EQUICONTINUIDADE DAS ADJUNTAS DE POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

Maria de Lourdes Merlini Giuliani
Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Neste trabalho provamos que, sob certas condições, equicontinuidade de coleções de polinômios m-homogêneos equivale a equicontinuidade forte das coleções correspondentes de adjuntas. Provamos, ainda, uma versão polinomial de um teorema clássico de Schauder.

SUMMARY

GIULIANI, M.L.M., 1987. Equicontinuity of adjoints of homogeneous polinomials. *Ciência e Natura*, 9:29-32,1987.

In this work we prove, under certain conditions, equicontinuity of collections of m-homogeneous polynomials is equivalent to strong equicontinuity of the corresponding collections of adjoints. We also prove a polynomials version of a classical theorem of Schauder.

INTRODUÇÃO

Todos os espaços vetoriais topológicos serão separados reais ou complexos. Sejam E, F espaços localmente convexos, $m \in \mathbb{N}^*$. Uma Aplicação $P:E \longrightarrow F$ é um polinômio m-homogêneo se existe $A:E^m \longrightarrow F$ tal que $A(x,\dots,x) = P(x)$, para todo $x \in E$.

Escreveremos $P=\hat{A}$ para indicar que P resulta de A. Denotaremos por $P_a(^mE; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos de E em F e $P(^mE; F)$ o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.

Evidentemente $P(^mE; F) \subset P_a(^mE; F)$. O teorema a seguir nos fornece condições necessárias e suficientes para que um conjunto de polinômios seja equicontínuo.

DESENVOLVIMENTO

Teorema: seja $\mathfrak{X} \subset P_a(^mE; F)$. São equivalentes:

i) $\mathfrak{X}$ é equicontínuo em zero

ii) $\mathfrak{X}$ é equicontínuo

iii) Para cada q seminorma contínua em F, existe U aberto não vazio de E tal que $q \circ \mathfrak{X}$ é uniformemente limitado em U.

iv) Para cada q seminorma contínua em F, existe V vizinhança de zero em E, tal que $q \circ \mathfrak{X}$ é uniformemente limitado em V.

Denotamos por Γ a coleção de todas as seminormas contínuas em F, θ uma coleção de partes limitadas de E. Para cada $B \in \theta, q \in \Gamma$, definimos

$$p_{B,q} : P(^mE; F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$P \longrightarrow \sup_{x \in B} q(P(x))$$

Uma seminorma em $P(^mE; F)$

A família de seminormas $\{p_{B,q}, B \in \theta, q \in \Gamma\}$ define a topologia τ_θ topologia localmente convexa em $P(^mE; F)$. Se θ é a coleção de todas as partes finitas (respectivamente compactas, precompactas, limitadas) de E então $\tau_\theta = \tau_s$ (respectivamente τ_o, τ_c, τ_b).

Se E, F forem espaços normados, τ_b é definida pela norma

$$||P|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||P(x)|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||P(x)||}{||x||^m}$$

Obs.: Todo subconjunto $\mathfrak{X} \subset P(^mE; F)$ equicontínuo é τ_θ limitado.

Definimos $P \in P_a(^mE; F)$ precompacto se existe alguma vizinhança de zero em E tal que P(V) é precompacto em F. Se P é precompacto então P é contínuo.

Definição: Seja $P \in P(^mE; F)$, definimos a adjunta de P e denotamos por ${}^tp$, a aplicação linear

$${}^tP : F' \longrightarrow P(^mE)$$

$${}^tP(\phi) = \phi o P.$$

A aplicação $P \longrightarrow {}^tP$ é linear

Se $\mathfrak{X} \subset P(^mE; F)$, ${}^t\mathfrak{X} = \{{}^tP, P \in \mathfrak{X}\} \subset L_a(F', P(^mE))$.

Vamos enunciar dois resultados fundamentais.

Teorema: Sejam E e F espaços normados, $P \in P(^mE; F)$. P é precompacto se e somente se ${}^tp$ é precompacto de (F', τ_b) para $(P(^mE);\tau_b)$

$(\Longrightarrow)$ a demonstração está baseada em dois fatos:

$V \in v(0)$ em E,

$V_m^o = \{P \in P(^mE), |P(x)| \leq 1$, para todo $x \in V\}$ é τ_o - compacto em $P(^mE)$.

(Este resultado está provado no cap. 2 de [11]).

V^o é τ_c - compacto em E' (pois V^o é equicontínuo e as topologias coincidem).

Provamos em [11] que ${}^tP$ é compacta.

$(\Longleftarrow)$ ${}^tP$ precompacta vamos mostrar que P é compacto.

$$u : E \longrightarrow (P(^mE), \tau_b)'$$

$$x \longrightarrow u(x) \text{ é linear}$$

$u(x)(P) = P(x)$ tem a seguinte propriedade:

$||u(x)|| = ||x||^m$ (norma definida por τ_b)

$$v : F \longrightarrow (F', \tau_b)'$$

$$y \longrightarrow v(y)$$

$$v(y)(\phi) = \phi(y)$$

$$||v(y)|| = ||y||$$

$^{tt}P : (P(^mE); \tau_b)' \longrightarrow (F', \tau_b)'$ é linear e precompacta

$\omega \longrightarrow \omega \circ {}^tP$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\ (P(^mE), \tau_b)' \arrow[r, "^{tt}P"'] & (F', \tau_b)' \end{tikzcd}$$

Este diagrama é comutativo, isto é,

$v \circ P = {}^{tt}P \circ u$

Seja B^{**} é a bola unitária fechada em $(P(^mE), \tau_b)'$ e B é a bola unitária em E.

$x \in B \Longrightarrow u(x) \in B^{**}$
$v(P(B)) \subset {}^{tt}P\ (B^{**})$
${}^{tt}P(B^{**})$ é precompacta $\Longrightarrow$ $v(P(B))$ é precompacta

$\Longrightarrow$ $P(B)$ precompacta $\Longrightarrow$ P precompacta.

Obs.: Podemos demonstrar o teorema de Schauder usando o teorema anterior

"Sejam E, F espaços de Banach
$A : E \longrightarrow F$ linear e contínua
$A^t : F' \longrightarrow E'$

A é compacta se e somente se ${}^tA$ é compacta."

$(\Longleftrightarrow)$ A compacta $\Longleftrightarrow$ A precompacta $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ é precompacta $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ compacta.

Teorema: Se E é espaço localmente convexo metrizável, $\mathfrak{X} \subset P(^mE; F)$, são equivalentes:

i) $\mathfrak{X}$ é τ_b - limitado em $P(^mE; F)$
ii) $\mathfrak{X}$ é equicontínuo
iii) ${}^t\mathfrak{X}$ é pontualmente limitado sendo $P(^mE)$ munido de τ_b.
iv) ${}^t\mathfrak{X}$ é equicontínuo de (F', τ_b) para $(P(^mE), \tau_b)$

i) $\Longrightarrow$ ii) Segue do lema: "$P \in P_a(^mE; F)$ leva limitados de E em limitados de F, então P é contínuo".

ii) $\Longrightarrow$ iii) lema A: "$\mathfrak{X} \subset P(^mE; F)$, τ_b - limitado se e somente se ${}^t\mathfrak{X}(\phi)$ é τ_b - limitado em $P(^mE)$, para toda $\phi \in F'$."

$\mathfrak{X}$ equicontínuo $\Longrightarrow \mathfrak{X}$ τ_b - ltdo $\xrightarrow{1.A}$ ${}^t\mathfrak{X}(\phi)$ τ_b - limitado, para toda $\phi \in F'$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) lema B: "${}^t\mathfrak{X}$ equicontínuo de (F', τ_b) para $(P(^mE), \tau_b)$ se e só se $\mathfrak{X}$ é τ_b - limitado.

(Este lema segue do teorema dos bipolares).

$t_{\mathcal{X}}(\phi)$ é τ_b - limitado $\xrightarrow{1.A}$ $\mathcal{X}$ é τ_b - limitado $\xrightarrow{1.B}$ ${}^t\mathcal{X}$ é equicontínuo.

Teorema: Seja E espaço de Baire, $\mathcal{X} \subset P(^mE; F)$. São equivalentes:

i) $\mathcal{X}$ é τ_s - limitado em $P(^mE, F)$

ii) $\mathcal{X}$ é equicontínuo

iii) ${}^t\mathcal{X}$ é pontualmente limitado sendo $P(^mE)$ munido de τ_s.

iv) ${}^t\mathcal{X}$ é equicontínuo de (F', τ_b) para $(P(^mE), \tau_b)$

ii) $\Longrightarrow$ ii) é uma versão polinomial do teorema de Banach - Steinhaus

ii) $\Longrightarrow$ iii) lema A'

iii) $\Longrightarrow$ iv) ${}^t\mathcal{X}(\phi)$ é τ_s - limitado $\xrightarrow{1.A'}$ $\mathcal{X}$ é τ_s - limitado $\xrightarrow{E\ Baire}$ $\mathcal{X}$ é equicontínuo $\xrightarrow{T.B.S.}$ $\mathcal{X}$ é τ_b - limitado $\xrightarrow{1.B}$ ${}^t\mathcal{X}$ é equicontínuo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. Aron and M. Schottenlöher, Compact Holomorphic Mappings on Banach spaces and the Approximation Property, J. Func. Analysis 21 (1976), 7-30.

[2] J. Bochnak and J. Siciak, Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces, Studia Math. 39 (1971), 59-76.

[3] A. Grothendiek, Espaços vectoriels topologiques, Publicação da Soc. Mat. de São Paulo, 3ª edição (1964).

[4] J. Horváth, Topological vector spaces, Adilson-Wesley Publishing Company (1966).

[5] S. Kakutani, A proof of Schauder's Theorem, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 228-231.

[6] S. Mazur and W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomishen Operation, Studia Math. 5 (1934), 50-68.

[7] D.P. Pombo, Jr., On adjoints of non-linear mappings, Bull. Aust. Math. Society, 33 (1986), 227-236.

[8] D.P. Pombo Jr., Homogeneous polynomials in topological vector spaces over valued fields, a aparecer.

[9] J. Shcauder, Über lineare vollstetige operatoren, Studia Math. 2 (1930), 183-196.

[10] L. Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermánn (1970).

[11] M.L.M. Giuliani, Adjuntas de polinômios homogêneos contínuos, UFRJ (1986).

Recebido em novembro, 1987; aceito em dezembro, 1987.