PROPAGAÇÃO DO CALOR EM UMA BARRA HOMOGÊNEA COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA E DEPENDENDO DE UM PARÂMETRO REAL

Lilian M. Kieling Ries e Vanilde Bisognin

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas.UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Neste trabalho se determinou a temperatura permanente de uma barra homogênea, sujeita à condições iniciais e de fronteira que dependem de um parâmetro real.

O problema a ser resolvido foi o de encontrar a solução analítica da equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ com a condição inicial $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq L$ e as condições de contorno $u(0, t)=0$ e $u(L,t)=$ sen t, $t > 0$.

SUMMARY

RIES, L.M.K. and BISOGNIN, V., 1981. Heat propagation in one homogeneous bar with boundary conditions that depends of a real parameter. Ciência e Natura (3):1-4.

In this work the permanent temperature, in one homogeneous bar with boundary conditions that depends of a real parameters, was determined.

The problem to be resolved was find the analytical solution of the heat equation $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ with the initial condition $u(x,0)=0$, $0 \leq x \leq L$ and the contours conditions $u(t,0)=0$ and $u(L,t)=$sen t, $t>0$.

INTRODUÇÃO

A variação de temperatura em uma barra homogênea é descrita por uma equação diferencial parcial e tem a forma:

(1) $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \quad 0$, onde

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{e} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ e α^2 é uma constante conhecida como difusividade térmica. O parâmetro α^2 depende somente do material de que é feita a barra e é definido por:

$\alpha^2 = K/\rho s$, onde K é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico.

Além disso, consideramos que a distribuição inicial de temperatura na barra seja dada.

Assim:

(2) $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq L$.

Também consideramos que as extremidades da barra mantenham as temperaturas:

(*3*) $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = \text{sen}\ t$, $t > 0$.

O problema fundamental da condução do calor é encontrar a temperatura $u(x,t)$, que satisfaz a equação diferencial (*1*), a condição inicial (*2*) e as condições de fronteira (*3*).

A solução do problema da condução do calor com uma condição inicial e com condições de contorno homogêneas é facilmente encontrada pelo método de separação de variável.

Se as condições de contorno (*3*) são não-homogeêneas, isto é, se

(*4*) $u(t,0) = A$ e $u(L,t) = B$, onde A e B são constantes então reduz-se o problema ao caso em que as condições de fronteira são homogêneas.

Se as condições de fronteira são não-homogêneas e dependem de um parâmetro, o método de separação de variável não é utilizado. Este é um dos objetivos a que nos propomos em (1) para a determinação da solução analítica de (*1*), (*2*) e (*3*).

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Consideremos o problema

$$(5)\quad \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = g(t) \ , \ t > 0 \\ u(L,t) = h(t) \ , \ t > 0 \ , \text{ onde } f,\ g,\ h \in C^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Vamos procurar solução da forma

$$(6)\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L} \quad \text{onde}$$

$$(7)\quad a_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Integrando (*7*) duas vezes por partes, obtemos

$$(8)\quad \frac{L}{2}\ a_n(t) = (-1)^{n+1}\ u(L,t).\frac{L}{n\pi} + \frac{L}{n\pi}\ u(0,t) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\int_0^L u_{xx}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Observando (*5*), ficamos

$$a_n(t) = \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\frac{2\pi n}{L^2}\left(g(t) - (-1)^n\ h(t)\right) - \frac{2}{L}\int_0^L u_{xx}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

Derivando (*7*) em relação a t, obtemos.

$a_n^1(t) = \frac{2\alpha^2}{L}\int_0^L u_{xx}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$ e portanto, a expressão (*8*) fica

$$(9)\quad a_n(t) = \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\frac{2\pi n}{L^2}\left(g(t) - (-1)^n h(t)\right) - \frac{1}{\alpha^2}\,a_n^1(t)\right]$$

A expressão (*9*) é uma equação diferencial ordinária linear, cuja solução é:

$$a_n(t) = A_n.e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t} + \frac{2\alpha^2 n\pi}{L^2}\,e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t}\int_0^t e^{\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}s}\left[g(s)-(-1)^n h(s)\right]ds$$

onde $A_n = a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$

e $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$

Substituindo $f(x)$ e $h(t)$ pelas condições dadas em (*2*) e (*3*) obtemos a solução analítica do problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(x,0) &= 0\ ,\quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) &= 0\ ,\quad t > 0 \\ u(L,t) &= \text{sen}\ t \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_n(t) = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha^2 n\pi}{L^4+\alpha^4 n^4\pi^4}\left[L^2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t} + \alpha^2 n^2\pi^2\,\text{sen}\,t - L^2\cos t\right]$$

pois $A_n = a_n(0) = 0$.

Logo, a solução de (*10*) é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\alpha^2 n\pi}{L^4+\alpha^4 n^4\pi^4}\left[\alpha^2 n^2\pi^2\,\text{sen}\,t - L^2\cos t + L^2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t}\right].$$

$$\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise da dissipação e transferência de calor de suas fontes em maquinaria de alta velocidade é, freqüentemente, um importante problema tecnológico que continua a demandar a atenção dos matemáticos, físicos e engenheiros. Nas últimas décadas diversas técni cas que auxiliam a solução desses problemas têm sido desenvolvidas (2, 3 e 4).

Como foi determinada a solução analítica do problema (*10*) necessitamos, na prática, avaliá-la numericamente. Esta é a importância de se procurar métodos numéricos adequados a fim de se obter a solução numérica desejada.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. BISOGNIN, V. e RIES, L.K. *Determinação da temperatura de uma barra homogênea com condições iniciais e de contorno - Solução Numérica*. Projeto de Pesquisa (inédito). Dep. Matemática, CCNE, UFSM, Santa Maria, 1979.
2. CONTE, S.D. *Elementary Numerical Analysis, an algorithmic approach.* McGraw-Hill, Inc., 1965.
3. DAHLQUIST, G. e BJÖRCK. *Numerical Methods*. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
4. SOUTHWORTH, R.W. e DELEEUW, S.L. *Digital Computation and Numerical Methods*. McGraw-Hill Book Company, 1965.

Recebido em dezembro, 1981; aceito em dezembro, 1981.