao desenvolvimento deste método.

BIBLIOGRAFIA

1 - BENDER, Edward A. - An Introduction to Mathematical Modeling - John Wiley and Sons, Inc., 1978.

2 - BARRETO, A.C. - Teaching as Based on Interdisciplinary Mathematical Models - Proceeding of the Fourth Intercontinental Congress of Mathematical Education.

3 - BARRETO, A.C. - Mathematical Education Based on Interdisciplinary Mathematical Models - A Viable strategy for the Third World - Fifth International Congress of Mathematical Education.

4 - BURGHES, D.N. e HUNTLEY, I. - Teaching Mathematical Modelling-refleetions and advice - Int. Math. Educ. Sci. Technol, 1982 vol 13, nº 6, 735-754.

5. FLAVELL, H. John - A Psicologia do Desenvolvimento de Jean Piaget - Livraria Pioneira, Editora - São Paulo, 1975.

6. HABERMAN, C. - Mathematical Models - Prentice Hall - 1977.

Recebido em outubro, 1988; aceito em novembro, 1988.