APLICAÇÃO DA TEORIA DAS FUNÇÕES RECURSIVAS AO SISTEMA LÓGICO ARITMÉTICA ELEMENTAR

Iralino Fidêncio Centenaro e Maria Henriqueta Ferrari Centenaro

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

A noção de sistema axiomático supõe as noções de propriedade efetiva e de regra efetiva. De fato, tem-se que saber se uma seqüência de símbolos é ou não um axioma ou se é ou não a aplicação correta de uma regra. Como a Teoria das Funções Recursivas estuda essas noções de propriedade efetiva e regra efetiva, sua aplicação ao estudo de sistemas axiomáticos possibilita demonstrar resultados profundos.

Neste trabalho, aplica-se a teoria de funções recursivas ao sistema lógico matemático Aritmética Elementar, para mostrar que o conjunto de sentenças falsas constituem uma teoria indecidível e não axiomática.

SUMMARY

CENTENARO, I.F., and CENTENARO, M.H.F., Recursive function theory applied to the logical system elementar arythmetic. *Ciência e Natura*, 6:23-29, 1984.

The notion of axiomatic systems assumes the notions of effective property and effective rule. In fact, what we really want to know is if a given sequence of symbols is an axiom or if it is not a correct application of a rule. Effective property and effective rule are subject to the recursive function theory. Therefore, the application of this theory to axiomatic systems leads to the demonstration of important results.

The present work, deals with the application of recursive function theory to the logical systems elementar arythmetic, in order to demonstrate that a set of false statments constitutes an un decidable theory and is not axiomatic.

INTRODUÇÃO

Pela técnica de Gödel de designar números a símbolos e a séries finitas de símbolos, ver (4) e (7), todos os problemas que dizem respeito a sistemas lógicos matemáticos tornam-se problemas que dizem respeito a conjuntos de inteiros. Em particular, um conjunto de fórmulas constitui um sistema axiomático se o correspondente conjunto de números de Gödel é recursivamente enumerável. O sistema axiomático é decidível se esse conjunto é recursivo, indecidí vel se ele não é recursivo. A existência de sistemas axiomáticos indecidíveis é assim equivalente à existência de conjuntos recursivamente enumeráveis que não são recursivos.

Entende-se por um conjunto *Recursivo*, um conjunto que possui uma função característica recursiva. Isto quer dizer, um conjunto A é recursivo se e somente se existe uma função recursiva f tal que

$$\forall x,\ x \in A \Longrightarrow f(x) = 1 \text{ e } x \in \overline{A} \Longrightarrow f(x) = 0,$$

onde $\overline{A}$ é o conjunto complementar de A.

Intuitivamente, A é recursivo se existe um procedimento efetivo para decidir, dada algum x, se ou não $x \in A$.

Um conjunto A é *Recursivamente Enumerável* se $A = \phi$ ou se existe uma função f recursiva tal que A é igual a imagem de f. Intuitivamente, isto quer dizer que existe um procedimento efetivo para listar os membros do conjunto. Aqui, uma função n-ésima cujo domínio é o conjunto de todas as n-uplas é chamada *Função total*.

Para os propósitos deste trabalho, salienta-se os seguintes resultados, ver (2) e (3), onde A é um conjunto qualquer:

i) se A é recursivo, então A é recursivamente enumerável.

ii) A é recursivo se e somente se A e $\overline{A}$ são ambos recursivamente enumeráveis.

iii) A é recursivamente enumerável se e somente se A é o domínio de uma função recursiva ϕ (Isto é, $(\exists x)$ (A = domínio de ϕx)).

iv) A é recursivamente enumerável se e somente se A é a imagem de uma função parcial recursiva. (Isto é, $(\exists x)$ (A = imagem de ϕx)).

v) O conjunto $K = \{x/\phi_x(x)$ é convergente$\} = \{x/x \in W_x\}$ é recursivamente enumerável mas não recursivo, onde W_x é o domínio de $\phi_x(x)$.

Embora o conjunto K seja recursivamente enumerável, demonstra-se em (2), que $\overline{K}$ não é recursivamente enumerável. Dando-se um sentido construtivo ao fracasso do conjunto $\overline{K}$ em ser recursivamente enumerável Post, define a importante classe dos conjuntos criativos e produtivos, ver (6).

Um conjunto A é *Produtivo* se existe uma função ψ recursiva parcial tal que

$$(\forall X)(W_x \subset A \Longrightarrow (\psi(x) \text{ é convergente, } \psi(x) \in A - W_x)).$$

ψ é chamada uma *função produtiva parcial* para A.

Um conjunto A é *criativo* se

a) A é recursivamente enumerável, e

b) $\overline{A}$ é produtivo.

Salienta-se os seguintes resultados, ver (3) e (5), onde A é um conjunto qualquer.

i) se A é produtivo, então A é não recursivamente enumerável.

ii) se A é criativo, então A é não recursivo.

iii) se A é produtivo, então A tem um subconjunto infinito recursivamente enumerável.

iv) A é produtivo se e somente se existe uma função recursiva total f tal que a é produtivo, com f sendo uma função produtiva parcial.

v) A é *completamente produtivo* se existe uma função recursiva f tal que para todo x, ou
$f(x) \in W_x - A$ ou $f(x) \in A - W_x$.
f é chamada uma função completa para A.

vi) $\overline{K}$ é completamente produtivo com $\lambda x(x)$ como função produtiva completa.
Para $x \in W_x \Longrightarrow x \notin \overline{K}$ e $x \notin W_x \Longrightarrow x \in \overline{K}$,
pela definição de $\overline{K}$.

TERMINOLOGIA

Nesta secção introduz-se alguma terminologia para a aplicação da teoria das funções recursivas ao sistema lógico Aritmética Elementar.

DEFINIÇÃO 1. Chamam-se *Fórmulas Bem Formadas* de um sistema lógico formalizado, que denota-se por fbfs, a uma certa classe de séries finitas de símbolos obtidos de um certo alfabeto básico.

As fbfs são especificadas neste sentido quando existe um procedimento efetivo para decidir que séries finitas são fbfs e que séries finitas não o são. Na investigação de um sistema lógico, as fbfs constitui a classe de objetos básicos de estudo.

EXEMPLO 1. Definição de fbfs na lógica de enunciados

a) O alfabeto α constitui-se de $\neg$, $\Longrightarrow$, (,); $p_0, p_1, p_2, \ldots$.

b) Uma série finita de símbolos do alfabeto α é, por exemplo:

$\neg p_0)(\neg$

Definição de fbf:

1) $p_0, p_1, p_2, \ldots$ são fbfs,
2) Se A é fbf então, $(\neg A)$ é fbf,
3) Se A e B são fbfs então, $(A \Longrightarrow B)$ é também fbf,
4) Cláusula extrema. Só são fbfs aquelas séries finitas de símbolos do alfabeto α cuja condição de ser fbf se pode demonstrar usando 1), 2), e 3).

Assim,

i) $(p_2 \Longrightarrow p_3)$ é fbf, pois p_2 e p_3 são fbfs pela cláusula 1) e $(p_2 \Longrightarrow p_3)$ é fbf por 3)

ii) $(\Longrightarrow p_2, p_3)$ não é fbf pois, para isto tem-se que aplicar 2) ou

3). Mas, a cláusula 2) não se aplica pois, o símbolo $\rightharpoondown$ não aparece e 3) também não pois, isto exigiria que o símbolo $\Longrightarrow$ fosse fbf porém, não é o caso.

Se uma fbf não tem variáveis livres, diz-se que é uma *sentença*. Na interpretação intuitiva, as sentenças correspondem às proposições verdadeiras ou falsas.

Para aplicar os conceitos da teoria das Funções Recursivas pode-se usar um código para as fbfs. Limita-se a discussão a códigos que são aplicações sobre N. Assim,

DEFINIÇÃO 2. O inteiro que está associado com uma fbf sob um código é chamado o *número de Gödel* dessa fbf.

Assume-se como usual que as operações de codificar e descodificar são efetivas.

Seja um sistema lógico dado. Então, um código associa com cada conjunto de fbfs um conjunto de inteiros. Por outro lado, seja um conjunto de fbfs dado. Então, alguma propriedade recursiva invariante que vale para o conjunto de números de Gödel obtidos sob um código, valerá também para o conjunto de números de Gödel obtidos sob algum outro código. Portanto, propriedades recursivas invariantes podem ser diretamente associadas com conjuntos de fbfs. Pode-se falar, por exemplo, de um conjunto recursivo de fbfs, ou de um conjunto produtivo de fbfs.

Em um sistema lógico particular, por exemplo, um conjunto de fbfs pode ser distinguido como "demonstrável" sob certas regras específicas de prova, ou outro conjunto de fbfs pode ser distinguido como "verdadeiro" sob alguma definição de verdade, usualmente não construtiva. Um conjunto de fbfs assim distinguido é muitas vezes chamado uma *Teoria*.

Demonstra-se, em (1), que as fnfs de uma teoria podem ser, muitas vezes, listadas. Este é o caso quando a teoria consiste das fbfs "demonstráveis" sob certas regras formais de prova. Assim,

DEFINIÇÃO 3. Uma teoria, isto é, um conjunto de fnfs, é *Axiomatizável* se ela pode ser efetivamente listada, ou melhor dito, se ela é recursivamente enumerável.

Similarmente,

DEFINIÇÃO 4. Uma teoria é dita ser *decidível* se ela é recursiva.

A existência de conjuntos recursivamente enumeráveis, mas não recursivos, semelhantes a K como definido acima, sugerem a possibilidade que certas teorias axiomatizáveis bem conhecidas não podem ser decidíveis. O teorema de Church, ver (2), mostra que as fbfs demonstráveis da lógica quantificacional formam um conjunto de fbfs indecidíveis.

Vê-se a seguir, que as fbfs demonstráveis da Aritmética

Elementar, sob algumas das várias axiomatizações usuais também formam um conjunto de fbfs indecidível.

O SISTEMA LÓGICO ARITMÉTICA ELEMENTAR.

Considere-se agora, um sistema lógico específico, a Aritmética Elementar.

As sentenças da Aritmética Elementar são as fbfs que podem ser construídas por:

a) símbolos variáveis para inteiros não negativos, +, x, =, 0,1,...
b) quantificadores sentenciais $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$,
c) toda a variável em uma sentença deve ser ligada por algum quantificador.

Por exemplo, $(\forall a)(\neg\, a = 2 \Longrightarrow (\exists b)\ a = b \times b)$, é uma sentença que cria a asserção falsa de que todo inteiro diferente de 2 é um quadrado.

Por um caminho direto e inteiramente de acordo com nossa intuição, é possível definir o conjunto de sentenças verdadeiras da Aritmética Elementar. Essa teoria, o conjunto de sentenças verdadeiras, é chamada *teoria elementar dos números*. Assim, pode-se falar de sentenças verdadeiras e sentenças falsas. Assume-se essa definição de verdade tenha sido dada. Inesperadamente, uma vasta variedade de afirmações combinadas podem ser expressas dentro da Aritmética Elementar.

Em particular, pode-se encontrar uma expressão F com uma só variável não quantificada tal que, quando sibstitui-se o numeral x_0 em lugar da variável não quantificada, a sentença resultante, denotada por F_{x_0}, afirma intuitivamente, que $x_0 \in K$. Mais precisamente, estabelece-se

PROPRIEDADE I $x \in k \Longleftrightarrow (F_x$ é verdadeira), e

$x \notin \Longleftrightarrow (F_x$ é falsa$) \Longleftrightarrow ((\neg F_x)$ é verdadeira)

O seguinte lema é básico nessa discussão.

LEMA BÁSICO (B recursivo $\wedge$ A$\cap$B produtivo) $\Longrightarrow$ A produtivo

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

Seja W_x igual ao domínio de uma função parcial recursiva Ψ. Suponha-se $W_x \subset A$. Distingue-se dois casos.

i) $W_x \cap B = \phi \Longrightarrow W_x \subset A - B$. Pela produtividade de $A \cap B \Longrightarrow$ existe um objeto x tal que $\Psi(x)$ é convergente e $\Psi(x) \in A \cap B - W_x$.

ii) $W_x \cap b \neq \phi$. Dado W_x existe y tal que $W_y = W_x \cap B$. Pela produtividade de $A \cap B$ existe uma função Ψ_y tal que $\Psi(y)$ é convergente e $\Psi(y) \in A - W_x$.

DEMONSTRAÇÃO (formal) Seja B recursivo e A$\cap$B produtivo com respeito a uma função parcial recursiva . Prove-se que existe uma função parcial recursiva ϕ tal que se $W_x \subset A \Longrightarrow \phi(x)$ é convergente e $\phi(x) \in A-W_x$. Aqui W_x é igual ao domínio de uma função parcial recursiva cujo índice é x.

Como B é recursivo, $W_x \cap B$ é recursivamente enumerável e existe uma função recursiva g tal que $W_x \cap B = W_{g(x)}$, pela tese de Church, ver (2). Além disso, $W_{g(x)} \subset A \cap B$. Por conseguinte $\Psi g(x)$ é convergente e $\Psi g(x) \in A \cap B - W_{g(x)}$. Logo, $\Psi g(x) \in A$.

Suponha-se que $\Psi g(x) \in W_x$, como além disso $\Psi g(x) \in B$, então $\Psi g(x) \in W_x \cap B = W_{g(x)}$. Mas isto, contradiz o fato de que $\Psi g(x) \notin W_{g(x)}$. Por conseguinte, $\Psi g(x) \notin W_x$.

Logo definimos $\phi(x) = \Psi g(x)$; é uma função produtiva para A e portanto, A é produtivo.

c.q.d.

LEMA 1. Os conjuntos de sentenças:

a) $\{F_x / x \in N\}$ é recursivo.

b) $\{F_x / x \notin K\} = \{F_x / F_x$ é falso$\} = \{(\neg F_x) / F_x$ é verdadeira$\}$ é produtivo.

DEMONSTRAÇÃO *Para a)*. De fato, dado um inteiro qualquer pode-se decidir se é ou não o número de Gödel da sentença F_y para algum y inteiro. Pela Tese de Church o conjunto

$\{gn(F_x) / x \in N\}$ é recursivo,

onde gn é o número de Gödel de F_x.

Para b) De fato, como para cada $x \in N$ pode-se calcular o número de Gödel de F_x, obtém-se o conjunto.

$A = \{gn(F_x) / F_x$ é falso$\} = \{gn((\neg F_x))/F_x$ é verdadeira$\}$

Seja $W_x \subset A$. Mostra-se que existe uma função recursiva parcial $\Psi(x)$ tal que $\Psi(x) \in A - W_x$.

Pela propriedade 1, existe uma função recursiva parcial ϕ biunívoca, mas não sobre, assim definida $\phi(x)=gn(F_x)$, tal que $\phi(\overline{K})=A$. Pela tese de Church existe uma função recursiva g tal que $\phi^{-1}(W_x) = W_{g(x)} \subset \overline{K}$. Por hipótese, existe a função identidade I, que é produtiva para $\overline{K}$, tal que $Ig(x) \in \overline{K} - W_{g(x)}$. Logo, define-se $\Psi(x)=\phi Ig(x)$, que é função produtiva para A. Portanto, A é produtivo.

c.q.d.

Assumindo o lema 1 pode-se aplicar o lema Básico para obter o seguinte teorema.

TEOREMA (a) As sentenças verdadeiras da Aritmética Elementar formam um conjunto produtivo e portanto, não recursivo.

(b) As sentenças falsas da Aritmética Elementar formam um conjunto produtivo.

DEMONSTRAÇÃO *Para a)* Sejam

A = conjunto de sentenças verdadeiras da Aritmética Elementar.

B = conjunto de sentenças da Aritmética Elementar do tipo $(\neg F_x)$, $x \in N$.

$A \cap B$ = conjunto de sentenças da Aritmética Elementar do tipo $(\neg F_x)$ que são verdadeiras.

Pelo lema 1, B é recursivo e $A \cap B$ é produtivo, então pelo Lema Básico segue que A é produtivo.

Para b) Mesmo raciocínio da demonstração para a), veja (1).

c.q.d.

CONCLUSÃO

O conjunto de sentenças verdadeiras e o conjunto de sentenças falsas da Aritmética Elementar constituem uma teoria indecidível e não axiomática. Isto é, o conjunto de sentenças verdadeiras e o conjunto de sentenças falsas da Aritmética Elementar não são nem axiomatizáveis, e nem decidíveis.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. CENTENARO, I.F. *Teoria das Funções Recursivas e Aplicação à Lógica.* Campinas/SP. 1977. (Tese de Mestrado-UNICAMP).
2. CHURCH, A. An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics, 58*: 345-363, 1963.
3. DAVIS, M. *Computability & Unsolvability.* MacGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
4. GÖDEL, K. Über die länge von Berweiser. *Ergebnisse eines mathematisches Kolloquium*, Helf *4*: 34-38, 1936.
5. MYHILL, J. Creative Sets. *Zeitschrift fur Matematische Logik und Grundlangen der Mathematik, 1*: 97-108, 1955.
6. POST, E.L. Finite combinatory processes-formulation, I. *The Journal of symbolic Logic, 1*: 103-105, 1936.
7. ROGERS, H. Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

Recebido em outubro, 1984; aceito em novembro, 1984.