RELAÇÕES EXISTENTES ENTRE RESULTADOS SIGNIFICATIVOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA COM FUNDAMENTOS NOS AXIOMAS DO CORPO ORDENADO COMPLETO DOS NÚMEROS REAIS

Evelin Maria Abreu Teixeira

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Este artigo trata das relações existentes entre supremo, ínfimo, seqüência limitada monótona, convergência de seqüência, intervalos encaixantes, teorema de Arquimedes, cobertura por abertos, subcobertura finita, ponto de acumulação, seqüência de Cauchy, que são resultados significativos da Análise Matemática com fundamento nos axiomas do corpo ordenado completo dos números reais.

SUMMARY

TEIXEIRA,E.M.A., 1980. Existing relations among significant results of the mathematical analysis based upon axioms of complete ordered body of real numbers. Ciência e Natura (2): 1-10.

This article treats about the existing relations among supremum, infimum, monotone and bounded sequence, convergent sequence, boxing intervals, Arquimede's theorem, conver by open, finity cover, accumulation points, Cauchy sequence and cut, significant results of the Mathematical Analysis, these results are based upon axioms of complete ordered body of real numbers.

INTRODUÇÃO

A consideração dos números reais como um corpo ordenado completo permite a obtenção de resultados significativos da Análise Matemática, usando apenas argumentação lógica e axiomas do corpo ordenado completo. WHITE (4) refere-se à existência de relações entre tais resultados. No presente trabalho são apresentadas relações entre onze importantes propriedades da Análise Matemática sob a forma de teoremas.

1. CORPO ORDENADO COMPLETO (4)

Existe $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ satisfazendo a:

i) Para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$, $a+b=b+a$.

ii) Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$, $(a+b)+c= a+(b+c)$.

iii) Há um elemento 0 em $\mathbb{R}$ tal que $a+0=a$ para todo a em $\mathbb{R}$.

iv) Para cada a em $\mathbb{R}$ há um elemento $-a$ em $\mathbb{R}$ tal que $-a+a=0$.

v) Para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$, $a\cdot b=b\cdot a$.

vi) Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

vii) Há um elemento 1 em $\mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que para todo a em $\mathbb{R}$ $1\cdot a=a$.

viii) Se $a\varepsilon\mathbb{R}$ e $a \neq 0$, há um elemento a^{-1} em $\mathbb{R}$ tal que $a\cdot a^{-1}=1$.

ix) Para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$, $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$.

x) Para todo $a\varepsilon\mathbb{R}$ há apenas três possibilidades:
$a<0$, $a=0$, $a>0$.

xi) Se a e b estão em $\mathbb{R}$ e $0<a$ e $0<b$, então $0<a+b$, $0<a\cdot b$.

xii) Para quaisquer a e b em $\mathbb{R}$, $a<b$ se, e somente se, $a-b<0$.

xiii) Se $A \subset \mathbb{R}$ é não vazio e majorado, então A tem supremo.

2. IMPORTANTES PROPRIEDADES NO CORPO ORDENADO COMPLETO (4)

As propriedades da Análise Matemática relativas a conjuntos, seqüências e intervalos no corpo ordenado completo dos números reais, que serão relacionadas, são:

1. Todo conjunto, não vazio, limitado superiormente, tem supremo.
2. Todo conjunto, não vazio, limitado inferiormente, tem ínfimo.
3. Toda seqüência limitada, não decrescente, converge.
4. Todo seqüência limitada, não crescente, converge.
5. Para $[a_1, b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$ com $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ existe, e é único, $P\varepsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n]$.
6. Se $x>0$ então, para qualquer y, existe $n\varepsilon\mathbb{N}^*$ tal que $nx>y$
7. Toda cobertura por aberto de um intervalo fechado $[c_1,d_1]$ qualquer tem subcobertura finita.
8. Todo conjunto, infinito e limitado, tem ponto de acumulação.
9. Toda seqüência de CAUCHY converge.
10. O corpo ordenado completo não pode ser coberto por dois abertos, não vazios e disjuntos.
11. Em todo corte (A,B) ou A tem último elemento ou B tem primeiro elemento.

DESENVOLVIMENTO

Teorema 1. (Relaciona as propriedades 1 e 2):
Se no corpo ordenado completo todo conjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo então todo conjunto não vazio, limitado inferiormente, tem ínfimo.

Demonstração:

Se $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ corpo ordenado completo onde todo o conjunto não vazio limitado superiormente tem supremo, $A\neq\phi$ e A limitado inferiormente, então $\exists L\varepsilon\mathbb{R} \mid L\leq a$ para $\forall a\varepsilon A$. Multiplicando por (-1): $L\leq a \Rightarrow -L\geq -a$; para $\forall -a\varepsilon(-A)\exists -L\varepsilon\mathbb{R} \mid -L\geq -a$. Então $(-A)$ é limitado superiormente e, por hi

pótese, tem supremo. Seja $-\ell=\sup(-A) \Rightarrow -\ell \geq -a$ para $\forall -a \in (-A)$
$\forall \varepsilon>0\ \exists -a \in (-\ell-\varepsilon, -\ell]$ ou
$\forall \varepsilon>0\ \exists -a \mid -\ell-\varepsilon<-a \leq -\ell$

Multiplicando por (-1): $\ell \leq a$ para $\forall a \in A$
$\forall \varepsilon>0 \exists a \mid \ell \leq a<\ell+\varepsilon$ ou
$\forall \varepsilon>0 \exists\ \varepsilon [\ell, \ell+\varepsilon)$

Logo $\ell=\inf A$ e A tem ínfimo.

Teorema 2 (Relaciona as propriedades 2 e 1):
Se no corpo ordenado completo todo conjunto não vazio, limitado inferiormente, tem ínfimo então todo conjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo.

Demonstração:

Seja $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ corpo ordenado completo onde todo conjunto não vazio limitado inferiormente tem ínfimo, $A \neq \phi$ e A limitado superiormente, então $\exists L \in \mathbb{R} \mid L \geq a$ para $\forall\ a \in A$. Multiplicando por (-1): $L \geq a \Rightarrow -L \leq -a$; para $\forall -a \in (-A) \exists -L \in \mathbb{R} \mid -L \leq -a$. Então (-A) é limitado inferiormente e, por hipótese, tem ínfimo. Seja $-\ell=\inf(-A) \Rightarrow -\ell \leq -a$ para $\forall -a \in (-A)$
$\forall \varepsilon>0 \exists -a \in [-\ell, -\ell+\varepsilon)$ ou
$\forall \varepsilon>0 \exists -a \mid -\ell \leq -a<\ \ell+\varepsilon$

Multiplicando por (-1): $\ell \geq a$ para $\forall a \in A$
$\forall \varepsilon>0 \exists a \mid \ell-\varepsilon<a \leq \ell$ ou
$\forall \varepsilon>0 \exists a \in (\ell-\varepsilon, \ell]$

Logo $\ell=\sup A$ e A tem supremo.

Teorema 3 (Relaciona as propriedades 3 e 4):
Se no corpo ordenado completo toda seqüência limitada, não decrescente, converge então toda seqüência limitada, não crescente, converge.

Demonstração:

Seja (a_n) uma seqüência, não crescente, limitada no corpo ordenado completo onde toda seqüência limitada, não decrescente, converge. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots > L$. Multiplicando por (-1): $-a_1 \leq -a_2 \leq -a_3 \leq \ldots <-L$. Tem-se então uma seqüência, não decrescente, limitada que, por hipótese, converge. Seja $-\ell=\lim(-a_n)$. Então $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \mid n \geq n_0 \Rightarrow |(-a_n)-(-\ell)| \leq \varepsilon$ ou $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0 \mid n \geq n_0 \Rightarrow |(-1)(a_n-\ell)| \leq \varepsilon$ ou $\forall \varepsilon>0 \exists n_0 \mid n \geq n_0 \Rightarrow |a_n-\ell| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$. Logo (a_n) converge.

Teorema 4 (Relaciona as propriedades 4 e 3):
Se no corpo ordenado completo toda seqüência limitada, não crescente, converge então toda seqüência limitada, não decrescente, converge.

Demonstração:

Seja (a_n) uma seqüência, não decrescente, limitada no corpo ordenado completo onde toda a seqüência limitada, não crescente, converge. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots < L$. Multiplicando por (-1): $-a_1 \ge -a_2 \ge -a_3 \ge \ldots > -L$. Tem-se então uma seqüência, não crescente, limitada que, por hipótese, converge. Seja $-\ell = \lim(-a_n)$. Então $\forall \varepsilon>0 \, \exists n_0 \,|\, n>n_0 \Rightarrow |(-a_n)-(-\ell)| \le \varepsilon$ ou $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0 \,|\, n \ge n_0 \Rightarrow |(-1)(a_n-\ell)| \le \varepsilon$ ou $\forall \varepsilon>0 \, \exists n_0 \,|\, n \ge n_0 \Rightarrow |a_n-\ell| \le \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Logo (a_n) converge.

Teorema 5 (Relaciona as propriedades 5, 6 e 7):

Se no corpo ordenado completo para $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots$, com $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, $\exists ! P \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n]$ e para $\forall x>0$, y qualquer, $\exists n \,|\, n.x>y$ então toda cobertura por aberto de um intervalo fechado $[c_1,d_1]$ qualquer tem subcobertura finita.

Demonstração:

Supondo, por absurdo, que a cobertura $G: \{(a_i, b_i)$ com $i \in I\}$ não tenha nenhuma subcobertura finita. Tome-se o intervalo fechado $[c_1,d_1] = I_1$ e divida-se ao meio. Examine-se os dois intervalos $\left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]$ e $\left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]$: pelo menos um desses dois intervalos não pode ser coberto por uma subcobertura finita. Bisseccione-se $I_2 = [c_2, d_2]$ onde I_2 é um dos intervalos examinados que não tem subcobertura finita. Novamente um dos dois intervalos $\left[c_2, \frac{c_2+d_2}{2}\right]$ e $\left[\frac{c_2+d_2}{2}, d_2\right]$ não tem subcobertura finita. Seja este I_3. Continuando o processo obtém-se uma seqüência de intervalos $I_1, I_2, I_3 \ldots$ tais que cada I_n não pode ser coberto por uma subcobertura finita de G. Pela arquimedianidade $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$, onde $|I_n|$ representa a amplitude do intervalo I_n pois $|I_n| = \frac{d_1 - c_1}{2^{n-1}}$ e, quando n cresce a partir de n=2, $\frac{d_1-c_1}{2^{n-1}} < \frac{d_1-c_1}{n-1} < \varepsilon$. Tem-se então intervalos encaixantes no corpo ordenado completo e, por hipótese, $\exists ! P \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Em particular $P \in I_1$. Como G é cobertura de I_1 $\exists (a_{i0}, b_{i0}) \in G$ que contém P; logo $a_{i0} < P < b_{i0}$ e como $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$ $\exists n_0$ tal que $|In_0| < \min\{P-a_{i0}, b_{i0}-P\}$ conforme indicado no desenho:

O intervalo I_{n0} é um subconjunto de $(a_{i0}, b_{i0}) \in G$ mas isto contradiz a escolha de I_{n0}. Assim a hipótese inicial de que não existe subcobertura finita de G que cubra I_1 é falsa. Logo existe subcobertura finita.

Teorema 6 (Relaciona as propriedades 7 e 8):

Se no corpo ordenado completo toda cobertura por abertos de um inter valo fechado $[c_1,d_1]$ qualquer tem subcobertura finita então todo conjunto, infinito e limitado, tem ponto de acumulação.

Demonstração:

Supondo por absurdo que $A\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ corpo ordenado completo onde toda cobertura por aberto do intervalo fechado $[a_1,b_1]$ tem subcobertura finita, A infinito e limitado, não tenha ponto de acumulação, então $\forall$ $k\varepsilon\mathbb{R}$, $\exists\delta>0$ tal que $(k-\delta,k+\delta)$ contém um número finito de elementos de A. Como A é limitado $\exists c_1\varepsilon\mathbb{R}$ e $\exists d_1\varepsilon\mathbb{R}$ tais que $[c_1,d_1]\supset A$. Escolha-se convenientes k_i $\varepsilon[c_1,d_1]$ e δ_i de modo a construir uma cobertura do intervalo $[c_1,d_1]$ e cada aberto da cobertura contém um número finito de elementos de A. Tal cobertura tem subcobertura finita por hipótese. Seja $\bigcup_{j=1}^{n}(k_j-\delta_j,k_j+\delta_j)$. Tem-se aqui a união de um número finito n de abertos que cobrem $A\subset[c_1,d_1]$ com cada aberto contendo um número finito de elementos de A, isto significa que A tem um número finito de elementos, o que é um absurdo pois A é infinito. Logo A tem ponto de acumulação.

Teorema 7 (Relaciona as propriedades 8, 9 e 6):

Se no corpo ordenado completo todo conjunto infinito e limitado tem ponto de acumulação então toda seqüência de CAUCHY converge e para $\forall x>0$, Y qualquer, $\exists n|n.x>y$.

Demonstração:

Já se sabe que toda seqüência de CAUCHY é limitada e que toda seqüência de CAUCHY cujos termos constituem um conjunto finito, converge. Falta então provar que toda seqüência de CAUCHY no corpo ordenado completo, cujos termos constituem um conjunto infinito, converge. Seja A o conjunto dos termos da seqüência de CAUCHY. A é infinito e, por hipótese, tem ponto de acumulação. Seja P este ponto, logo $\forall$ $\varepsilon>0$ $(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ contém infinitos termos a_n da seqüência. Será mostrado que a seqüência converge para P. Ora, se existem infinitos $a_n\varepsilon(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ para $\forall\varepsilon>0$ então existem finitos $a_n\not\varepsilon(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ pois a seqüência é de CAUCHY. Seja n_0 o índice a partir do qual todos a_n estão dentro do intervalo $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0|a_n\varepsilon(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ para $n\geq n_0+1$, ou seja, $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0|n>n_0$ $\Longrightarrow|a_n-P|<\varepsilon$ de modo que $\lim_{n\to\infty}a_n=P$ e a seqüência de CAUCHY no corpo ordenado completo converge. Resta provar que para $\forall x>0$, y qualquer, com x e y no corpo ordenado completo onde todo conjunto limitado e infinito tem ponto de acumulação, $\exists n|n.x>y$. Supondo, por absurdo, que $\exists x>0$, y qualquer, tal que para $\forall n\Rightarrow n.x<y$. Então $0<n.x<y$ pois $n\varepsilon\mathbb{N}^*$ e assim $0<1.x<2.x<\ldots<n.x<\ldots<y$. O conjunto $\{x,2x,3x,\ldots,n.x,\ldots\}$ é limitado e infinito. Por hipótese possui ponto de acumulação. Seja P este ponto: $\forall\varepsilon>0$ $(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ contém infinitos n.x. Seja $\varepsilon=x$: $P-x<nx<P+x\Longrightarrow(n+1).x>P$ e $(n-1).x<P\Longrightarrow(n-1)x<P<(n+1).x$. Assim observa-se que este intervalo de centro em P e raio $\varepsilon=x$ só contém um elemento, $n.x$, o que é um absurdo pois P é ponto de acumulação. Logo nosso conjunto é ilimitado superiormente: $\exists n | n.x>y$.

Teorema 8 (Relaciona as propriedades 9 e 5):

Se no corpo ordenado completo toda seqüência de CAUCHY converge então para $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$ com $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, $\exists | P\varepsilon \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

Demonstração:

Sejam $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$ intervalos encaixantes. Observa-se que $|a_m-a_n|\leq b_{n_0}-a_{n_0}$ para $m,n\geq n_0$. Assim $|a_m-a_n|\leq b_n-a_n$, para $m,n\geq n'$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ então para $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0' | n'\geq n_0' \Rightarrow b_{n'}-a_{n'}\leq\varepsilon$ ou seja $|a_m-a_n|<\varepsilon$ para $m,n\geq n'\geq n_0'$. Logo (a_n) é de CAUCHY e, como tal, converge. Seja $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Prova-se que $\ell\varepsilon\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, isto é, $a_n\leq\ell\leq b_n$:

1º $a_n\leq\ell$ pois se não o fosse $\exists n_0=i | \ell<a_i$. Mas como a seqüência é crescente $\ell<a_i\leq a_{i+1}\leq\ldots$ e para $\varepsilon=a_i-\ell$ obtém-se o intervalo de centro em ℓ e raio ε contendo não mais que $(i-1)$ termos da seqüência, o que é um absurdo pois $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

2º $\ell\leq b_n$ pois se não o fosse $\exists n_0=i | \ell>b_i$, o que não pode ocorrer já que $a_n<b_i$ para todo n e novamente haveria um intervalo de centro em ℓ e raio $\varepsilon=\ell-b_i$ contendo um número finito de a_n (precisamente nenhum). Logo $\ell\varepsilon\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

E ℓ é único pois se $\exists\ell_1\neq\ell$ tal que $\ell_1\varepsilon\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ então $[\ell,\ell_1]\subset[a_n,b_n]$ e $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)\neq0$. Logo ℓ é único.

Teorema 9 (Relaciona as propriedades 5, 6 e 1):

Se no corpo ordenado completo para $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$, com $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, $\exists! P\varepsilon\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ e para $\forall x>0$, y qualquer, $\exists n | n.x>y$, então todo conjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo.

Demonstração:

Seja $A\neq\phi$, $A\subset\mathbb{R}$ e limitado superiormente. Seja L uma cota superior de A. Como $A\neq\phi$, seja $a\varepsilon A$. Bisseccionando $[a,L]=I_1$ e escolhendo, como I_2, $\left[\frac{a+L}{2}, L\right]$ se contiver elementos de A, ou $\left[a, \frac{a+L}{2}\right]$ em caso contrário, determina-se I_1 e I_2. De maneira análoga constrói-se sucessivamente I_3, $I_4,\ldots$ observando-se que $I_1, I_2, I_3, I_4,\ldots$ Dessa maneira $|I_n|\Rightarrow 0$, pois foi provado no Teorema 5 que intervalos construídos por bisseção tem sua amplitude tendendo a zero. Sendo intervalos encaixantes tem, por hipótese, um ponto único comum. Seja P este ponto. Prova-se agora que $P=\sup A$. 1º $a\leq P$ para $\forall a\varepsilon A$ pois se $\exists a^*\varepsilon A | a^*>P$ então seja I_{n_0} o pri meiro intervalo tal que $a^* \notin I_n$. No intervalo anterior $a^* \varepsilon I_{n_0-1}$ e $a^* \varepsilon [P, b_{n_0-1}]$, o que é um absurdo, pois o I_{n_0} não seria o escolhido.

2º $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ a\ \varepsilon\ A | a\ \varepsilon\ (P-\varepsilon, P]$, ou seja, $p-\varepsilon<a\leq P$, pois para $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 | P-\varepsilon<a_{n_0}\leq P\leq b_{n_0}$. E, por 1º e pela construção de $[a_{n_0}, b_{n_0}]$, $a_{n_0}\leq a\leq P$. Logo $P-\varepsilon<a_{n_0}\leq a\leq P \Rightarrow P-\varepsilon<a\leq P$.

Portanto A tem supremo.

Teorema 10 (Relaciona as propriedades 1 e 3):

Se no corpo ordenado completo todo conjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo, então toda seqüência limitada, não decrescente, converge.

Demonstração:

Seja (a_n) tal que $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n\leq\ldots<L$ uma seqüência no corpo ordenado do completo onde todo conjunto, não vazio, limitado superiormente, tem supremo. O conjunto dos termos de (a_n) é limitado superiormente e portanto tem supremo. Seja $L=\sup\{a_n\}$, então $\exists a_{n_0}\ \varepsilon (L-\delta, L]$ para $\forall\delta>0$. Sendo não decrescente $L-\delta<a_{n_0}\leq a_n\leq L<L+\delta$ para $n\geq n_0$. Logo para $\forall\delta>0$ $\exists n_0 | n\geq n_0 \Rightarrow L-\delta<a_n<L+\delta \Rightarrow \forall\delta>0\ \exists n_0 | n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\delta$ e assim $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$. Portanto toda seqüência limitada não decrescente converge.

Teorema 11 (Relaciona as propriedades 3, 5 e 6):

Se no corpo ordenado completo toda seqüência limitada não decrescente, converge então para $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots$, com $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, $\exists!\ P\varepsilon \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ e para $\forall x>0$, y qualquer, $\exists n | n.x>y$.

Demonstração:

Sendo $a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots<b_1$ observa-se que (a_n) é uma seqüência limitada, não decrescente, e, por hipótese, convergente. Além disso por convergir é de CAUCHY e o Teorema 8 já provou que, em um corpo ordenado completo onde toda seqüência de CAUCHY, $\exists!\ P\varepsilon \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, resta provar a arquimedianidade. Supondo por absurdo que $\exists a>0$ e b qualquer tal que, para $\forall\ n\varepsilon\mathbb{N}^*$, $n.a<b \Rightarrow n<\frac{b}{a} \Rightarrow 1<2<\ldots<n<\ldots<\frac{b}{a}$. Esta é uma seqüência não decrescente limitada que, por hipótese, converge. Seja $\alpha=\lim n$. Então para $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0$ tal que $|n-\alpha|\leq\varepsilon$ para $n\geq n_0$. Seja $\varepsilon=1$; então $\exists n_0$ tal que $\alpha-n<1$ para $n\geq n_0 \Rightarrow \alpha<n+1$ para $n\geq n_0$, o que é um absurdo. Portanto para $\forall a>0$, b qualquer, $\exists$ n tal que $n.a<b$ e o corpo ordenado completo onde toda seqüência limitada, não decrescente, converge é arquimediano.

Teorema 12 (Relaciona as propriedades 1 e 10):

Se no corpo ordenado completo todo conjunto, não vazio, limitado superiormente, tem supremo então o corpo ordenado completo não pode ser coberto por dois abertos não vazios e disjuntos.

Demonstração:

Supondo por absurdo que o corpo ordenado completo possa ser coberto por dois abertos não vazios e disjuntos A_1 e A_2. Seja $a_2 \epsilon A_2$ e $J=\{a \epsilon A_1 | a<a_2\}$. J é infinito pois se não o fosse seria finito e existiriam n elementos de A_1 em J. Tome-se o menor destes elementos: a_j. Ele limita inferiormente A_1 e todo entorno dele não estaria contido em A_1, ou seja, $(a_j-\delta_j, a_j+\delta_j)$ não estaria contido em A_1 para todo δ_j, o que é um absurdo pois A_1 é aberto. Logo J é infinito. Além disso é também limitado superiormente pelo a_2, por hipótese, tem supremo. Mostra-se agora que $\ell=\sup J$ não está em A_1 nem A_2:

1º $\ell \notin A_1$, pois se $\ell \epsilon A_1$, então $\exists \delta>0$ tal que $(\ell-\delta, \ell+\delta) \subset A_1$ e $\exists a | \ell<a<a_2$, pois ℓ não é o último elemento de J. Mas $a>\ell$ é um absurdo. Logo $\ell \notin A_1$.

2º $\ell \notin A_2$, pois se $\ell \epsilon A_2$ então $\ell \leq a_2$ e, como para $\forall \varepsilon>0$ $\exists a \varepsilon(\ell-\varepsilon, \ell]$, seja $\varepsilon=\delta_e$ onde δ_e é tal que $(\ell-\delta_e, \ell+\delta_e) \subset A_2$. Assim $\exists a \varepsilon(\ell-\delta_e, \ell+\delta_e)$ o que é um absurdo. Logo $\ell \notin A_2$.

Como $\ell \notin A_1$ e $\ell \notin A_2$, A_1 e A_2 não cobrem o corpo ordenado completo, provando que dois abertos, não vazios e disjuntos, não podem cobrir $\mathbb{R}$.

Teorema 13 (Relaciona as propriedades 10 e 11):

Se o corpo ordenado completo não pode ser coberto por dois abertos, disjuntos e não vazios, então em todo corte (A,B) ou A tem último ou B tem primeiro.

Demonstração:

Supondo, por absurdo, que exista um corte (A,B) onde nem A tem último elemento nem B tem primeiro elemento. Como (A,B) é corte, A e B são não vazios, $A \cup B=\mathbb{R}$ e $a<b$ para $\forall$ $a \epsilon A$ e $\forall$ $b \epsilon B$. A é aberto pois A não tem último: $\forall a^* \epsilon A$ $\exists a^{**} | a^*<a^{**} \Rightarrow \forall a^* \epsilon A \exists \delta=a^{**}-a^*$ tal que $(a^*-\delta, a^*+\delta)=(2a^*-a^{**}, a^{**}) \subset A$, de modo que A é aberto. E B não tem primeiro: $\forall$ $b^* \epsilon B$ $\exists$ $b^{**} | b^{**}<b^* \Rightarrow \forall$ $b^* \epsilon B$ $\exists \delta=b^*-b^{**}$ tal que $(b^*-\delta, b^*+\delta)=(b^{**}, 2b^*-b^{**}) \subset B$. Logo B também é aberto.

E assim os abertos A e B não vazios e disjuntos, cobrem o corpo ordenado completo, o que é um absurdo por hipótese. Logo ou A tem último ou B tem primeiro.

Teorema 14 (Relaciona as propriedades 11 e 1):

Se no corpo ordenado completo todo corte (A,B) ou A tem último elemento ou B tem primeiro então todo conjunto, não vazio, limitado superiormente, tem supremo.

Demonstração:

Supondo, por absurdo, que existe um conjunto limitado superiormente, não vazio, no corpo ordenado completo, que não tenha supremo. Seja X tal conjunto. Então para $\forall$ $\ell \epsilon \mathbb{R}$ $\exists$ $\varepsilon>0 | \nexists x \varepsilon(\ell-\varepsilon, \ell]$, ou seja, $\ell-\varepsilon< x \leq \ell$ não é satisfeita por nenhum $x \epsilon X$. Constrói-se um corte (A,B) em $\mathbb{R}$ re lacionado com X. Seja $B=\{b \mid b>x,\ \forall\ x \in X\}$. Observa-se que $B \neq \phi$ porque $X \neq \phi$ e é limitado superiormente.

Seja $A=CB$ (A,B) é corte pois:

1º A e B são não vazios, pois $A \supset X$, já que $x \in X \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in CB \Rightarrow x \in A$.

2º $a<b$ para $\forall\ a \in A$ e $\forall\ b \in B$ pois $a \neq b$, já que $CB \cap B = \phi$, e $a>b \Rightarrow a>x \Rightarrow a \in B$ o que é um absurdo.

3º $A \cup B = CB \cup B = \mathbb{R}$.

Provando que nem A tem último elemento nem B tem primeiro elemento contraria-se a hipótese:

1º A não tem último, pois se a^* fosse o último elemento de A:

a) $a^* \in X \Rightarrow \exists\ x=a^* \mid a^* \in (a^*-\varepsilon, a^*]$ para $\forall \varepsilon>0$ e a^* seria sup X.

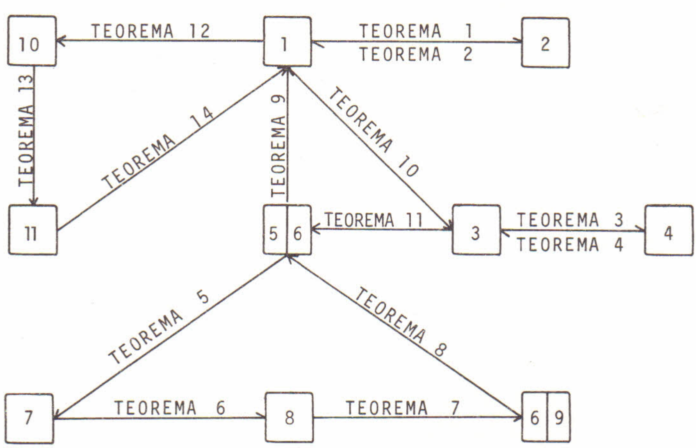
b) $a^* \in A-X \Rightarrow \exists \delta>0 \mid \nexists\ x \in (a^*-\delta, a^*]$ de modo que ou $x<a^*-\delta<a^* \Rightarrow a^* \in B$, o que é um absurdo, ou $a^* < x$ de modo que a^* não é o último.

2º B não tem primeiro, pois para $\forall\ b^* \in B\ \exists \varepsilon>0 \mid \nexists\ x \in (b^*-\varepsilon, b^*]$ e assim $x<b^*-\varepsilon<b^*$ de modo que b^* não é o primeiro.

Logo, X tem supremo.

CONCLUSÃO

As propriedades da Análise Matemática relativas a conjuntos, seqüências e intervalos no corpo ordenado completo dos números reais, cujas relações foram demonstradas, acham-se ilustradas no seguinte diagrama:



Seria possível obter tais resultados sem depender dos axiomas do corpo ordenado completo?

É sugestão para um futuro trabalho.

Seria interessante também estudar a possibilidade de obter outras relações entre as referidas propriedades e entre outras pro priedades da Análise Matemática a partir do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. APOSTOL,T.M. *Análisis Matematico*. Barcelona. Editorial Reverte, S.A. 1976.

2. FULKS,Watson. *Advanced Calculus an Introduction to Analysis*. New York. John Wiley & Sons, Inc. 1967.

3. RUDIN, Walter. *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro. Ao Livro Técnico S.A. 1971.

4. WHITE,A.J. *Análise Real uma Introdução, São Paulo*.Editora Edgard Blücher Ltda. 1973.

Recebido em janeiro, 1980; aceito em outubro, 1980.