EXISTÊNCIA DE POLINÔMIOS DE MELHOR APROXIMAÇÃO PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS

Alcibiades Gazzoni e Alsimar T. Ferreira Gazzoni

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

O artigo apresenta o problema da aproximação monótona que consiste em encontrar um polinômio de melhor aproximação para uma função real contínua "f" definida em $[a,b]$. Se os inteiros $1 \leq K_1 < \ldots < k_p$ e os sinais $\varepsilon_j = \pm 1$, $j=1,\ldots,p$ são dados, o que se quer é aproximar uma função $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ por polinômios algébricos de grau n que satisfazem às condições $\varepsilon_j . P^{(k_j)}(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, $j=1,\ldots p$. A questão da existência de polinômios de melhor aproximação para uma dada função "f", foi estudada aqui.

SUMMARY

GAZZONI, A. and GAZZONI, A.T.F., 1981. The Existence of Polynomials of Better Approximation For Continuous Functions. Ciência E Natura (3):13-19.

The paper presents the problem of monotonic approximation which consists on finding a better polynomial approximation for a continuous real function "f" defined on $[a,b]$. Let the integers $1 \leq k_1 < \ldots < k_p$ and the signals $\varepsilon_j = \pm 1$, $j=1,\ldots,p$ be given. What is wanted here is to approximate a function $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ by algebraic polynomials of degree n which satisfy the conditions $\varepsilon_j . P^{(k_j)}(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $j=1,\ldots,p$. The existence of polynomials of better approximation for a given function "f" was presented here.

INTRODUÇÃO

Weierstrass (1) provou que cada função $f \in C[a,b]$ é aproximada por polinômios algébricos. Surge naturalmente a questão de estudar o polinômio de melhor aproximação para f.

Denota-se por $C[a,b]$ o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$ da reta com valores em $\mathbb{R}$ munido da norma uniforme, $||f|| = \sup \{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$.

Os casos em que se conhece uma forma para chegar ao polinômio de melhor aproximação para f são raros e de grande interêsse.

Chebyshev (3) propôs polinômios que levam o seu nome.

O problema de encontrar um polinômio P de grau n-1 de melhor aproximação para $f(x)=x^n$ foi resolvido, no intervalo $[-1;1]$, na forma seguinte:

Teorema 1. O polinômio de grau n-1 de melhor aproximação para a função $f(x)=x^n$ em $[-1,1]$ é $P(x)=x^n-2^{-n+1}.C_n(x)$, onde C_n é o polinômio de Chebyshev de grau n.

Para a demonstração desse Teorema *vide* Lorentz (3), Capítulo II, Teorema 11.

O problema da aproximação monótona foi inicialmente estudado para um caso particular. Nos anos de 1970 houve o desenvolvimento de uma teoria para caracterizar os polinômios de melhor aproximação para a classe P dos polinômios monótonos. Um ano mais tarde foi considerado este problema relativo a norma L_1 e foram feitos estudos para provar a existência de um único polinômio de melhor aproximação nessa norma para cada função $f \in C[a,b]$, conforme se pode ver em (6).

Este trabalho pretende provar que existe um polinômio de melhor aproximação para $f \in C[a,b]$ entre os polinômios monótonos.

É possível provar (veja exemplo 4) que um polinômio de grau n de melhor aproximação para uma função monótona em $C[a,b]$ não é necessariamente monótono.

REVISÃO DA LITERATURA

$P_n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, denotará o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n definidos em $[a,b]$. Neste artigo, sempre que escrevermos polinômio de grau n, estaremos nos referindo a um polinômio de grau menor ou igual a n.

Definição 2: Para cada $f \in C[a,b]$ considere-se $\inf\{\|f-P\|;\ P \in P_n[a,b]\} = E$. Se este ínfimo for atingido por algum $P_0 \in P_n[a,b]$, P_0 será chamado polinômio de melhor aproximação para f.

Dada $f \in C[a,b]$, sempre existe um polinômio de grau n de melhor aproximação, conforme se pode ver em Lorentz (3), Capítulo II, Teorema 1.

Dada $f \in C[a,b]$, provar a existência de polinômios $P \in P$ de melhor aproximação para f constitui o objetivo deste trabalho.

Definição 3: Os polinômios $C_0, C_1, C_2, \ldots$ definidos pela fórmula de recorrência $C_n(x)=\cos n t$, onde $n=0,1,2,\ldots$, $x \in [-1,1]$ e $0 \le t \le \pi$, são chamados polinômios de Chebyshev.

Note-se que para cada x, $-1 \le x \le 1$, existe um único t, $0 \le t \le \pi$ tal que $x=\cos t$. Tem-se

$C_0(x)=1$, $C_1(x)=x$, $C_2(x)=2x^2-1 = 2x.C_1(x)-C_0(x), \ldots$ e $C_n(x)=2x.C_{n-1}(x)-C_{n-2}(x)$, $n= 2, 3, \ldots$. Portanto, C_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, é um polinômio algébrico de grau n.

Exemplo 4: Pelo Teorema (1), o polinômio de grau 4k de melhor aproximação para a função crescente $f(x)=x^{4k+1}$, $-1 \le x \le 1$, sendo k um nú mero inteiro e positivo, é $P(x)=x^{4k+1}-2^{-4k}.C_{4k+1}(x)$.

Temos $P'(x) = (4k+1)\, x^{4k}-2^{-4k}.C'_{4k+1}(x)$ e, portanto

$$P'(0) = -\, 2^{-4k} \,.\, C'_{4k+1}(0).$$

Mas, $\quad C_{4k+1}(x) = \cos(4k+1)t,\quad e\ x = \cos t,\ 0 \leq t \leq \pi$

Logo, $\quad C_{4k+1}(x) = \cos\,[(4k+1)\text{arc} \cos x]$ e, então,

$$C'_{4k+1}(x) = \frac{4k+1}{\sqrt{1-x^2}}\,.\ \text{sen}\ [(4k+1)\ \text{arc}\ \cos x]\ ,\ -1 < x < 1.$$

Donde, obtém-se que:

$C'_{4k+1}(0) = 4k+1 > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, e portanto , sendo $P'(0) < 0$, $P(x)$ não é crescente, isto é, o polinômio de melhor aproximação para a função crescente $f(x)=x^{4k+1}$, não é crescente.

Através do exemplo anterior percebe-se que dada uma função $f \in C[a,b]$, é interessante encontrar, caso exista, um polinômio de melhor aproximação para f entre todos os polinômios monótonos. Mais geral é o problema de aproximar uma dada função $f \in C[a,b]$ por polinômios $P \in P_n[a,b]$ que satisfazem $P^{(k)}(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, onde k é um inteiro positivo dado. Ainda mais geral é o problema de aproximação que foi estudado neste trabalho: dados os inteiros $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ e os sinais $\varepsilon_j = \pm 1$, $j=1,2,\ldots, p$, aproximar uma dada função $f \in C[a,b]$, na norma uniforme, por polinômios P de grau n que satisfazem às condições (i) $\varepsilon_j . P^{(k_j)}(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $j=1, \ldots, p$.

Fixado n, indicaremos este problema, bem como a classe dos polinômios que satisfazem (i) por:

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(k_1,\ldots,k_p;\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$. $\mathcal{P}_k$ é a notação no caso particular, onde $p=1$, $k_1=k$, $\varepsilon_1=1$. Em analogia ao caso $k=1$, em que se tem $P'(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, todos estes problemas serão chamados problemas de aproximação monótona.

No desenvolvimento deste trabalho pode-se supor $k_p \leq n$, pois para $k_j > n$, (i) é claramente satisfeita.

O primeiro trabalho sobre aproximação monótona foi realizado por Shisha (5). Os resultados desse autor mostram como se pode aproximar uma função real f que satisfaz:

$f^{(k)}(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, onde k é um inteiro maior do que zero, por polinômios de grau n que também satisfazem:

$p^{(k)}(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, isto é, por polinômios da classe $\mathcal{P}_k$.

DESENVOLVIMENTO

Existência de Soluções para o Problema $\mathcal{P}$

Para cada escolha de inteiros k_j e de sinais ε_j, o conjun to P é não vazio (4). Usando argumentos de compacidade prova-se o resultado abaixo.

Teorema 5: Dada $f \in C[a,b]$, existe um polinômio $P \in P$ de melhor aproximação para f.

Demonstração: Como $P_n[a,b]$ é um espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas em $P_n[a,b]$ são equivalentes. Consideremos então para $P \in P_n[a,b]$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, a norma $||P||_0 = \max\{|\alpha_0|,\dots,|\alpha_n|\}$ (ver (2), página 239).

Seja $x \in [a,b]$ e $i \in \{1,\dots,p\}$. A aplicação

$g: P \in P_n[a,b] \longmapsto \varepsilon_i P^{(k_i)}(x) \in \mathbb{R}$ é contínua.

De fato: Seja $P_1 \in P_n[a,b]$, $P_1(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$ e $\varepsilon > 0$.

Temos $P_1^{(k_i)}(x) = \sum_{i=k_i}^{n} \beta_i \cdot i(i-1)\dots(i-k_i+1)x^{i-k_i}$.

Se $||P-P_1||_0 < \delta$, onde $\delta < \dfrac{\varepsilon}{n.i(i-1)\dots(i-k_1+1)(|x^{i-k_i}|+1)}$ para todo i ,

então:

$$|\varepsilon_i \cdot P^{(k_i)}(x) - \varepsilon_i \cdot P_1^{(k_i)}(x)| = |P^{(k_i)}(x) - P_1^{(k_i)}(x)| =$$

$$\left| \sum_{i=k_i}^{n} (\alpha_i - \beta_i) i(i-1)\dots(i-k_i+1)x^{i-k_i} \right|$$

$$\leq \sum_{i=k_i}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \; |i(i-1)\dots(i-k_i+1)| \; |x^{i-k_i}|$$

$$\leq \sum_{i=k_i}^{n} ||P-P_1||_0 |i(i-1)\dots(i-k_i+1)| |x^{i-k_i}|$$

$$< \sum_{i=k_i}^{n} \frac{\varepsilon \cdot i(i-1)\dots(i-k_i+1)|x^{i-k_i}|}{n.i(i-1)\dots(i-k_i+1)(|x^{i-k_i}|+1)} < \sum_{i=k_i}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon .$$

Seja o intervalo $[0, +\infty[$. Pela continuidade da função g, para cada x fixo, e para cada $i=1,\dots p$, temos que

$$g^{-1}([0,+\infty[) = \{P \in P_n[a,b];\ \varepsilon_i \cdot P^{k_i)}(x) \geq 0\}$$

é um conjunto fechado.

Se $P = \bigcap_{x \in [a,b]} \bigcap_{i=1,\dots,p} \{P \in P_n[a,b]; \varepsilon_i . P^{(k_i)}(x) \geq 0\} =$

$= \{P \in P_n[a,b];\ \varepsilon_i . P^{(k_i)}(x) \geq 0,\ \forall\, x \in [a,b]\ ,\ i=1,\dots,p\}$

então P é fechado em $P_n[a,b]$ por ser a interseção de fechados.

Para $f \in C[a,b]$ fixa, consideremos a aplicação $h: P \in P \longmapsto ||f-P|| \in \mathbb{R}$, que é contínua por ser a composta das funções contínuas:

$$P\in\mathcal{P}\longmapsto(f-P)\in C[a,b] \quad \text{e}$$

$$s\in[a,b]\longmapsto||s||\in\mathbb{R}.$$

Seja $E=\inf_{P\in\mathcal{P}}||f-P||$, $E\geq 0$, e fixemos $P_1\in\mathcal{P}$. Se $P\in\mathcal{P}$ é tal que

$$||P-P_1||>2\,||f-P_1||$$

então temos

$$||f-P||\geq||P-P_1||-||f-P_1||>2||f-P_1||-||f-P_1||=||f-P_1||\geq E.$$

Assim, se P é de melhor aproximação então:

$$||P-P_1||\leq 2\,||f-P_1||$$

e, portanto,

$$||P||\leq 2\,||f-P_1||+||P_1||.$$

Agora, tomando-se

$K=\{P\in\mathcal{P};\ ||P||\leq 2\,||f-P_1||+||P_1||\}$, temos que K é fechado em $P_n[a,b]$.

Com efeito, a imagem inversa de

$$[0,2||f-P_1||+||P_1||]$$

pela aplicação contínua

$$g_1: P\in P_n[a,b]\longmapsto||P||$$

é um conjunto fechado em $P_n[a,b]$ e como $\mathcal{P}$ é fechado em $P_n[a,b]$, K é fechado por ser a interseção dos dois fechados

$$\mathcal{P} \text{ e } g_1^{-1}([0,2||f-P_1||+||P_1||]).$$

Mas, desde que K é limitado em $P_n[a,b]$, então K é compacto (pois $P_n[a,b]$ é de dimensão finita).

Assim, pela continuidade da função h em K e da compacidade de K pode-se concluir que o ínfimo E de h é assumido em K, isto é, existe $P\in K\subset\mathcal{P}$ tal que $||f-P||=E$.

Portanto, dada $f\in C[a,b]$ sempre existe um polinômio $P\in\mathcal{P}$ de melhor aproximação para f.

Tendo em vista aplicações provaremos a seguinte proposição:

Proposição 6: O conjunto β de todos os polinômios $P\in\mathcal{P}$ de melhor aproximação para uma função $f\in C[a,b]$ é compacto e convexo.

Demonstração: Usando a notação do Teorema anterior, se $P\in\beta$ então $P\in K$.

Para $f\in C[a,b]$ fixa, a aplicação $h: P\in K\longmapsto||f-P||\in\mathbb{R}$ é contínua e sendo $E=\inf_{P\in K}||f-P||$, a imagem inversa de $\{E\}$ é um fechado de K. Mas $h^{-1}(\{E\})=\beta$, pois $P\in\beta\Longleftrightarrow\inf_{P\in K}||f-P||=||f-P||=E$.

Logo $\beta \subset K$ é fechado e como K é compacto segue-se a compacidade de β.

Para provarmos que β é convexo, consideremos $P_1, P_2 \in \beta$. Tem-se que $||f-P_1|| = ||f-P_2|| = \inf_{P \in P} ||f-P|| = E$.

Assim, se

$$\alpha_1 \geq 0, \ \alpha_2 \geq 0 \quad e \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

então, é imediato que

$$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) \in P$$

e temos

$$||f-(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)|| = ||(\alpha_1 + \alpha_2)f - \alpha_1 P_1 - \alpha_2 P_2|| \leq \alpha_1 ||f-P_1|| +$$

$$+ \alpha_2 ||f-P_2|| = \alpha_1 \cdot E + \alpha_2 \cdot E = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot E = E,$$

o que implica em

$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) \in \beta$. Logo β é um conjunto convexo.

CONCLUSÕES

Em muitas aplicações da Matemática é necessário fazer a aproximação de funções por outras. Com este trabalho mostrou-se que dada uma função $f \in C[a,b]$ sempre existe um polinômio algébrico $P \in P$ de grau n que é de melhor aproximação monótona para f, relativo a norma uniforme.

Poderia também ser colocado outro tipo de questões sobre estimativas do grau de aproximação de f por polinômios $P \in P$. Para o estudo desse tipo de questões é essencial que a função aproximada tenha as propriedades do polinômio P. Assim, para $P = P(1;1)$, f deve ser monótona crescente. Entretanto, para o estudo da existência, já feito, bem como para o estudo das caracterizações de polinômios $P \in P$ de melhor aproximação para uma dada função $f \in C[a,b]$, dispensa-se a hipótese de f ser monótona, visto que os resultados são independentes desse fato.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. CHENEY, E.W. *Introduction to Approximate Theory*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1966.
2. LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.
3. LORENTZ, G.G. *Approximation of functions*. New York, Rinehart and Winston, 1966.
4. LORENTZ, G.G. and ZELLER, K.L. Monotone approximation by algebraic polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc. 149*: 1-18, 1970.

5. SHISHA, O. Monotone Approximation. *Pacific J. Math. 15:* 667-671, 1965.

6. LORENTZ, R.A. Uniquenes of Best Approximation by Monotone Polynomials. *J. Approximation Theory 4:*401-418, 1971.

Recebido em agosto, 1981; aceito em outubro, 1981.