# DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Alcibiades Gazzoni e Alsimar T. Ferreira Gazzoni

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas.UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Dada uma seqüência de números reais, não necessariamente distintos, $\tau=(\tau_i)_{i=1}^n$, diz-se que um polinômio P interpola uma função f em $\tau$ quando, para cada $\tau_i$ de $\tau$, que ocorre m vezes, tem-se

$$P^{(j-1)}(\tau_i) = f^{(j-1)}(\tau_i),\ j=1,\ldots,m$$

onde $P^{(j-1)}$ e $f^{(j-1)}$ representam, respectivamente, a derivada de ordem j-1 de P e de f.

Define-se a k-ésima diferença dividida de f, nos pontos $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$ de $\tau$, como sendo o coeficiente líder do polinômio de grau no máximo k que interpola f em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$.

Tendo em vista a definição de k-ésima diferença dividida, inicialmente, no presente trabalho, estuda-se a unicidade do polinômio de interpolação.

A seguir, apresenta-se a definição e algumas propriedades da k-ésima diferença dividida e, finalmente, demonstra-se que, se f é de classe $C^k$ em $[a,b]$, onde $a=\min\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$ e $b=\max\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$, então a definição anterior de k-ésima diferença dividida é equivalente a

$$\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[t_k(\tau_{i+k}-\tau_{i+k-1})+\ldots+t_1(\tau_{i+1}-\tau_i)+\tau_i]dt_k\ldots dt_1$$

SUMMARY

GAZZONI, A. and GAZZONI, A.T.F., 1984. Divided difference. Ciência e Natura, 6:31-40, 1984.

Given a sequence of real numbers, not necessarily distinctive, $\tau=(\tau_i)_{i=1}^n$, it is said that a polynomial P interpolates,a function f in $\tau$ when, for each $\tau_i$ of $\tau$, that, occurs m times, in results

$$P^{(j-1)}(\tau_i) = f^{(j-1)}(\tau_i),\ j=1,\ldots,m$$

were $P^{(j-1)}$ and $f^{(j-1)}$ respectively represent the derivative of order j-1 of P and f.

The kth divided difference of f becomes defined, in the points of $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$ of $\tau$, as being a leader coefficient of polynomial of degree of maximum k that interpolates f in $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$.

Having in mind the definition of kth divided difference, initially, in this paper, the uniqueness of polynomial of interpola-

tion is studied. Furtheron, the definition and some properties of kth divided difference are presented, and finally it is demonstrated the if f is at a class od $C^k$ in $[a,b]$, where $a=\min\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$ and $b=\max\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$ then previous definition of kth divided difference becomes equivalent to

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}\left[t_k(\tau_{i+k}-\tau_{i+k-1})+\ldots+ t_1(\tau_{i+1}-\tau_i) + \tau_i\right]dt_k\ldots dt_1 .$$

INTRODUÇÃO

*Definição 1*

Seja $\tau=(\tau_i)_{i=1}^n$ uma seqüência de pontos não necessariamente distintos.

Dizemos que um *polinômio* P *interpola* uma função f *em* $\tau$, se para cada $\tau_i$ de $\tau$ que ocorre m vezes temos

$$P^{(j-1)}(\tau_i) = f^{(j-1)}(\tau_i),\ j=1,\ldots,m.$$

onde $P^{(j-1)}$ e $f^{(j-1)}$ representam respectivamente a derivada de ordem j-1 de P e f.

*Teorema 2*

Seja $\tau= (\tau_i)_{i=1}^{N+1}$ e f uma função dada que possui tantas derivadas consecutivas em cada ponto de $\tau$, quantas forem as vezes que esse ponto ocorre em $\tau$, menos uma. Então, existe um único polinômio $P_N(x)$ de grau no máximo N, que interpola f em $\tau$.

*DEMONSTRAÇÃO*

Seja $\gamma=(\gamma_j)_{j=1}^k$, $k\leq N+1$, a seqüência formada somente pelos pontos distintos de $\tau$. Consideremos os inteiros, $m_j$, $j=1,\ldots,k$, que indicam respectivamente o número de vezes que $\gamma_j$ ocorre em $\tau$. É claro que $m_1+\ldots+m_k = N+1$. Assim pela definição 1, basta mostrar que existe um único polinômio

$$P_N(x) = a_0+a_1x+\ldots+ a_Nx^N,$$

de grau no máximo $N=m_1+\ldots+m_k-1$, que em cada $\gamma_j$, $j=1,\ldots,k$ satisfaz às condições

$$P_N^{(i-1)}(\gamma_j)=f^{(i-1)}(\gamma_j),\ i=1,\ldots,m_j. \tag{1.1}$$

De fato:

Para cada j fixo, as condições impostas em (1.1), produzem $m_j$ equações lineares nas N+1 incógnitas $a_0,\ldots,a_N$. Então, fazendo j variar de 1 até k, obtemos um sistema de N+1 equações lineares com N+1 incógnitas.

Indiquemos esse sistema por Ay=b, onde A é a matriz dos coeficientes das incógnitas,

$$y = [a_0, \ldots, a_N]^T$$

$$b = \left[f(\gamma_1), f'(\gamma_1), \ldots, f^{(m_1-1)}(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f^{(m_2-1)}(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_k), \ldots, f^{(m_k-1)}(\gamma_k)\right]^T$$

Mostremos que o sistema homogêneo, $Ay=0$ tem somente a solução trivial.

Sem perda de generalidade, façamos $f(x)\equiv 0$. Assim, passamos a procurar um polinômio $p(x)$, de grau no máximo N, tal que $p^{(i-1)}(\gamma_j)=0$, $i=1,\ldots,m_j$ e $j=1,\ldots,k$.

Desde que, $\gamma_j$ é uma raiz repetida de ordem $m_j$, temos que $p(x)=\alpha.(x-\gamma_1)^{m_1}\ldots(x-\gamma_k)^{m_k}$ onde $\alpha$ é uma constante. Se $\alpha\neq 0$, então $p(x)$ é um polinômio de grau N+1, o que é um absurdo, pois $p(x)$ tem grau no máximo N. Logo, $\alpha=0$ e, então, $p(x)\equiv 0$ quando $f(x)\equiv 0$. Em particular, $a_0=a_1=\ldots a_N=0$, e daí resulta que o sistema $Ay=0$ tem somente a solução trivial. Portanto, $Ay=b$ tem uma única solução, ou seja o polinômio procurado existe e é único.

*Observação 2-a*

Em particular, se $\tau$ é estritamente crescente, então para $w(x)=(x-\tau_1).(x-\tau_2)\ldots(x-\tau_{N+1})$,

$$(1.2) \qquad P_N(x) = \sum_{j=1}^{N+1} f(\tau_j) \frac{w(x)}{(x-\tau_j)w'(\tau_j)}$$

que é a fórmula de interpolação de Lagrange (ver [1], página 30).

DESENVOLVIMENTO

*Definição 3*

A *k-ésima diferença dividida* de uma função f nos pontos $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$, é definida como sendo o coeficiente líder do polinômio de grau no máximo k, que interpola f em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$.

NOTAÇÃO: $f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]$

*Observação 3-a*

Decorre da definição 3, que se $\tau_i<\tau_{i+1}<\ldots<\tau_{i+k}$, então

$$(1.3) \qquad f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}] = \sum_{j=1}^{i+k} \frac{f(\tau_j)}{w'(\tau_j)}$$

que é o coeficiente líder do polinômio $P_k(x)$ de grau no máximo k, dado por (1.2).

*Proposição 4 (fórmula de Newton)*

Dados $\tau_i,\ldots,\tau_{i+n}$, o polinômio de grau no máximo n que interpola uma dada função f nesses pontos, pode ser representado por

$$(1.4)\qquad P_n(x) = \sum_{j=i}^{i+n} (x-\tau_i)\ldots(x-\tau_{j-1}) f[\tau_i,\ldots,\tau_j]$$

onde, $(x-\tau_j)\ldots(x-\tau_s)=1$ se $j>s$ e $f[\tau_i]= f(\tau_i)$.

*DEMONSTRAÇÃO*

Seja $P_k(x)$ o polinômio de grau no máximo k que interpola f em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$ e $P_{k-1}(x)$ o polinômio de grau no máximo k-1 que interpola f em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k-1}$, $k=1,\ldots,n$. Assim, $P_k(x)-P_{k-1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo k que se anula em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k-1}$, cujo coeficiente líder é dado por $f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]$ e pode ser representado por

$$(1.5)\qquad P_k(x) - P_{k-1}(x)=(x-\tau_i)\ldots(x-\tau_{i+k-1}) f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}].$$

Portanto, desde que

$$P_n(x)=P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] +\ldots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]$$

temos

$$P_n(x)=f[\tau_i]+ (x-\tau_i)f[\tau_i, \tau_{i+1}] + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+1})f[\tau_i, \tau_{i+1},\tau_{i+2}]+$$

$$+ \ldots +(x-\tau_i)\ldots(x-\tau_{i+n-1})f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+n}]$$

e daí, resulta (1.4).

*Exemplo 4-a*

O polinômio de interpolação para uma dada função f nos pontos -1,2,3,5, com $f(-1)=2$ $f(2)=5$, $f(3)=1$, $f(5)=3$ é

$$P_3(x)=2+(x+1)-(x+1)(x-2)\frac{5}{4} +(x+1)(x-2)(x-3)\ \frac{35}{72}\ .$$

De fato:

Por (1.4)

$$P_3(x)=f(-1)+(x+1)f[-1,2]+(x+1)(x-2)f[-1,2,3]+$$

$$+(x+1).(x-2).(x-3)f[-1,2,3,5],$$

por (1.3)

$$f[-1,2] = \frac{f(-1)}{(-1-2)} + \frac{f(2)}{(2+1)} = 1$$

$$f[-1,2,3] = \frac{f(-1)}{(-1-2)(-1-3)} + \frac{f(2)}{(2+1)(2-3)} + \frac{f(3)}{(3+1)(3-2)} = -\frac{5}{4}$$

$$f[-1,2,3,5] = \frac{f(-1)}{(-1-2)(-1-3)(-1-5)} + \frac{f(2)}{(2+1)(2-3)(2+5)} +$$

$$+ \frac{f(3)}{(3+1)(3-2)(3-5)} + \frac{f(5)}{(5+1)(5-2)(5-3)} = \frac{35}{72}\,.$$

Portanto, substituindo esses valores em $P_3(x)$, obtemos o resultado desejado.

*Proposição 5*

$f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]$ é uma função simétrica de seus argumentos $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$, isto é, não depende da ordem em que eles se apresentam.

*DEMONSTRAÇÃO*

Se $(j_i,\ldots,j_{i+k})$ é uma permutação de $(i,\ldots,i+k)$, temos que $\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\} = \{\tau_{j_i},\ldots,\tau_{j_{i+k}}\}$. Assim, pela unicidade do polinômio de interpolação e pela definição 3, temos

(1.6) $$f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}] = f[\tau_{j_i},\ldots,\tau_{j_{i+k}}]$$

*Proposição 6*

Se $\tau_i \neq \tau_{i+k}$, então

(1.7) $$f[\tau_i,\ldots\ldots,\tau_{i+k}] = \frac{f[\tau_{i+1},\ldots\ldots,\tau_{i+k}] - f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k-1}]}{\tau_{i+k} - \tau_i}$$

*DEMONSTRAÇÃO*

Consideremos os polinômios:

$P_{k-1}(x)$ que interpola $f$ em $\tau_{i+1},\ldots,\tau_{i+k}$ ;

$Q_{k-1}(x)$ que interpola $f$ em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k-1}$ ;

$P_k(x)$ que interpola $f$ em $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}$ .

Assim,

$$P_k(x) = Q_{k-1}(x) + (x-\tau_i)\ldots(x-\tau_{i+k-1})f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]$$

e

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + (x-\tau_{i+1})\dots(x-\tau_{i+k}) f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}].$$

Portanto

$$Q_{k-1}(x) - P_{k-1}(x) = (x-\tau_i)\dots(x-\tau_{i+k-1}) \cdot [-(x-\tau_i)+(x-\tau_{i+k})] \cdot f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}]$$

$$= (x-\tau_i)\dots(x-\tau_{i+k-1}) \cdot (\tau_i - \tau_{i+k})\ f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}].$$

Logo, se $f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}] \neq 0$ então $Q_{k-1}(x) - P_{k-1}(x)$ tem grau k-1 e seu coeficiente líder é $f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k-1}] - f[\tau_{i+1},\dots,\tau_{i+k}]$ e daí decorre (1.7) se $f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}] = 0$ então $Q_{k-1}(x) = P_{k-1}(x)$ e seus coeficientes líderes são iguais, isto é, $f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k-1}] - f[\tau_{i+1},\dots,\tau_{i+k}] = 0$ e daí decorre (1.7).

*Corolário 6-a*

Dados $\tau_i,\dots,\tau_{i+k}$, com $\tau_r \neq \tau_s$ para $r,s \in \{i,\dots,i+k\}$ temos

(1.8) $$f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}] = \frac{f[\tau_i,\dots,\tau_{r-1},\tau_{r+1},\dots,\tau_{i+k}] - f[\tau_i,\dots,\tau_{s-1},\tau_{s+1},\dots,\tau_{i+k}]}{\tau_s - \tau_r}$$

DEMONSTRAÇÃO

O corolário decorre da proposição 6 e da propriedade de simetria.

*Proposição 7*

Se f é de classe $C^k$ e $\tau = \tau_i = \tau_{i+1} = \dots = \tau_{i+k}$ então,

(1.9) $$f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!}$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela definição 3, $f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}]$ é o coeficiente líder do polinômio $P_k(x)$ de grau no máximo k que satisfaz $P_k^{(i-1)}(\tau) = f^{(i-1)}(\tau)$ $i = 1,\dots,k+1$.

Por (1.4), $P_k(x) = f(\tau) + (x-\tau) f[\tau_i,\tau_{i+1}] + (x-\tau)^2 f[\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+2}]$

$$+ \dots + (x-\tau)^k f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}].$$

Assim, $P_k^{(k)}(x) = k!\ f[\tau_i,\dots,\tau_{i+k}]$, para todo x. Em particular, $P_k^{(k)}(\tau) = f^{(k)}(\tau)$ e daí decorre (1.9).

*Observação 8*

Decorre das proposições 6 e 7, a técnica de cálculo para a k-ésima diferença dividida de uma função f em $\tau_i,\dots,\tau_{i+k}$, quando dois ou mais de seus argumentos coincidem.

*Exemplo 8-a*

Mostremos que

$$f[1,1,2,3,3,3] = \frac{5}{16} f(1) - f(2) + \frac{11}{16} f(3) + \frac{1}{8} f'(1) - \frac{1}{2} f'(3) + \frac{1}{8} f''(3).$$

De fato:

por (1.9) $f[1,1]=f'(1)$; $f[3,3]=f'(3)$; $f[3,3,3]=\frac{f''(3)}{2}$ e por (1.7)

$$f[1,1,2,3,3,3]=\frac{f[1,1,2,3,3]-f[1,2,3,3,3]}{1-3}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{f[1,1,2,3]-f[1,2,3,3]}{1-3}-\frac{f[1,2,3,3]-f[2,3,3,3]}{1-3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{f[1,1,2]-f[1,2,3]}{1-3}-\frac{f[1,2,3]-f[2,3,3]}{1-3}-\right.$$

$$\left.-\frac{f[1,2,3]-f[2,3,3]}{1-3}+\frac{f[2,3,3]-f[3,3,3]}{2-3}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-f[1,1,2]+f[1,2,3]+f[1,2,3]-f[2,3,3]\right.$$

$$\left.+f[1,2,3]-f[2,3,3]-2f[2,3,3]+2f[3,3,3]\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-f[1,1,2]+3f[1,2,3]-4f[2,3,3]+2f[3,3,3]\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-\frac{f[1,1]-f[1,2]}{1-2}+3\frac{f[1,2]-f[2,3]}{1-3}-\right.$$

$$\left.-4\frac{f[2,3]-f[3,3]}{2-3}+\frac{2f''(3)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(f[1,1]-f[1,2]-\frac{3}{2}f[1,2]+\frac{3}{2}f[2,3]+4f[2,3]-\right.$$

$$\left.-4f[3,3]+f''(3)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(f'(1)-\frac{5}{2}f[1,2]+\frac{11}{2}f[2,3]-4f'(3)+f''(3)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(f'(1)-\frac{5}{2}\frac{f(1)-f(2)}{1-2}+\frac{11}{2}\frac{f(2)-f(3)}{2-3}-4f'(3)+f''(3)\right)$$

$$= \frac{1}{8}(f'(1)+ \frac{5}{2} f(1)- \frac{5}{2}f(2)- \frac{11}{2}f(2) + \frac{11}{2} f(3)-4f'(3)+f''(3))$$

$$= \frac{5}{16} f(1)-f(2) + \frac{11}{16} f(3) + \frac{1}{8} f'(1)- \frac{1}{2} f'(3)+ \frac{1}{8} f''(3).$$

*Proposição 9*

Se $f$ é de classe $C^k$ em $[a,b]$, onde $a=\min\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$ e $b=\max\{\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}\}$ então,

$$(1.10) \qquad f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[t_k(\tau_{i+k}-\tau_{i+k-1})+ +\ldots+ t_1(\tau_{i+1} -\tau_i)+\tau_i]dt_k \ldots dt_1.$$

*DEMONSTRAÇÃO*

Demonstraremos usando indução sobre k.

Para $k=1$,

se $\tau_i \neq \tau_{i+1}$ então

$$\int_0^1 f'[t_1(\tau_{i+1} - \tau_i)+\tau_i]dt_1 = \frac{1}{\tau_{i+1} -\tau_i} \int_0^1 f'[t_1(\tau_{i+1} -\tau_i)+\tau_i](\tau_{i+1}-\tau_i)dt_1$$

$$= \frac{1}{\tau_{i+1} -\tau_i} f[t_1(\tau_{i+1} -\tau_i)+\tau_i]\Big|_{t_1=0}^{t_1=1}$$

$$= \frac{f(\tau_{i+1})-f(\tau_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i}$$

$$=f[\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Se $\tau_i=\tau_{i+1}$ então

$$\int_0^1 f'[t_1(\tau_{i+1} -\tau_i)+\tau_i]dt_1 = \int_0^1 f'(\tau_i)dt_1$$

$$= f'(\tau_i)t_1 \Big|_{t_1=0}^{t_1=1}$$

$$= f'(\tau_i) = f[\tau_i,\tau_{i+1}].$$

Suponhamos provado para k e mostremos que vale para k+1. Para isso consideremos $\tau_i,\ldots,\tau_{i+k+1}$.

1º caso

Existe j tal que $\tau_j \neq \tau_{i+k+1}$. Pela propriedade de simetria, podemos fazer S.P.G., $\tau_{i+k} \neq \tau_{i+k+1}$, assim,

$$\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}}\int_0^{t_k} f^{(k+1)}[t_{k+1}(\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k})+t_k(\tau_{i+k}-\tau_{i+k-1})+\ldots$$

$$\ldots + t_1(\tau_{i+1}-\tau_i)+\tau_i]dt_{k+1}.dt_k \ldots dt_1$$

$$=\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}} \frac{f^{(k)}[t_{k+1}(\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k})+\ldots+t_1(\tau_{i+1}-\tau_i)+\tau_i]}{\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k}}\Bigg|_{t_{k+1}=0}^{t_{k+1}=t_k} dt_k\ldots dt_1$$

$$= \frac{1}{\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k}}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[t_k(\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k-1})+\ldots+$$

$$\ldots + t_1(\tau_{i+1}-\tau_i)+\tau_i]dt_k\ldots dt_1 -$$

$$-\frac{1}{\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k}}\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[t_k(\tau_{i+k}-\tau_{i+k-1})+\ldots+$$

$$\ldots + t_1(\tau_{i+1}-\tau_i)+\tau_i]dt_k\ldots dt_1$$

$$= \frac{f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k-1},\tau_{i+k+1}] - f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k}]}{\tau_{i+k+1}-\tau_{i+k}} = f[\tau_i,\ldots,\tau_{i+k+1}].$$

Observe que as duas últimas igualdades, provém respectivamente da hipótese de indução e de (1.8).

2º caso

Não existe j tal que $\tau_j \neq \tau_{i+k+1}$, logo $\tau_j = \tau$ $\forall$ j, j=i,...,i+k. Assim,

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} f^{(k+1)} [t_{k+1}(\tau_{i+k+1} - \tau_{i+k}) + \ldots + t_1(\tau_{i+1} - \tau_i) + \tau_i] dt_{k+1} \ldots dt_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} f^{(k+1)}(\tau) dt_{k+1} \ldots dt_1 = f^{(k+1)}(\tau) \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} dt_{k+1} \ldots dt_1$$

$$= f^{(k+1)}(\tau) \cdot \frac{1}{(k+1)!} = f[\tau_i, \ldots, \tau_{i+k+1}] .$$

*Exemplo 9-a*

No exemplo 8-a, usando a definição por integral obtemos

$$f[1,1,2,3,3,3] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \int_0^{t_4} f^{(5)}(t_3 + t_2 + 1) dt_5 \ldots dt_1$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria das diferenças divididas é um instrumento que serve de base para o estudo dos polinômios Splines, os quais são muito utilizados na aproximação de funções.

Geralmente os autores definem diferença dividida através do coeficiente líder do polinômio de interpolações ou através de integrais múltiplas, sem a preocupação de mostrar a equivalência das suas definições.

Neste trabalho, demonstramos esta equivalência.

BIBLIOGRAFIA

1. PRENTER, P.M. *Splines and Variational Methods*. Wiley, Interscience Publication, 1975.
2. ISAACSON, E. and KELLER, H.B. *Analysis of Numerical Methods*. New York, John Wiley & Sons, 1966.
3. DE BOOR, C. *A practical guide to Spline*. New York, Springer-Verlag, 1978.
4. GAZZONI, A.T.F. *Uma limitação para a interpolação de funções contínuas por Spline*. Rio de Janeiro, 1979. (Tese de Mestrado-UFRJ).

Recebido em março, 1984; aceito em agosto, 1984.