

## INTERAÇÃO QUADRUPOLAR E SUA CORRELAÇÃO COM O EFEITO MÖSSBAUER

Sylvestre Schneider

Departamento de Física. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM.  
Santa Maria, RS.

## RESUMO

Por meio da expansão em multipolos, chegou-se ao conceito de "momento de multipolo". São dados exemplos de momentos de multipolos. A partir dos mesmos foi definido o "tensor momento de quadrupolo". Partindo da distribuição clássica de cargas  $\rho(\vec{r}')$  e da expansão do potencial em série de Taylor, onde um dos termos da expansão evidencia o momento de quadrupolo, construiu-se a Hamiltoniana clássica em termos de quadrupolo. A expressão quântica  $\hat{H}_Q$  para  $H_Q$  foi obtida, substituindo-se a densidade clássica de carga  $\rho(\vec{r})$  pelo operador  $\rho^{op}$ , que descreve a situação real em uma distribuição não contínua de cargas.

Usando a tecnologia dos coeficientes de Clebsch-Gordan e os tensores irredutíveis calculou-se os elementos de matriz de  $\hat{H}_Q$ . Desenvolvida a relação que permite calcular os elementos de matriz da hamiltoniana quântica, aplicou-se a relação obtida a um caso em que se aplica um campo forte sobre um átomo, obtendo-se uma relação particular para o cálculo dos níveis energéticos da interação quadrupolar.

Fez-se uma aplicação para um átomo ou íon de estado fundamental  $^2S_{1/2}$ , e spin nuclear  $3/2$  num campo magnético forte, obtendo-se a abertura de níveis para a interação quadrupolar.

A interação quadrupolar foi examinada no efeito Mössbauer para diferentes exemplos.

## SUMMARY

SCHNEIDER, S., 1982. Quadrupole interaction and its correlation with the Mössbauer effect. *Ciência e Natura*(4):1-20.

By means multipole expansion, we guess the concept of "multipole moment". They are given examples of multipole moments. We start of them to define the "quadrupole moment tensor". By starting from the classical chargedensity distribution  $\rho(\vec{r}')$  and from the potential expanded in a Taylor series, in which one one of the terms allows us to see the quadrupole moment, we construct a classical Hamiltonian in terms of quadrupole. The quantum-mechanical expression  $\hat{H}_Q$  por  $H_Q$  is given, by substitution of the classical charge density  $\rho(\vec{r})$  by an operator  $\rho^{(op)}$ , which describes adequately the real configuration in a non-continuous charge distribution. By use of the

Clebsch-Gordan technology-coefficients with the irreducible tensors, the matrix-elements of  $\hat{H}_Q$  was calculated. The relation developed, which allows the calculate of the matrix-elements of  $\hat{H}_Q$ , this is used for an application to a specific case, of a strong magnetic field exerted on an atom. It is obtained a particular relation, for calculating the energy levels of quadrupolar interaction. The sequent purpose was to work out an application for an atom or ion in the fundamental state  $^2S_{1/2}$ , and nuclear spin 3/2 in a strong magnetic field. The result was a splitting in energy levels for the quadrupolar interaction.

The quadrupolar interaction was examined in correlation of the Mössbauer-Effect in different examples.

#### INTRODUÇÃO

Ao estudar-se os fenômenos nucleares não se podem considerar somente as interações magnéticas do núcleo com suas vizinhanças. Considerando o efeito sobre a carga nuclear esta determina as orbitas eletrônicas e onde o núcleo está situado na molécula. Deve-se também levar em conta alguns efeitos elétricos sobre a energia necessária para reorientar o núcleo. Que estes efeitos existem pode ser visto ao considerar-se um núcleo não esférico. Suponhamos que ele seja algo alongado e que seja atuado pelas cargas mostradas na Figura 1.

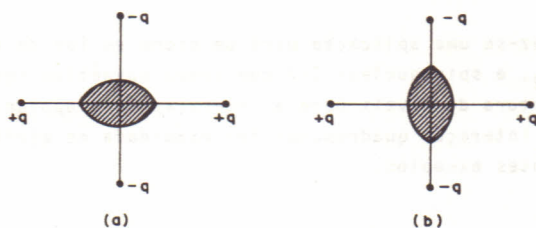


Figura 1. (a) Um núcleo de forma alongada no campo de quatro cargas, +q sobre o eixo x; -q sobre o eixo y. A configuração de (b) é energeticamente mais favorável porque põe as cargas positivas nas extremidades da forma alongada mais próximas das cargas negativas.

A Figura 1(b) corresponde a uma energia mais baixa, porque tem colocado os tipos de carga nuclear positiva mais próximas às cargas externas negativas. Há, portanto uma energia eletrostática que varia com a orientação nuclear. Naturalmente, girando o núcleo de extremidade a extremidade, não afeta a energia eletrostática. Conseqüentemente, para núcleos de spin 1/2 a energia eletrostática

ca não abre a degenerância  $m_l$ .

Aqui desenvolvemos uma teoria mais quantitativa, por meio de uma descrição em termos da densidade de carga clássica, do núcleo,  $\rho$ . Obteremos uma resposta quântica substituindo o  $\rho$  clássico pelo seu operador quântico.

Conseqüentemente, construímos o Hamiltoniano de quadrupolo que calculamos. Os resultados quantitativos serão relacionados ao efeito Mössbauer, por meio de exemplos apresentados.

## DESENVOLVIMENTO

### Expansão em Multipolos

Consideremos uma distribuição de cargas caracterizada por  $\rho(\vec{r}')$ ; por hipótese,  $\rho(\vec{r}') \neq 0$  apenas no interior de uma esfera de raio  $R$ , centrada em uma origem conveniente.

Uma das maneiras possíveis de se escrever o potencial devido a  $\rho(\vec{r}')$  é em termos de harmônicos esféricos, conforme Jackson (2):

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} q_{\ell m} \frac{y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \quad [1]$$

A expressão [1] é chamada EXPANSÃO EM MULTÍPOLOS; para  $\ell=0$ , temos o monopolo; para  $\ell=1$ , temos o dipolo, etc...

Nosso interesse aqui é a determinação das constantes  $q_{\ell m}$ . Para isto, podemos usar outra expressão para o potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad [2]$$

se usarmos agora a expansão de  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  em harmônicos esféricos, a obtenção dos  $q_{\ell m}$  será imediata:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r^{\ell}}{r^{\ell+1}} y_{\ell m}^*(\theta', \phi') y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad [3]$$

Nesta expressão consideraremos  $r < r'$  e  $r > r'$ , levando em

$$\phi(\vec{r}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} y_{\ell m}(\theta, \phi) \int \rho(\vec{r}') r'^{\ell} y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') dv' \quad [4]$$

$$\text{Comparando [4] e [1]: } q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}') r'^{\ell} y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') dv' \quad [5]$$

os que são chamados "MOMENTO DE MULTÍPOLO".

### Exemplos de cálculo de $q_{\ell m}$

Para calcularmos os  $q_{\ell m}$ , necessitamos evidentemente, do

conhecimento dos  $y_{\ell m}$ , alguns dos quais estão listados a seguir:

$$\ell=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \ell=1 \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \ell^{i\phi}; \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$\ell=2 \quad Y_{22} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin^2\theta \ell^{2i\phi}; \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\phi \ell^{i\phi};$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

Teremos então

$$q_{10} = \int \rho(\vec{r}') r' \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \cos\theta \, dv' = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \int z' \rho(\vec{r}') \, dv' = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} p_z$$

Aqui usamos a definição de momento de dipolo elétrico:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') \, dv'$$

$$q_{11} = \int \rho(\vec{r}') r' \left[ -\left( \frac{2}{8\pi} \right)^{1/2} \right] \sin\theta \ell^{i\phi} \, dv' \quad [6]$$

Mas  $r' \sin\theta \ell^{i\phi} = r' \sin\theta \cos\phi + i r' \sin\theta \sin\phi = x' - iy'$

$$q_{11} = -\left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{1/2} \int \rho(\vec{r}') (x' - iy') \, dv' = -\left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{1/2} (p_x - ip_y)$$

$$q_{22} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{15}{2\pi} \right] \int \rho(\vec{r}') r'^2 \sin^2\theta \ell^{2i\phi} \, dv' = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{15}{2\pi} \right]^{1/2} \int \rho(\vec{r}')$$

$$[x' - iy']^2 \, dv'$$

$$\text{Porque } r'^2 \sin^2\theta \ell^{2i\phi} = (r' \sin\theta \ell^{i\phi})^2 = (x' - iy')^2 =$$

$$= x'^2 - 2ix'y' - y'^2$$

É conveniente agora definirmos o tensor momento de quadrupolo:

Teremos:

$$Q_{11} = \int (3x'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') \, dv'; \quad Q_{12} = \int 3x'y' \rho(\vec{r}') \, dv' = Q_{21}$$

$$Q_{22} = \int (3x'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') \, dv'; \quad \text{etc...}$$

Então:

$$q_{22} = \frac{1}{12} \left[ \frac{15}{2\pi} \right]^{1/2} \int (3x'^2 - 6ix'y'^2) \rho(\vec{r}') \, dv' = \frac{1}{12} \left[ \frac{15}{2\pi} \right]^{1/2} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})$$

Analogamente, obteremos:

$$q_{21} = -\frac{1}{3} \frac{15}{8\pi} r^{1/2} (Q_{13} - iQ_{23}) ; q_{20} = \frac{1}{2} \frac{5}{4\pi} r^{1/2} Q_{33}$$

Observação: sendo  $Y_{\ell, -m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi)$ , teremos:

$$q_{\ell, m} = (-1)^m q_{\ell, m}^* \quad \text{desde que a densidade de cargas seja real.}$$

#### HAMILTONIANA CLÁSSICA

Suponhamos que a distribuição de cargas  $\rho(\vec{r}')$  esteja sujeita a um potencial devido a fontes externas. A energia de interação entre este potencial e  $\rho(\vec{r}')$ :

$$W = \int \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dv' \quad [8]$$

$V(\vec{r}')$  pode ser expandido em série de Taylor em torno de uma origem conveniente:

$$V(\vec{r}') = V(0) + \sum_{\alpha} x'_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x'_{\alpha}} \Big|_{r'=0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2 V}{\partial x'_i \partial x'_j} \Big|_{r'=0} + \dots \quad [9]$$

Observando que  $\sum_i x'_i \frac{\partial V}{\partial x'_i} \Big|_{r'=0} = -\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} V \Big|_{r'=0} = -\vec{r}' \cdot \vec{E}' = 0$ , podemos

reescrever os dois últimos termos de [9]:

$$V(\vec{r}') = V(0) - \vec{r}' \cdot \vec{E}' - \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2 E'_i}{\partial x'_j} + \dots \quad [10]$$

Na região livre de cargas,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = 0$ . Em particular para o caso do campo externo, na região de nosso interesse, isto é sempre verdade. Podemos então, subtrair do último termo de [10] a expressão seguinte

$$\frac{1}{6} r'^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}'(0):$$

$$V(\vec{r}') = V(0) - \vec{r}' \cdot \vec{E}'(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \frac{\partial^2 E'_j}{\partial x'_i} (0) + \dots \quad [11]$$

Levando 11 em 8, virá:

$$W = V(0) q - \vec{p} \cdot \vec{E}'(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial^2 E'_j}{\partial x'_i} (0) + \dots \quad [12]$$

Esta forma de escrever a energia tem a vantagem de mostrar as diversas interações: carga e potencial, dipolo-campo, quadrupolo, gradiente do campo, etc.

De [12], podemos tirar imediatamente a Hamiltoniana correspondente ao termo de quadrupolo:

$$H_Q = \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad [13]$$

EXPRESSÃO QUÂNTICA PARA O  $H_Q$

Para obtermos o operador  $\hat{H}_Q$ , devemos substituir a densidade de clássica,  $\rho(\vec{r})$ , pelo operador  $\rho^{(op)}$ , que descreve a situação real em uma distribuição não contínua de cargas. É fácil compreender que tal situação é descrita por:

$$\rho^{(op)} = e \sum_{k=1}^Z \delta(\vec{r}, \vec{r}_k), \text{ para um núcleo atômico, } [14] \text{ onde temos:}$$

$e$  = carga dos prótons;  $k$  = índice para os prótons ( $k=1, 2, \dots, Z$ ).

Levando [14] na definição de  $Q_{ij}$ , virá

$$Q_{ij}^{(op)} = \int 3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2 \sum_{k=1}^Z e \delta(\vec{r}' - \vec{r}_k') dv'$$

$$Q_{ij}^{(op)} = e \sum_k (3x_{ik}' x_{jk}' - \delta_{ij} r'^2) \quad [15]$$

Com [15], podemos escrever:

$$\hat{H}_Q = \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij}^{(op)} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad [16]$$

Nosso próximo passo será o cálculo dos elementos de matriz de  $\hat{H}_Q$ . A representação que usaremos será caracterizada pelos seguintes números quânticos:

1. Momento angular total do núcleo:  $I$
2. As  $(2I+1)$  componentes de  $I$ :  $m$
3. Conjunto de todos os outros números quânticos que não interessa especificar aqui:  $\tau$

Como estamos interessados apenas na reorientação espacial do núcleo para um dado estado de energia, necessitamos apenas elementos diagonais em  $I$  e  $\tau$ . Assim, os elementos procurados serão da forma:

$$\langle \tau \text{ Im} | Q_{ij}^{(op)} | \tau' \text{ Im} \rangle$$

Entretanto, para o cálculo destes elementos, vamos usar os coeficientes de Clebsh-Gordan, o conceito de tensores irredutíveis e o teorema de Wigner-Eckart, sobre os quais falaremos na seção seguinte.

COEFICIENTES DE CLEBSH-GORDAN: CONCEITO

Os coeficientes de Clebsh-Gordan (C.G.) estão intimamente

relacionados com a soma de momentos angulares, em mecânica quântica (3).

Considere um sistema quântico constituído de duas partes: uma caracterizada pelos números quânticos  $L, M$  e por  $\psi_{L,M}$ ; o outro por  $J', M_{J'}$ , e  $\psi_{J', M_{J'}}$ . O sistema todo será caracterizado por  $J, M$  e  $\psi_{JM}$ . Então, a função  $\psi_{JM}$  pode ser expressa como uma combinação linear de produtos de funções das duas partes do sistema (se estes produtos formam um conjunto completo):

$$\psi_{JM} = \sum_{\substack{J', M_{J'}, \\ L, M}} C(J', L, J; M_{J'}, M, M_J) \psi_{J', M_{J'}} \psi_{LM} \quad [17]$$

Os  $C(J', L, J; M_{J'}, M, M_J)$  são os coeficientes de Clebsch-Gordan, sua determinação está indicada nos livros de Teoria de Grupo e na Mecânica Quântica.

*Tensores irredutíveis: conceito e exemplo*

Existem diversas maneiras de conceituar tensor irredutível, entre elas, a que se segue nos parece a mais apropriada para os objetivos do trabalho.

Seja um sistema quântico cujo momento angular  $\hat{J}$  tenha componentes  $\hat{J}_x, \hat{J}_y$  e  $\hat{J}_z$ .

Sabemos que, a partir destes operadores, podemos definir:

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad \text{e} \quad J_- = J_x - iJ_y \quad [18]$$

Podemos também construir funções  $G$  destes operadores dos sistemas e examinar comutadores do tipo  $J_+, G, J_-, G, J_z, G$  etc...

Podemos também construir uma família de  $2l+1$  operadores indicados por  $M(M=L, L-1, \dots, -L)$ . Esta família, denotada por  $T_{LM}$ , será chamada "de operadores tensoriais irredutíveis" se as seguintes relações de comutação forem satisfeitas:

$$J_{\pm}, T_{LM} = L(L+1) - M(M\pm 1)^{1/2} T_{LM\pm} \quad [19]$$

$$J_z, T_{LM} = MT_{LM} \quad [20]$$

Exemplo: De [20]:  $J_z, T_{LM} = J_z, T_{10} = 0$ . Isto nos mostra que podemos construir uma família de tensores  $T_{LM}$  partindo de um  $T_{10}$  que comute com  $J_z$ . Podemos tentar, por exemplo,  $T_{10} = J_z$  que, evidentemente comuta, consigo mesmo.

$$\text{Se (IV.3): } J_+, T_{10} = \sqrt{2} T_{11} = J_+, J_z \quad \therefore T_{11} = -J_+/\sqrt{2}$$

pois  $J_+, J_z = -J_+$

$$\text{e } J_-, T_{10} = \sqrt{2} T_{1+1} = J_-, J_z = J_- \dots T_{1-1} = J_-/\sqrt{2}$$

### Teorema de Wigner-Eckart

Considere um conjunto de funções de onda  $|\tau JM_J\rangle, |\tau' J' M_J\rangle$  etc... Estamos interessados em calcular os elementos de matriz de operadores  $T_{LM}$ , usando tais vetores como base. O teorema de Wigner Eckart (1) estabelece que tais elementos de matriz estão relacionados com os coeficientes de Clebsch-Gordan através de conjunto de quantidades  $\langle \tau J || T_L || \tau' J' \rangle$ , que não dependem de  $M, M_J, M_{J'}$ , ou:

$$\langle \tau J_{M_J} | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = C(J', L, J; M_J, M, M_J) \langle \tau J || T_L || \tau' J' \rangle \quad [21]$$

### Regras de seleção

Sabemos que, em certos casos, é possível deduzir elementos de matriz de operadores utilizando regras de comutação envolvendo estes operadores. Em particular, isto é sempre possível quando os operadores estão relacionados com momento angular. É sabido que quando um operador comuta com  $H$  (operador hamiltoniano), as autofunções são comuns.

Consideremos um conjunto de operadores que comutam:  $J^2, J_z$  e outros operadores com autovalores  $J, M_J$  e  $\tau$ .

Estamos interessados em elementos de matriz do tipo:

$$\langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle$$

De 20 deduzimos que:

$$\langle \tau JM_J | J_z, T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = M \langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle$$

Mas:

$$\langle \tau JM_J | (J_z T_{LM} - T_{LM} J_z) | \tau' J' M_J \rangle = (M_J - M_{J'}) \langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle$$

Então:

$$(M_J - M_{J'}) \langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = M \langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle$$

∴

$$\langle \tau JM_J | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = 0 \text{ a não ser que } M_J - M_{J'} = M \quad [22]$$

$$\text{De 19 } : \langle \tau JM_J | J_{\pm}, T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = L(L+1) - M(M_{\pm})^{1/2} \langle \tau JM_J | T_{LM_{\pm 1}} | \tau' J' M_J \rangle$$

[23]

Antes de trabalharmos esta expressão, observemos que:

$J_- |jm\rangle = K |j, m-1\rangle$ . Tomando o conjunto hermitiano desta expressão, virá  $\langle j, m | J_+ = \langle j, m-1 | K$  ( $K$ : constante, real).



Então:

$$\langle \tau J M_J | J_{\pm}, T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = J(J+1) - M_J(M_J \mp 1)^{1/2} \langle J M_J \mp 1 | \tau' J' M_J \rangle \quad [24]$$

e

$$\langle \tau J M_J | T_{LM} J_{\pm} | \tau' J' M_J \rangle = J'(J'+1) - M_J(M_J \pm 1)^{1/2} \langle \tau' J' M_J \pm 1 | \tau J M_J \rangle \quad [25]$$

Levando [24] e [25] em 23, virã:

$$J(J+1) - M_J(M_J \mp 1)^{1/2} \langle \tau J M_J \mp 1 | T_{LM} | \tau' J' M_J \rangle = J'(J'+1) - M_J(M_J \pm 1)^{1/2} \langle \tau J M_J | T_{LM} | J' M_J \pm 1 \tau' \rangle = L(L+1) - M(M \pm 1)^{1/2} \langle \tau J M_J | T_{LM} \pm 1 | \tau' J' M_J \rangle \quad [26]$$

Os únicos termos desta equação que não desaparecem são os que satisfazem a equação [22].  $M_J - M_J' = M$ . As equações [22] e [26], constituem um conjunto de relações de recorrência entre os  $T_{LM}$  e entre os  $T_{LM}$  e  $T_{LM+1}$ . Elas são suficientes para permitir o cálculo dos elementos de matriz para dados  $J, J', \tau, \tau'$  em termos de um outro elemento qualquer.

Vamos necessitar ainda de deduzir uma outra relação, entre elementos de matriz de  $T_{LM}$ , onde os  $T_{LM}$  são funções de variáveis diferentes.

Para tanto, consideremos o operador  $J_z = L_z + J_z$ , onde

$$J_z |J M\rangle = M |J M\rangle; L_z |LM\rangle = M |LM\rangle; J_z' |J' M_J\rangle = M_J |J' M_J\rangle$$

Então

$$\langle LMJ' M_J | J_z | JM_J \rangle = M_J \langle LMJ' | JM_J \rangle = M_J C(LMJ' M_J, |JM_J)$$

Aqui,  $J_z$  atuou à direita. Escrevendo  $J_z = L_z + J_z'$  e fazendo-o atuar à esquerda:

$$\langle LMJ' M_J | L_z + J_z' | JM_J \rangle = (M + M_J) C(LMJ' M_J; JM_J)$$

e virã

$$(M_J + M_J) C(LMJ' M_J; JM_J) = M C(LMJ' M_J; JM_J)$$

que é uma relação de recorrência para os coeficientes de Clebsch-Gordan idêntica à relação [22] para os  $T_{LM}$ . Pode-se mostrar também que os coeficientes de C.G. obedecem a uma relação idêntica a [26]. Então, podemos afirmar que os elementos de matriz de  $T_{LM}$  e os coeficientes de C.G. estão relacionados. Esta relação é o teorema de Wigner Eckart [5].

No nosso exemplo de tensores irredutíveis, vimos que, para dados  $L$  e  $M$ , podemos construir vários  $T_{LM}$ , pois lá, escolhemos um deles arbitrariamente. Mas, os coeficientes de C.G. são os mesmos para tensores diferentes de mesmo  $L$  e  $M$ . Apenas a constante  $\langle \tau || T_L || \tau' \rangle$  dependerá das variáveis usadas.

Para ilustrar este ponto, consideremos uma partícula de spin  $\vec{S}$ , momento angular orbital  $\vec{L}$  e posição  $\vec{r}$ . O momento angular total é dado por  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

Podemos então, usando [19] e [20] que são regras de comutação, construir os  $T_{LM}$  para  $L=2$ , como função de  $\vec{J}$  ou de  $\vec{r}$ . Em vista da relação  $J_z T_{22} = 2T_{22}$ , devemos escolher para  $T_{22}$  uma função que, ao comutar com  $J_z$ , dá ela mesma em dobre. Sabemos que funções de  $J^2$  podem vir a satisfazer tal relação. Em particular  $J_+^2$  satisfaz. Temos pois,  $T_{22} = J_+^2$

$$\text{De } 19 \quad J_-, J_+^2 = 6 - 2^{1/2} T_{21} = 2T_{21} \quad J_+, J_z = -J_+$$

e

$$J_-, J_+^2 = J_- J_+ J_+ - J_+ J_+ J_- ; \text{ Mas } J_-, J_+ = -2J_z$$

Então

$$\begin{aligned} J_-, J_+^2 &= J_- J_+ J_+ - J_+ J_+ J_- = (-2J_z + J_+ J_-) J_+ - J_+ (J_- J_+ - 2J_z) = \\ &= -2(J_z J_+ - J_+ J_z) \therefore T_{21} = -(J_z J_+ + J_+ J_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De } 19 \quad J_-, T_{21} &= \sqrt{6} T_{20}; \quad J_-, -(J_z J_+ + J_+ J_z) = - \\ -J_- (J_z J_+ + J_+ J_z) + (J_z J_+ + J_+ J_z) J_- &= -J_- J_z J_+ - J_- J_+ J_z + J_z J_+ J_- + J_+ J_z J_-, \\ \text{onde } J_+ J_z &= J_+, J_z = J_z, J_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -J_- J_z J_+ - J_- J_z J_+ - J_+ + J_z J_+ J_- + J_z J_+ - J_+ J_- = \\ &= 2J_z J_+ J_- - 2J_- J_z J_+ + J_- J_+ - J_+ J_- \end{aligned}$$

$$\text{Mas } J_z J_+ J_- = J_z J_- J_+ + 2J_z = J_z J_- J_+ + 2J_z^2 =$$

$$= J_- J_z - J_- J_+ + 2J_z^2 = J_- J_z J_+ - J_- J_+ + 2J_z^2$$

$$\therefore J_-, T_{21} = 2J_- J_z J_+ - 2J_- J_+ + 4J_z^2 - 2J_- J_z J_+ - 2J_z^2 =$$

$$= -2J_z^2 - J_z^2 - J_z^2 + 4J_z^2 - 2J_z^2 = 6J_z^2 - 2J_z^2$$

$$\text{Então } T_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} 2 \cdot 3J_z^2 - J_z^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} 3J_z^2 - J_z^2$$

$$\text{De } 19 \quad J_-, T_{20} = 6^{1/2} T_{2,-1}$$

$$J_-, (2/3)^{1/2} (3J_z^2 - J_z^2) = (2/3)^{1/2} J_- (3J_z^2 - J_z^2) - (3J_z^2 - J_z^2) J_- =$$

$$\begin{aligned}
 &= (2/3)^{1/2} 3J-J_z^2 - J-J^2 - 3J_z^2J- + J^2J- = \sqrt{6} J-J_zJ_z-J_zJ_zJ- = \\
 &= \sqrt{6} (J-J_z + J-)J_z - J_z(J-J_z - J-) = \sqrt{6} J-J_z + J_zJ- \\
 \therefore T_{2-1} &= J-J_z + J_zJ-
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De [19]} \quad J-, T_{2-1} &= 6-(-1)(-1,-1) T_{2-2} = 2T_{2-2} \\
 J-, (J-J_z + J_zJ-) &= J-(J-J_z + J_zJ-)-(J-J_z + J_zJ-) J- = \\
 &= J-(J-J_z)-(J_zJ-)J- = J- J_zJ- + J- - J-J_z - J- J- = 2J_-^2 \\
 \therefore T_{2-2} &= J_-^2
 \end{aligned}$$

Para os cálculos acima, usamos as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
 J_z, J_+ &= J_+ & J-J_+ &= J^2 - J_z(J_z + 1) \\
 J_z, J_- &= -J_- & J+J_- &= J^2 - J_z(J_z - 1) \\
 J_+, J_- &= 2J_z
 \end{aligned}$$

Podemos agora calcular os  $T_{2M}(\vec{r})$  por analogia com os  $T_{2M}(\vec{J})$ . Fazendo a correspondência:

$$\begin{aligned}
 J_x &\longrightarrow x & J_+ = J_x + iJ_y &\longrightarrow x + iy \\
 J_y &\longrightarrow y & J_- = J_x - iJ_y &\longrightarrow x - iy \\
 J_z &\longrightarrow z
 \end{aligned}$$

e verificando relações de comutação como:  $J_{x,y} = iz$ ;  $J_{x,yx} = izx$ ;  
 $J_x, x^2 = 0$ , etc...

podemos escrever:  $T_{22}(\vec{r}) = (x + iy)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{Então de [19]} \\
 J-, T_{22} = 2T_{21}; \quad J-, (x+iy)^2 &= (J_x, iJ_y)(x+iy)^2 - (x+iy)^2(J_x - iJ_y) = \\
 &= J_x, x^2 + 2i J_x, yx - J_n, y^2 - i J_y, x^2 + 2 J_y, yx + i J_y, y^2 = \\
 &= -2zx - 2izy - 2zx - 2izy = -4z(x+iy)
 \end{aligned}$$

Logo  $T_{21} = -2z(x + iy)$

Analogamente, calculamos  $T_{20}$ ,  $T_{2-1}$ ,  $T_{2-2}$  e construímos a Tabela I.

TABELA I. TENSORES IRREDUTÍVEIS.

$T_{ij}$	$T_{2M}(\vec{J})$	$T_{2M}(\vec{r})$
$T_{22}$	$J_z^2$	$(x + iy)^2$
$T_{21}$	$-(J_z J_x + J_x J_z)$	$-2z(x + iy)$
$T_{20}$	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3} (3z^2 - r^2)$
$T_{2-1}$	$J_z J_x - J_x J_z$	$2z(x - iy)$
$T_{2-2}$	$J_x^2$	$(x - iy)^2$

Podemos então resumir a discussão acima, observando que, se uma função de  $J_x, J_y, J_z$  é um  $T_{LM}$ , o mesmo será verdade para uma função de  $x, y, z$ , desde que sejam verificadas relações de comutação entre as componentes do tipo citadas acima. Deve-se tomar cuidado, entretanto com os possíveis problemas de comutação entre as componentes (veja, por exemplo,  $T_{21}$  nas duas representações, na Tabela I).

Finalmente, consideremos a aplicação do teorema de Wigner Eckart para elementos de  $T_{LM}$  em duas representações quaisquer  $p$  e  $q$ :

$$\langle \tau J M_J | T_{LM}(p) | \tau' J' M_J \rangle = C(J' L J; M_J, M_J) \langle \tau J || T_L(\vec{p}) || \tau' J' \rangle$$

$$\langle \tau J M_J | T_{LM}(q) | \tau' J' M_J \rangle = C(J' L J; M_J, M_J) \langle \tau J || T_L(q) || \tau' J' \rangle$$

Comparando as duas expressões, vemos que os coeficientes de C.G. são os mesmos. Assim:

$$\langle \tau J M_J | T_{LM}(q) | \tau' J' M_J \rangle = \langle \tau J M_J | T_{LM}(p) | \tau' J' M_J \rangle \frac{\langle \tau J || T_L(p) || \tau' J' \rangle}{\langle \tau J || T_L(q) || \tau' J' \rangle} \quad [27]$$

#### CÁLCULO DOS ELEMENTOS DE MATRIZ DE $H_Q$

$\bar{H}_Q$  é dado pela expressão 16 :

$$\bar{H}_Q = \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \stackrel{(op)}{\frac{\partial E_j}{\partial x_i}} \quad [28]$$

Temos, então, de calcular os elementos de  $Q_{ij}^{(op)}$  na representação onde os vetores base são do tipo  $|I_m \tau\rangle, |I_m' \tau\rangle$ .

As componentes do momento angular total do núcleo são  $I_x, I_y, I_z$ , onde

$$I_x = \sum_k i_{xk} + i_{xk} + S_{xk} \text{ e analogamente para } I_y, I_z.$$

onde  $l_{xk}$  = componente x do momento angular orbital do próton k  
e  $S_{xk}$  = componente x do momento angular do próton k.

As seguintes relações de comutação podem ser verificadas:

$$l_{xk}, y_k = iz_k ; \quad S_{xk}, y_k = 0 \text{ etc...}$$

e darão origem a relações de comutação do tipo:

$$I_x, y_k = iz_k, \text{ etc...}$$

Observemos ainda que os termos de  $Q_{ij}^{(op)} =$   
 $= e \sum_k (3x_{ik} x_{jk} - \delta_{ij} r_k^2)$  são combinações lineares dos  $T_{2M}(\vec{r})$  (ver Tabela I). Além disso, a expressão 26 se aplica também a funções que são combinações lineares de  $T_{LM}$  de mesmo L.

Assim, considerando as funções

$$F(p) = \sum_M a_M T_{LM}(p)$$

e

$$G(q) = \sum_M a_M T_{LM}(q)$$

teremos

$$\langle \tau J_M | G(q) | \tau' J' M_J' \rangle = \langle \tau J_M | F(p) | \tau' J' M_J' \rangle \frac{\langle \tau J || T_L(q) || \tau' J' \rangle}{\langle \tau J || T_L(p) || \tau' J' \rangle} \quad [29]$$

Fazendo então a correspondência  $x_i \rightarrow I_i$  e  $r \rightarrow I$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle II \tau | e \sum_k (3z_k^2 - r_k^2) | II \tau \rangle &= C \langle \tau II | 3I_z^2 - I^2 | \tau II \rangle = \\ &= C 3I^2 - I(I+1) = CI(2I-1) \quad [30] \end{aligned}$$

onde C é uma constante. C pode ser expressa em termos de um elemento de matriz, para o qual  $m=m'=I$  e  $i=j=z$ :

$$\begin{aligned} \langle \tau II | e \sum_k (3z_k^2 - r_k^2) | \tau II \rangle &= C \langle \tau II | 3I_z^2 - I^2 | \tau II \rangle = C 3I^2 - I(I+1) = \\ &= CI(2I-1) \quad [31] \end{aligned}$$

Podemos agora definir o símbolo  $eQ = \langle \tau II | e \sum_k (3z_k^2 - r_k^2) | \tau II \rangle$

e teremos

$$C = \frac{eQ}{I(2I-1)} \quad [32]$$

Como estamos tratando aqui de elementos de matriz internos

a um conjunto de números quânticos  $\tau$  e  $I$ , podemos usar os resultados [30] e [32] para substituir  $Q_{ij}^{(op)}$  na Hamiltoniana:

$$H_Q = \frac{eQ}{6I(2I-1)} \sum_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \frac{3}{2}(I_i I_j + I_j I_i) - \delta_{ij} I^2 \quad [33]$$

A interação quadrupolar descrita acima aplica-se a uma orientação arbitrária dos eixos coordenados. Entretanto o tensor  $\frac{\partial E_j}{\partial x_i} \equiv V_{ji}$  pode ser simplificado pela escolha de um conjunto de eixos tal que  $V_{ji} = 0$  se  $i \neq j$ . Teremos:

$$H_Q = \frac{eQ}{6I(2I-1)} V_{xx}(3I_x^2 - I^2) + V_{yy}(3I_y^2 - I^2) + V_{zz}(3I_z^2 - I^2) \quad [34]$$

se usarmos a equação de Laplace  $\sum_i V_{ij} = 0$ , esta relação pode ser reescrita:

$$H_Q = \frac{eQ}{4I(2I-1)} V_{zz}(3I_z^2 - I^2) + (V_{xx} - V_{yy})(I_x^2 - I_y^2) \quad [35]$$

De fato, de 34, usando a equação de Laplace, virã:

$$\frac{1}{6} V_{xx}(3I_x^2 - I^2) + V_{yy}(3I_y^2 - I^2) + V_{zz}(3I_z^2 - I^2) = \frac{1}{2}(V_{xx}I_x^2 + V_{yy}I_y^2 + V_{zz}I_z^2) = \frac{1}{4} V_{xx}2I_x^2 + 2V_{yy}I_y^2 + V_{zz}(3I_z^2 - I^2) =$$

$$\text{obs: } 2I_z^2 = (3I_z^2 - I^2) + I_x^2 + I_y^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{4} V_{xx}2I_x^2 + V_{yy}2I_y^2 + V_{zz}(3I_z^2 - I^2) - (V_{xx} + V_{yy})(I_x^2 + I_y^2) &= \\ = \frac{1}{4} V_{zz}(3I_z^2 - I^2) + V_{xx}I_x^2 + V_{yy}I_y^2 - V_{xx}I_y^2 - V_{yy}I_x^2 &= \\ = \frac{1}{4} V_{zz}(3I_z^2 - I^2) + (V_{xx} - V_{yy})(I_x^2 - I_y^2) & \end{aligned}$$

Assim, vemos de [35] que apenas 2 parâmetros são necessários para caracterizar as derivadas do potencial:  $V_{zz}$  e  $(V_{xx} - V_{yy})$ . É conveniente definir agora 2 parâmetros:

parâmetros de assimetria

$$n = \frac{V_{xx} - V_{yy}}{V_{zz}} \quad [36]$$

gradiente de campo  $eq = V_{zz}$

$$[37]$$

Se a simetria for axial, teremos  $n=0$  pois então  $V_{xx} = V_{yy}$ .

## CAMPO FORTE: EXEMPLO

Suponhamos que um campo magnético seja aplicado sobre um átomo, e que tal campo tenha simetria axial (ou outra simetria tal que  $V_{xx} = V_{yy}$ ). Suponhamos ainda que o campo seja aplicado segundo uma direção  $Z'$ , e que o núcleo seja orientado segundo  $Z$ .

A Hamiltoniana para a interação do momento magnético do núcleo com o campo aplicado  $H_0$ , e interação quadrupolar é:

$$H = \gamma \hbar H_0 I_{z'} + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3I_z^2 - I^2) \quad [38]$$

onde  $\gamma \hbar$  é o raio giromagnético do núcleo.

Trataremos aqui do caso em que a interação magnética é forte em relação à interação quadrupolar. Faremos aqui o tratamento da interação quadrupolar como perturbação. Vamos escolher  $x$  e  $x'$  no mesmo plano de  $z$  e  $z'$ ; então, podemos ver da Figura 2 que

$$I_z = I_{z'} \cos \theta + I_{x'} \sin \theta \quad [39]$$

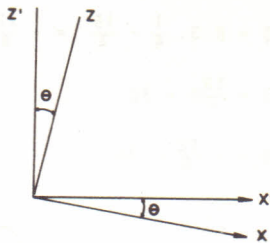


Figura 2. Campo aplicado segundo uma direção  $z'$ , com núcleo orientado segundo  $z$ .

Levando 38 em 39, teremos

$$H = -\gamma \hbar H_0 I_{z'} + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} [3I_z^2 \cos^2 \theta + 3I_{x'}^2 \sin^2 \theta + (I_{z'} I_{x'} + I_{z'} I_{x'}) 3 \sin \theta \cos \theta - I^2] \quad [40]$$

Em primeira ordem,  $I_{z'}$ , é diagonal;  $I_{x'}$ , tem elementos diagonais nulos: então termos do tipo  $I_{z'}$ ,  $I_{x'}$ , em primeira ordem, não contribuem. Mas,  $I_{x'}^2$ , tem elementos da diagonal não nulos. Além disso, expressando  $I_{x'} = \frac{1}{2}(I_+ + I_-)$  e  $I_y = \frac{1}{2i}(I_+ - I_-)$  pode-se mostrar que os elementos da diagonal de  $I_{x'}^2$ , e  $I_y^2$ , são iguais:

$$\langle m | I_{x'}^2 | m \rangle = \langle m | I_y^2 | m \rangle = \frac{1}{2} \langle m | I_+ I_- I_+ I_- | m \rangle = \frac{1}{2} I(I+1) - m^2 \quad [41]$$

Então

$$\langle m | H | m \rangle = E_m = -\gamma \hbar H_0 m + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} \left( \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) [3m^2 - I(I+1)] \quad [42]$$

Aplicação para um átomo ou íon de estado fundamental  $^2S_{1/2}$  e spin nuclear  $3/2$  num campo magnético forte

Neste caso já conhecemos o cálculo de abertura de níveis, incluindo o termo  $-\gamma n h \omega$  dado em [42] (3).

Resta então apenas calcular o desvio nos níveis, causado pela interação quadrupolar:

$$E_{mQ} = \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} \left( \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) 3m^2 - I(I+1) \quad [43]$$

Para simplificar, façamos  $\beta = \frac{e^2 q Q}{12} \left( \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$

$$\therefore E_{mQ} = \beta 3m^2 - I(I+1) = \beta 3m^2 - \frac{15}{4}$$

Para  $m=3/2$   $E_{mQ} = \beta 3 \cdot \frac{9}{4} - \frac{15}{4} = \frac{12}{4} \beta = 3\beta$

Para  $m=1/2$   $E_{mQ} = \beta 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4} \beta = -3\beta$

Para  $m=-3/2$   $E_{mQ} = \frac{12}{4} \beta = 3\beta$

Para  $m=-1/2$   $E_{mQ} = -\frac{12}{4} \beta = -3\beta$

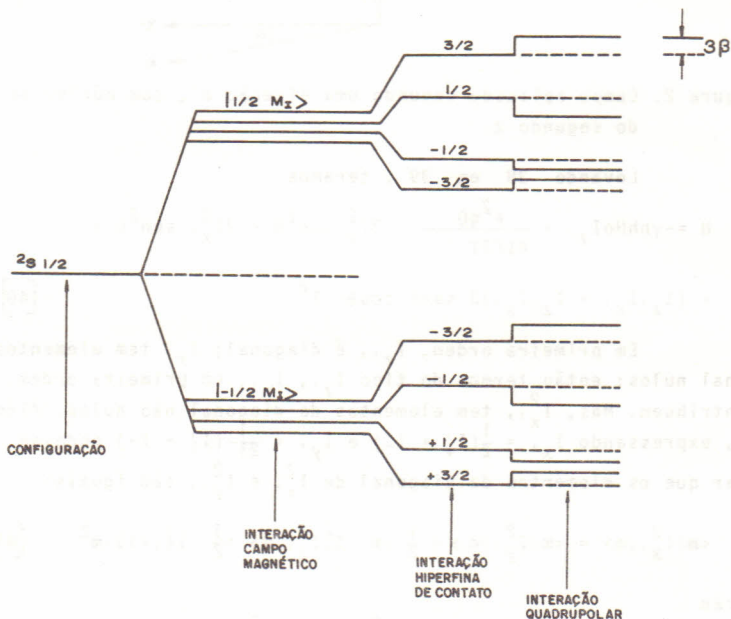


Figura 3. Efeito da ação quadrupolar sobre a estrutura fina de contato.



$$H = -\gamma_{nh} H_{om_2} + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3m_2^2 - I^2)$$

A interação campo magnético é muito maior que a interação de quadrupolo, que será então estudada como perturbação da anterior, em primeira ordem.

Os níveis se abrirão devido à interação campo magnético da por  $-\gamma_{nh} H_{om_I}$ , e as funções serão, para os spins nucleares do ferro  $I=3/2$  e  $I=1/2$ , dadas por:

$$I = 3/2 \quad |1/2, +1/2\rangle \quad I = 3/2 \quad |3/2, 3/2\rangle \quad |3/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \quad |3/2, -1/2\rangle \quad |3/2, -3/2\rangle$$

As energias dos níveis serão dadas por  $-\gamma_{nh} H_{om_I}$  e a interação de quadrupolo apenas deslocará os níveis.

$$\text{Teremos: } I = 3/2 : \quad m_I = 3/2 \longrightarrow -3/2 \gamma_{nh} H_o \\ m_I = 1/2 \longrightarrow -1/2 \gamma_{nh} H_o \\ m_I = -1/2 \longrightarrow +\frac{1}{2} \gamma_{nh} H_o \\ m_I = -3/2 \longrightarrow \frac{3}{2} \gamma_{nh} H_o$$

$$I = 1/2 \quad m_I = 1/2 \implies -\frac{1}{2} \gamma_{nh} H_o \\ m_I = -1/2 \implies \frac{1}{2} \gamma_{nh} H_o$$

e os deslocamentos quadrupolares,  $\frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1))$

$$I = 3/2, \quad m_I = 3/2 \implies 3/8 e^2 q Q$$

$$m_I = 1/2 \implies 1/8 e^2 q Q$$

$$m_I = -1/2 \implies 1/8 e^2 q Q$$

$$m_I = -3/2 \implies 3/8 e^2 q Q$$

A Figura 6(a) mostra o esquema de níveis obtido experimentalmente. Observe que os deslocamentos quadrupolares têm sinal contrário aos calculados aqui. Isto permite concluir que  $e^2 q Q$  tem sinal negativo. A Figura 6(b) mostra o espectro Mössbauer correspondente, já levando-se em consideração a interação quadrupolar. As linhas pontilhadas indicam a posição dos picos na ausência da interação quadrupolar. Os desvios são calculados aqui, analogicamente ao exemplo citado.

Conhecidas as energias de cada  $m_I$  da interação hiperfina, poderemos obter, através do valor de  $\Delta E$  medido no espectro, o valor do produto  $qQ$ , onde

*Interação quadrupolar no Efeito Mössbauer\*: Exemplo*

Examinaremos primeiro o caso do Biferrocenil, onde não há campo magnético interno.

Temos o estado fundamental  $I=1/2$  e o estado excitado  $I=3/2$ . O esquema de níveis será (Figura 4).

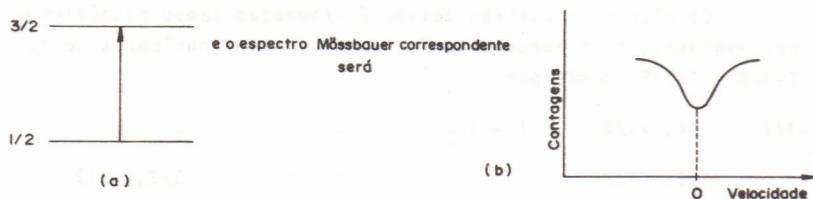


Figura 4. Esquema de níveis para  $I=1/2$  e  $I=3/2$ .

Consideremos agora a interação quadrupolar (Figura 5).

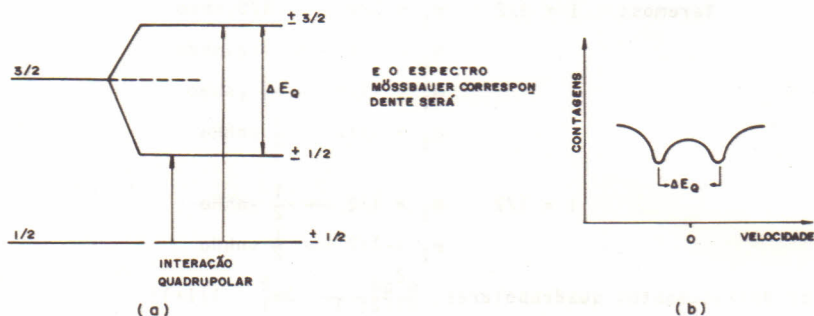


Figura 5. Esquema de níveis com (a) interação quadrupolar; (b) Efeito Mössbauer correspondente.

Os autovalores da Hamiltoniana serão:

$$EQ(M_I) = e^2 q Q \frac{3M_I^2 - I(I+1)}{4I(2I-1)}$$

$$e \Delta E_Q = E_Q(3/2) - E_Q(1/2) = \frac{e^2 q Q}{2}$$

Observamos, então que a abertura do pico na Figura 4 nos dois picos da Figura 5 dá uma medida da interação quadrupolar.

Podemos examinar agora o caso do  $Fe_2O_3$ , onde teremos uma interação magnética hiperfina (Efeito Zeemann).

A Hamiltoniana do problema é dada por 38, na aproximação campo forte.

\* Não levaremos em consideração nos espectros e diagramas o "desvio isomérico", quase sempre presente nos espectros Mössbauer.

$q = \frac{1}{e} V_{zz} = \frac{1}{e} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ . Assim, se desejamos calcular o momento de

quadrupolo do núcleo é necessário conhecer o valor do gradiente de campo, e vice-versa. Entretanto, o que interessa ao Efeito Mössbauer é o valor de  $e(=\Delta E_Q)$  que dará informações qualitativas sobre a vizinhança eletrônica do núcleo e o tipo de rede do sólido.

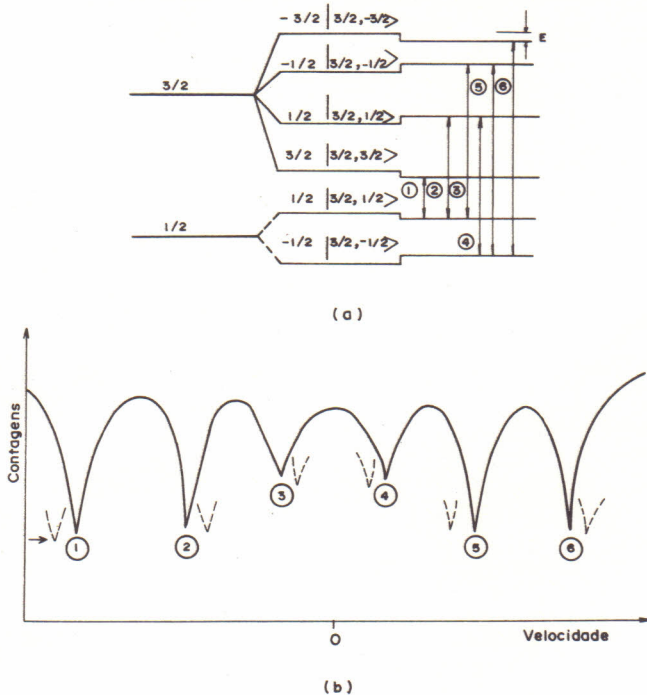


Figura 6. (a) Esquema de níveis obtidos experimentalmente, com os deslocamentos quadrupolares correspondentes.

(b) Espectro Mössbauer correspondente ao Esquema (a) leva da em conta a interação quadrupolar.

#### CONCLUSÃO

Do exposto vemos que os níveis por interações quadrupolares podem ser detectados experimentalmente pela espectroscopia Mössbauer, o qual mostra as diferenças  $\Delta E_Q$ , de energia entre os níveis  $m_I$  nucleares, deslocados pela interação quadrupolar.

A técnica da espectroscopia Mössbauer determina experimentalmente as diferenças de energia entre estes deslocamentos.

#### BIBLIOGRAFIA

1. MESSIAH, A. *Quantum Mechanics*. Tomo 1 e 2. Dunod Editeurs, Paris. 1945.

2. JACKSON, J.D. *Classical Electrodynamics*. Second Edition. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1975.
3. BAYM, G. *Lectures on Quantum Mechanics*. W.A. Benjamin, Inc., New York. 1969.

Recebido em agosto, 1982; aceito em setembro, 1982.



Figura 2. (a) Diagrama de circuito de um sistema de controle de velocidade de um motor elétrico. (b) Diagrama de um sistema de controle de velocidade de um motor elétrico. O eixo vertical representa a saída e o eixo horizontal representa o tempo.

CONCLUSÃO

De acordo com o que foi visto, a análise de sistemas de controle de velocidade de um motor elétrico pode ser feita através de técnicas de controle de velocidade de um motor elétrico. A análise de sistemas de controle de velocidade de um motor elétrico pode ser feita através de técnicas de controle de velocidade de um motor elétrico. A análise de sistemas de controle de velocidade de um motor elétrico pode ser feita através de técnicas de controle de velocidade de um motor elétrico.