VARIÂNCIA DOS CONTRASTES CLÁSSICOS NOS EXPERIMENTOS COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS EM BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS

Antonio Francisco Iemma

Departamento de Bioestatística. Instituto Básico de Biologia Médica a Agrícola. UNESP. Botucatu, SP.

Humberto de Campos

Departamento de Matemática e Estatística. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". USP. Piracicaba, SP.

RESUMO

Neste estudo analisou-se o comportamento dos contrastes clássicos nos experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balanceados. Considerou-se a existência de correlação constante ρ entre subparcelas de uma mesma parcela e independência entre subparcelas de parcelas distintas. A variância dos contrastes básicos, para esse tipo de experimentos, portou-se ora como nos ensaios em BIB, ora como nos ensaios em parcelas subdivididas delineados em blocos (completos) casualizados.

SUMMARY

IEMMA, A.F., and CAMPOS, H., 1981. Variance of the classical contrasts at the split-plot experiments in balanced incomplete block designs. Ciência e Natura (3):21-27.

In this paper the conduct of the split-plot design with the main treatments disposed in balanced incomplete block,was analised. Moreover, the presence of constant correlaction, ρ, between two sub plots of same plot, and independence among sub plots of the distincts plots, was considered. The variances for the basics contrasts of this experiments sometimes were analogous at the variances in the incomplete block designs and other time analogous at the variances in the split-plot experiments in the randomized block design.

INTRODUÇÃO

Os experimentos com parcelas subdivididas em blocos (completos) casualizados têm sido de grande valia na pesquisa agropecuária, por sua alta eficiência e grande simplicidade. No entanto,existem situações nas quais a formação dos blocos completos torna-se praticamente impossível. Por exemplo, PIMENTEL GOMES (8), cita um experimento com suinos no qual se deseja testar um grande número de tratamentos. Considerando-se que para experimentos desse tipo está consagrado o uso de leitegada como bloco, o experimentador tem diante de si um impasse: ou diminue o número de tratamentos ou não toma leitegada como bloco. Na primeira escolha perderá a oportunidade de comparar os tratamentos eliminados com os demais, na segunda fatalmente perderá em eficiência, dada a menor homogeneidade inerente aos "novos" blocos.

Assim como esta, existem inúmeras outras situações na pesquisa agropecuária, que sugerem o uso dos ensaios com parcelas subdivididas delineados em blocos incompletos.

Considerou-se, neste estudo, que para o uso adequado de tais experimentos seria desejável conhecer-se o comportamento dos contrastes básicos envolvendo tratamentos principais, tratamentos secundários e ambos. Assim, dada a extensão do tema, tomou-se o caso em que os tratamentos principais estivessem dispostos em blocos incompletos balanceados.

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Tomou-se o modelo linear

$$y_{ijs} = m + t_i + b_j + e_{k(ij)} + t'_s + (tt')_{is} + e_{ijs}$$

onde, para $i=1, 2, \ldots, v$; $j=1, 2, \ldots, a$; $s=1, 2, \ldots, u$

y_{ijs} é o valor observado na subparcela que recebeu o s-ésimo tratamento secundário dentro do i-ésimo tratamento principal, no j-ésimo bloco; m é a média geral; t_i é o efeito do i-ésimo tratamento principal; b_j é o efeito do j-ésimo bloco; $e_{k(ij)}$ é o erro atribuido à k-ésima parcela do bloco j, que recebeu o i-ésimo tratamento principal; t'_s é o efeito do s-ésimo tratamento secundário; $(tt')_{is}$ é o efeito da interação entre o i-ésimo tratamento principal e o s-ésimo tratamento secundário; e_{ijs} é o erro atribuido à observação y_{ijs}.

Ademais. considerou-se como em CHAKRABARTI (1), COCHRAN e COX (3), DINIZ (4), IEMMA (5) e LEAL (7), dentre outros, a existência de uma correlação constante entre subparcelas de uma mesma parcela e independência entre subparcelas de parcelas distintas, resultando:

$$\text{Cov}\,(y_{ijs}; y_{i'j's'}) = \begin{cases} \sigma^2; \text{ se } i = i', j = j', s = s' \\ \rho\sigma^2; \text{ se } i = i', j = j', s \neq s' \\ 0 \text{ ; em outros casos} \end{cases}$$

Naturalmente a opção pelo modelo proposto, em lugar dos modelos menos restritivos das análises de perfil, está condicionada aos testes de homogeneidade e de uniformidade das matrizes covariâncias, conforme descrito em COCHRAN (2), IEMMA (5) e LEAL (7), dentre outros.

No modelo linear geral $Y = X\,\Theta + \varepsilon$, partiu-se a matriz X em $X = [X_1 \vdots X_2 \vdots X_3 \vdots X_4 \vdots X_5]$, onde $X_1, \ldots, X_5$ têm (urv) linhas e (1), (v), (a), (u) e (uv) colunas respectivamente e estão associadas aos coeficientes relativos à média geral, tratamentos principais, blocos, tratamentos secundários e interação.

Do desenvolvimento do sistema de equações normais $X'X\hat{\Theta}=X'Y$, obteve-se

$$\begin{bmatrix} n & x & y & z & w \\ x' & R & N & P & S \\ y' & N' & A & K & V \\ z' & P' & K' & U & H \\ w' & S' & V' & H' & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\tau}^* \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_1Y \\ X'_2Y \\ X'_3Y \\ X'_4Y \\ X'_5Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \\ T^* \\ \Delta \end{bmatrix}$$

onde $\hat{m}$, $\hat{\tau}, \hat{\beta}, \hat{\tau}^*$ e $\hat{\delta}$ são vetores dos efeitos estimados da média geral, tratamentos principais ajustados para efeitos de blocos, tratamentos secundários e pares $(tt')_{is}$, respectivamente.

Na determinação das matrizes de dispersão para os parâmetros básicos, tomou-se a definição:

$$D(\hat{p}) = E\,\{[\hat{p} - E(\hat{p})][\hat{p} - E(\hat{p})]'\}$$

Assim, para tratamentos principais, obteve-se:

$$D(\hat{\tau}) = E\,\{M^{-1}(X'_2 - NA^{-1}X'_3)\varepsilon\varepsilon'(X_2 - X_3A^{-1}N')M^{-1}\}$$

Mas, se são verificadas as pressuposições do modelo

$$E|\,\varepsilon\varepsilon'\,| = \underset{(urv)}{\begin{bmatrix} W & \phi & \phi & --- & \phi \\ \phi & W & \phi & --- & \phi \\ \phi & \phi & W & --- & \phi \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ \phi & \phi & \phi & --- & W \end{bmatrix}}_{(urv)}$$

onde

$$W = \underset{(u)}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & --- & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & --- & \rho\sigma^2 \\ --- & --- & --- & --- \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & --- & \sigma^2 \end{bmatrix}}_{(u)}$$

$$\therefore\ D(\hat{\tau}) = \frac{K^2}{\lambda^2u^2v^2}\,[1 + (u-1)\rho]\,\sigma^2(X'_2 - NA^{-1}X'_3)(X_2 - X_3A^{-1}N')$$

$$= \frac{K^2}{\lambda^2u^2v^2}\,[1 + (u-1)\rho]\,\sigma^2(R - NA^{-1}N')$$

e, fazendo-se como de modo usual na teoria dos blocos incompletos $C = R - NA^{-1} N'$, obteve-se

$$D(\hat{\tau}) = M^{-1} CM^{-1}[1 + (u - 1)\rho]\sigma^2$$

Donde

$$d_{ii'} = \begin{cases} \dfrac{K(v - 1)}{\lambda uv^2} [1 + (u - 1)\rho]\sigma^2 , \text{ se } i = i' \\ - \dfrac{K}{\lambda uv^2} [1 + (u - 1)\rho]\sigma^2 , \text{ se } i \neq i' \end{cases}$$

Assim, para variância da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos principais, observou-se

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2K}{\lambda uv} [1 + (u - 1)\rho]\sigma^2$$

que é um resultado coerente com a teoria dos ensaios em blocos incompletos balanceados. Notou-se, por exemplo, que se u=1, então não há o "split plot" e o resultado é exatamente aquele fornecido por PIMENTEL GOMES (8) para $V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'})$ quando o ensaio é efetuado em BIB.

Tomando-se os resultados obtidos por IEMMA (6) obteve-se:

$$\hat{V}(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = \frac{2K}{\lambda uv} \text{ QM Res(a)}$$

De modo análogo, para tratamentos secundários obteve-se:

$$D(\hat{\tau}^*) = E \{[\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)] [\hat{\tau}^* - E(\hat{\tau}^*)]'\}$$

$$= \frac{1}{r^2v^2} X'_4 E[\varepsilon\varepsilon'] X_4$$

$$\therefore \; D(\hat{\tau}^*) = \frac{1}{rv} (u)^W(u)$$

donde

$$d^*_{ii'} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{rv} , & \text{se } i = i' \\ \dfrac{\rho\sigma^2}{rv} , & \text{se } i \neq i' \end{cases}$$

Então $V(\hat{t}'_s - \hat{t}'_{s'}) = \frac{2}{rv}(1 - \rho)\sigma^2$

e, usando-se os resultados obtidos por IEMMA (5), obteve-se:

$$\hat{V}(\hat{t}'_s - \hat{t}'_{s'}) = \frac{2}{rv} \text{ QM Res(b)}$$

que é um resultado idêntico aquêles encontrados na literatura para esse tipo de contraste, quando o ensaio é realizado em parcelas subdivididas, com tratamentos principais dispostos em blocos (completos) casualizados.

No tocante à interação, tomou-se

$$D(\hat{\delta}) = E\{[\hat{\delta} - E(\hat{\delta})][\hat{\delta} - E(\hat{\delta})]'\}$$

cujo desenvolvimento resultou

$$D(\hat{\delta}) = \frac{1}{r^2}\,\Gamma\, E(\varepsilon\varepsilon')\Gamma'$$

onde a matriz Γ tem dimensões (uv) X (uv) e é tal que

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \Gamma_1, & \text{se o tratamento principal } i \text{ ocorre no bloco } j \\ \Gamma_2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com

$$\Gamma_1 = \frac{1}{uv}\begin{bmatrix} (u-1)(v-1) & -(v-1) & --- & -(v-1) \\ -(v-1) & (u-1)(v-1) & --- & -(v-1) \\ --- & --- & --- & --- \\ -(v-1) & -(v-1) & --- & (u-1)(v-1) \end{bmatrix}_{(u)\times(u)}$$

e

$$\Gamma_2 = \frac{1}{uv}\begin{bmatrix} -(u-1) & 1 & --- & 1 \\ 1 & -(u-1) & --- & 1 \\ --- & --- & --- & --- \\ 1 & 1 & --- & -(u-1) \end{bmatrix}_{(u)\times(u)}$$

obtendo-se, desse modo

$$D(\hat{\delta}) = \frac{(1-\rho)\sigma^2}{urv}\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & --- & \Gamma_2 \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & --- & \Gamma_2 \\ --- & --- & --- & --- & --- \\ \Gamma_2 & \Gamma_2 & \Gamma_2 & --- & \Gamma_1 \end{bmatrix}_{(u)\times(uv)}$$

Assim, a variância para a diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos secundários dentro de um mesmo tratamento principal, ficou

$$V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) = 2\,[(u-1)(v-1) + (v-1)]\,\frac{(1-\rho)}{urv}\,\sigma^2$$

$$\therefore\; V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{v}\right)(1-\rho)\sigma^2$$

que é um resultado idêntico àquele apresentado por CHAKRABARTI (1) para esse tipo de contraste, quando o experimento em parcelas subdivididas é delineado em blocos (completos) casualizados.

E, de modo análogo aos anteriores

$$\hat{V}(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{is'}) = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{v}\right) \text{QM Res (b)}$$

Para a variância da diferença entre duas médias de efeitos estimados de tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário, foi obtida:

$$V(\hat{\delta}_{is} - \hat{\delta}_{i's}) = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{u}\right)(1 - \rho)\,\sigma^2$$

$$\therefore\ \hat{V}(\hat{\delta}_{is} - \delta_{i's}) = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{1}{u}\right) \text{QM Res(b)}$$

Neste resultado houve concordância com CHAKRABARTI (1),para ensaios em parcelas subdivididas delineados em blocos (completos) casualizados, no entanto houve discordância com PIMENTEL GOMES (8) que apresenta como solução uma ponderação entre resíduos (a) e (b).

CONCLUSÕES

Do estudo das variâncias das funções lineares estimáveis, através das matrizes de dispersão determinadas neste estudo para os parâmetros básicos, concluiu-se que:

1. A variância obtida para contrastes entre médias de tratamentos principais, mostrou-se análoga àquelas obtidas para contrastes entre médias de tratamentos, nos ensaios em BIB.

2. As variâncias obtidas para contrastes entre médias de tratamentos secundários, entre médias de tratamentos secundários "dentro" de um mesmo tratamento principal e entre médias de tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário, foram coerentes com aquelas encontradas na bibliografia dos ensaios em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos (completos) balanceados, para autores que consideram correlação constante entre sub parcelas de uma mesma parcela.

BIBLIOGRAFIA

1. CHAKRABARTI, M.C. *Mathematics of Design an Analysis of Experiments*. 1ª ed. Asia Publishing House, London, 1962, 120 p.
2. COCHRAN, W.G. *Testing a linear relation among variances*. *Biometrics*, Raleigh, *7* : 17-32, 1951.
3. COCHRAN, W.G. e COX, G.M. *Disenos Experimentales*. 3ª ed., Trillas, México, 1976, 661 p.
4. DINIZ, U.D. *Análise de Experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo*. ESALQ/USP, Piracicaba, 1980, 104 p.(Tese de Doutoramento).
5. IEMMA, A.F. *Análise de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais dispostos em blocos incompletos balan*

ceados. ESALQ/USP, Piracicaba, 1981, 145 p. (Tese de Doutoramento).

6. IEMMA; A.F. *Comparações Múltiplas pelo Critério de Tukey nos ensaios em parcelas subdivididas com delineamentos incompletos. I - BIB*. ANAIS DA X JORNADA CIENTÍFICA DO CAMPUS DE BOTUCATU, 1981.
7. LEAL, M.L.S. *Análise de dados experimentais com medidas repetidas*. U.F.B., Brasília, 1979, 99 p. (Dissertação de Mestrado).
8. PIMENTEL GOMES, F. *Curso de Estatística Experimental*. 6ª ed., Nobel, Piracicaba, 1976, 430 p.
9. RAO, C.R. *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*. 1ª ed., Macmillan Publishing Co, New York, 1952, 390 p.

Recebido em novembro, 1981; aceito em novembro, 1981.